

*Федеральное агентство по образованию Российской Федерации*  
*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*  
Энергетический факультет

А.Н. Рыбалев

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

*ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ И ЛАБОРАТОРНЫМ  
РАБОТАМ*

*Учебное пособие*

Благовещенск  
2006

ББК 32.965я73  
Р???

*Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
энергетического факультета  
Амурского государственного  
университета*

А.Н. Рыбалев

Теория автоматического управления. Оптимальные системы. Теоретические сведения с примерами решения задач и задания к практическим и лабораторным работам. Благовещенск, Амурский гос. ун-т, 2006, 107 с.

Предназначено для студентов специальности 220301 и других, изучающих дисциплину «Теория автоматического управления» и выполняющих по данной дисциплине практические и лабораторные работы. Может быть использовано также при выполнении других работ, связанных с расчетами и моделированием систем автоматического управления.

*Рецензенты:*

Е.Л. Еремин – профессор кафедры информационных и управляющих систем, декан факультета математики и информатики АмГУ, докт. техн. наук.

С.Н. Воякин – зав. кафедрой электропривода, электроники и электрооборудования автомобилей и тракторов ДальГАУ, канд. техн. наук, доцент;

## *ВВЕДЕНИЕ*

Пособие включает теоретические сведения и задания на практические и лабораторные работы по разделу «Оптимальное управление» курса «Теория автоматического управления». Оно охватывает следующие темы, изучаемые в данном разделе: постановка и классификация задач оптимального управления, вариационное исчисление, принцип максимума Понтрягина, динамическое программирование Беллмана.

Цель пособия – дать возможность студентам самостоятельно освоить теоретический материал одного из основных разделов «Теории автоматического управления». Содержание материала, изложенного в пособии, полностью соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта и рабочей программе данной дисциплины для специальности 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств».

Изучение теории сопровождается комплексом практических и лабораторных работ, связанных с выполнением студентами индивидуальных заданий по всем темам курса (за исключением постановочной).

На практических занятиях ведется разбор задания, составляются необходимые уравнения и находятся их общие решения, проектируются модели и т.д.

Лабораторные работы выполняются с применением персональных компьютеров и включают численное решение уравнений и имитационное моделирование.

В первой главе излагаются вопросы, связанные с постановкой задач оптимального управления и их классификацией.

Вторая глава посвящена методам решения задач оптимального управления с помощью классического вариационного исчисления. Поскольку раздел «Вариационное исчисление» изучается студентами в рамках курса «Математика», теоретические сведения, приведенные в пособии, ограничиваются в основном вопросами применения теории к решению практических задач. С этой целью достаточно подробно проанализированы пять примеров задач, различных по постановке и набору ограничений.

В третьей главе рассмотрен принцип максимума Понтрягина и его применение к линейной задаче максимального быстродействия. Приведены два примера решения задачи на максимальное быстродействие с нахождением оптимальной программы и оптимальной стратегии управления.

Четвертая глава посвящена методу динамического программирования Беллмана. Подробно рассмотрена задача аналитического конструирования регулятора, минимизирующего квадратичный критерий. Показан вывод уравнения Риккати. Приведен пример решения задачи.

В пятой главе – примеры решения практических задач оптимального управления электроприводом постоянного тока. Задание по материалу главы может составлять часть задания на курсовой проект по курсу «Теория автома-

тического управления» (третья часть проекта) или выполняться независимо – в рамках практических и лабораторных работ по дисциплине.

Шестая глава содержит краткие сведения о средствах программной системы Matlab, которые использовались при решении задач оптимального управления, приведенных в примерах пособия. Эти средства будут использованы студентами при выполнении их индивидуальных заданий.

# 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Оптимальным называют наиболее целесообразное в некотором смысле управление. В большинстве случаев перевести объект управления из одного состояния в другое (из исходного в заданное) можно множеством способов. Эти способы реализуются с помощью различных законов управления. Часто среди них можно выбрать такой закон, чтобы переходной процесс был оптимальным по определенному критерию (критерию оптимальности). В качестве критерия может выступать, например, минимум энергии, затраченной на процесс перехода, или минимум времени перехода. Критерий оптимальности формализуется в виде некоторого функционала, экстремум которого (минимум или максимум) свидетельствует, что переходной процесс и управление оптимальны.

Общий вид функционала следующий:

$$J = g_0(X(t_0), X(t_k), t_0, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(X(t), U(t), t) dt, \quad (1)$$

где  $X$  – вектор переменных состояния объекта управления;  $U$  – вектор управляющих воздействий;  $t_0, t_k$  – начальный и конечный моменты времени переходного процесса.

Функция  $g_0$  определяет «качество» граничных состояний, в том числе, возможно, связанные величинами  $t_0, t_k$ . Функция  $f_0$  определяет «качество» траекторий  $X(t)$  и управления на интервале  $t_0 \dots t_k$ .

Задача, в которой отыскивается экстремум функционала (1), называется *задачей Больца*. В частных случаях функционал (1) может принимать виды:

$$J = g_0(X(t_0), X(t_k), t_0, t_k), \quad (2)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(X(t), U(t), t) dt. \quad (3)$$

В первом случае задача поиска экстремума называется *задачей Майера*, во втором – *задачей Лагранжа*.

Примерами задачи Майера являются: задача максимального быстрого действия

$$J = t_k \rightarrow \min, \quad (4)$$

задача на максимальную «дальность» перемещения

$$J = x(t_k) \rightarrow \max. \quad (5)$$

В качестве примера задачи Лагранжа можно привести задачу на минимальное энергопотребление:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (6)$$

Вид подынтегральной функции критерия (6) объясняется тем, что мощность управляющего сигнала, как правило, пропорциональна квадрату его амплитуды. Кроме того, использование второй, а не первой степени переменной  $u(t)$  позволяет учесть то обстоятельство, что в переходном процессе управление может быть отрицательным. В частных случаях, когда известно, что управление всегда положительно, функционал может быть и более простым:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} u(t) dt \rightarrow \min. \quad (7)$$

Можно показать, что задачи Майера и Лагранжа имеют одну и ту же степень общности, т.е. путем определенных преобразований можно задачу, записанную первоначально, например, в качестве задачи Лагранжа, представить в виде задачи Майера и наоборот [3].

Важным обстоятельством при решении задач оптимального управления является то, что компоненты векторов  $X$  и  $U$  не могут рассматриваться как независимые функции времени, способные принимать любые значения. На векторы  $X$  и  $U$  обязательно накладываются некоторые ограничения в виде уравнений связи, предельно допустимых значений и т.д. Как минимум, стоит указать на дифференциальные уравнения самого объекта управления, связывающие компоненты векторов  $X$ ,  $\dot{X}$  и  $U$ . Таким образом, задачи оптимального управления – это всегда задачи на условный экстремум.

Разделяют «классические» (в виде равенств) и «неклассические» (неравенства) ограничения. «Классические», в свою очередь, делятся на *голономные, неголономные* и *изопериметрические*.

Голономные ограничения представляют собой алгебраические уравнения связи искомых функций  $X(t)$  и  $U(t)$ , записанные для удобства в виде равенств нулю:

$$\varphi_i(X, U, t) = 0, \quad i = 1 \dots r. \quad (8)$$

Для задач оптимизации динамических режимов работы объектов голономные ограничения нетипичны. Кроме того, как правило, от этих ограничений можно избавиться еще на этапе формулировки задачи путем соответствующих преобразований. Поэтому в дальнейшем они не рассматриваются.

Неголономные ограничения представляют собой дифференциальные уравнения:

$$\varphi_i(X, \dot{X}, U, t) = 0, \quad i = 1 \dots n. \quad (9)$$

Это дифференциальные уравнения объекта управления, а также, возможно, и другие уравнения, позволяющие учесть дополнительные ограничения.

Изопериметрические ограничения имеют вид:

$$\int_{t_0}^{t_k} \varphi_i(X, U, t) dt = c_i = \text{const}, \quad i = 1 \dots k. \quad (10)$$

В качестве примера такого ограничения можно привести ограничение на расход энергии в переходном процессе, которое можно представить в виде:

$$\int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt = c = \text{const}, \quad (11)$$

или, если заведомо известно, что  $u(t)$  принимает только положительные значения:

$$\int_{t_0}^{t_k} u(t) dt = c = \text{const}. \quad (12)$$

С помощью стандартного приема изопериметрические ограничения преобразуются в неголономные. Этот прием предполагает введение дополнительных переменных, производные которых по времени равны подынтегральным выражениям из (10)

$$\dot{x}_{n+i} = \varphi_i(X, U, t), \quad i = 1 \dots k. \quad (13)$$

Условно говоря, новые переменные «расширяют» исходную систему уравнений объекта, представляющую неголономные связи, и поэтому обычно обозначаются как  $x_{n+1}$ ,  $x_{n+2}$  и т.д. Подставляя (13) в (10), получим:

$$\int_{t_0}^{t_k} \varphi_i(X, U, t) dt = \int_{t_0}^{t_k} \dot{x}_{n+i} dt = x_{n+i}(t_k) - x_{n+i}(t_0) = c_i. \quad (14)$$

Для упрощения полагают  $x_{n+i}(t_0) = 0$ , тогда  $x_{n+i}(t_k) = c_i$ .

Типичным примером неклассических ограничений является ограничение на максимальные значения управляющих величин (ограничение управления по модулю):

$$|u_i| \leq u_{i,\text{max}}, \quad i = 1 \dots m. \quad (15)$$

Другой вид дополнительных условий, накладываемых на задачу, – это *граничные условия*, определяющие значения переменных объекта в начальный и конечный моменты времени переходного процесса. По виду граничных условий различают *задачи с закрепленными концами*, когда  $X(t_0)$  и  $X(t_k)$  известны (заданы), и *задачи с подвижными концами*, когда часть или все компоненты этих векторов неизвестны (могут принимать произвольные значения, возможно, в ограниченной области). Среди последних, как наиболее часто встречающуюся, выделяют *задачу со свободным правым концом*, в которой вектор  $X(t_k)$  неизвестен (полностью или частично). Примером является задача на максимальную дальность передвижения при ограничении на расход энергии.

В зависимости от определенности момента времени  $t_k$  задачи разделяют на *задачи с фиксированным и нефиксированным временем*. К последнему типу, очевидно, относится задача на максимальное быстроедействие.

Итак, задача оптимизации управления состоит в том, чтобы найти такие векторы  $U(t)$  и  $X(t)$ , которые доставляют экстремум функционалу критерия оптимальности с учетом всех ограничений и граничных условий. Эти векторы называются соответственно оптимальным управлением и оптимальной траекторией. В результате решения задачи оптимальное управление может быть найдено либо как *оптимальная программа*

$$U = U(t), \quad (16)$$

либо как *оптимальная стратегия*

$$U = U(X). \quad (17)$$

Для построения системы управления второе решение, очевидно, более предпочтительно, так как позволяет построить замкнутую систему, способную оптимальным образом функционировать при любых начальных условиях. Однако определить оптимальную стратегию, как правило, намного сложнее, чем оптимальную программу.

Решение задач оптимизации динамических режимов осуществляется различными методами, основными из которых являются:

- классическое вариационное исчисление;
- метод максимума Понтрягина;
- динамическое программирование Беллмана.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### 2.1. Задача с закрепленными концами и фиксированным временем

Рассмотрим задачу поиска безусловного экстремума функционала вида

$$J(y(t), \dot{y}(t), t) = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y(t), \dot{y}(t), t) dt. \quad (18)$$

где  $y(t)$  – некоторая функция независимой переменной  $t$  (в дальнейшем – времени).

Предположим, что функция  $y(t)$  доставляет экстремум функционалу (18). Дадим этой функции приращение  $\Delta y(t) \rightarrow 0$  – такое, что

$$\begin{cases} \Delta y(t_0) = 0, \\ \Delta y(t_k) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Определим приращение функционала (18), вызванное приращением функции  $\Delta y(t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(y(t) + \Delta y(t)) - J(y(t)) = \\ &= \int_{t_0}^{t_k} [f_0(y(t) + \Delta y(t), \dot{y}(t) + d\Delta y/dt, t) - f_0(y(t), \dot{y}(t), t)] dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Разложив подинтегральное выражение (20) в ряд Тейлора и отбросив все слагаемые выше первого порядка малости, получим так называемую первую вариацию функционала

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial y} \Delta y(t) + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \frac{d\Delta y}{dt} \right] dt. \quad (21)$$

Первая вариация функционала является главной (линейной) частью его приращения и представляет собой дифференциал функционала.

Проинтегрируем второе слагаемое подинтегрального выражения (21) по частям:

$$\int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \frac{d\Delta y}{dt} dt = \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \Delta y \Big|_{t_0}^{t_k} - \int_{t_0}^{t_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \Delta y(t) dt. \quad (22)$$

Принимая во внимание (19), получим:

$$\int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \frac{d\Delta y}{dt} dt = - \int_{t_0}^{t_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \Delta y(t) dt. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (21), запишем

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \right] \Delta y(t) dt.$$

Поскольку функция  $y(t)$  доставляет экстремум функционалу (18), его первая вариация, определенная на этой функции, должна быть равна нулю:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \right] \Delta y(t) dt = 0. \quad (24)$$

Равенство (24) должно иметь место для произвольных функций  $\Delta y(t)$ , удовлетворяющих граничным условиям (19). Это возможно, если функция  $\Delta y(t)$  умножается на нуль, т.е. выполняется равенство

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) называется *уравнением Эйлера*.

Таким образом, если существует такая функция  $y(t)$ , для которой функционал (18) достигает экстремума, то она удовлетворяет уравнению Эйлера (25).

Отметим, что уравнение (25) необходимое, но не достаточное условие экстремума функционала (18), подобно тому, как равенство нулю производной некоторой функции в некоторой точке не является достаточным условием экстремума функции в этой точке. Более того, если экстремум и достигается, то неизвестен его вид (минимум или максимум). Следовательно, решение, основанное на использовании (25), нуждается в проверке. Однако во многих случаях при решении реальных задач оптимального управления полученное решение и вид экстремума обосновываются физическими соображениями, и такую проверку не выполняют.

В случае, если функционал зависит от нескольких функций

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y_1(t), \dot{y}_1(t), y_2(t), \dot{y}_2(t), \dots, y_n(t), \dot{y}_n(t)) dt, \quad (26)$$

необходимыми условиями его экстремума будут уравнения Эйлера, записанные относительно всех неизвестных функций:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad (27)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

При решении задач оптимального управления под функциями  $y_i(t)$ , очевидно, нужно понимать неизвестные траектории движения объекта  $X(t)$  и само управление  $U(t)$ . Поэтому в общем случае функционал может иметь вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(x_1(t), \dot{x}_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_n(t), u_1(t), \dot{u}_1(t), \dots, u_m(t), \dot{u}_m(t)) dt. \quad (28)$$

Однако производные компонентов вектора состояния  $X$  могут быть выражены через сами компоненты и управляющие воздействия с помощью уравнений объекта, а производные вектора управления в функционал в большинстве случаев не входят. Кроме того, в дальнейшем для упрощения будем считать управление скалярным. С учетом этого функционал запишем в виде:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)) dt. \quad (29)$$

Таким образом, рассматривается задача Лагранжа.

На переменные состояния и управление наложены различные ограничения. В классическом вариационном исчислении рассматриваются ограничения в виде непрерывных функций. Применительно к задачам оптимизации динамических режимов эти функции связывают между собой переменные состояния объекта и управляющее воздействие и представляют собой не что иное, как дифференциальные уравнения объекта:

$$\dot{x}_i = f_i(X, u, t), \quad i = 1 \dots n. \quad (30)$$

Уравнения (30) могут быть представлены в виде неголономных ограничений следующим образом:

$$\varphi_i(X, \dot{X}, u, t) = f_i(X, u, t) - \dot{x}_i = 0, \quad i = 1 \dots n. \quad (31)$$

Для учета ограничений используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Согласно ему подынтегральная функция критерия расширяется путем включения в нее ограничений (в нашем случае – вида (31)). Полученная таким образом функция называется *функцией Лагранжа (лагранжианом)*:

$$L = f_0(X, u(t)) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_i(X, \dot{X}, u, t), \quad (32)$$

где  $\psi_i(t)$  – неизвестные функции, называемые множителями Лагранжа.

Отметим, что численно лагранжиан равен функции  $f_0(X, u(t))$ .

В дальнейшем при поиске экстремума вместо исходного функционала используется функционал

$$J^* = \int_{t_0}^{t_k} L(\dots) dt. \quad (33)$$

Уравнения Эйлера для функционала (33) примут вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1 \dots n, \quad (34)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0. \quad (35)$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение Эйлера для управления. Его простой вид следует из того, что в лагранжиан не входит производная управления и  $\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0$ .

Очевидны также следующие равенства:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_i} = 0, \quad i = 1 \dots n, \quad (36)$$

представляющие собой неголономные ограничения.

Система уравнений (34–36) называется *уравнениями Эйлера-Лагранжа*.

На практике уравнения Эйлера-Лагранжа удобнее записывать через так называемую *функцию Гамильтона (гамильтониан)*:

$$H = f_0(X, u(t)) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(X, u, t) = L + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \dot{x}_i. \quad (37)$$

$$\text{С учетом того, что } L = H - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \dot{x}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -\psi_i,$$

уравнения (33,35) примут вид:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{d\psi_i}{dt} = 0, \quad (38)$$

или

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1 \dots n, \quad (39)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (40)$$

Очевидно также, что:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i(X, u, t), \quad i = 1 \dots n. \quad (41)$$

Уравнения (41) – это уравнения объекта, выраженные через гамильтониан. В дальнейшем вместо них можно непосредственно использовать (30).

Система уравнений (39) (41) называется *системой Гамильтона*. Она представляет собой  $2n$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в форме Коши (уравнения (39) и уравнения объекта (41)). Уравнение (40) после взятия производной становится алгебраическим и позволяет выразить управление  $u(t)$  через неизвестные функции  $\psi_i(t)$  и  $x_i(t)$ , тем самым «избавиться» от этой переменной.

Таким образом, если существует управление  $u(t)$  и траектории  $X(t)$ , такие, что при них достигается экстремум функционала (29), то существуют не равные одновременно нулю множители  $\psi_i(t)$ , удовлетворяющие уравнениям (39) –(41).

Чтобы найти оптимальное управление и оптимальные траектории необходимо решить систему Гамильтона. Для этого, как известно, требуется  $2n$  дополнительных условий. Если рассматривается задача с фиксированным временем и закрепленными концами, то в качестве дополнительных выступают граничные условия:  $X(t_0) = X_0$ ,  $X(t_k) = X_k$  (этих условий в точности  $2n$  штук).

Пример 1.

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 + u, \end{cases} \quad (42)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в состояние  $x_1(1) = 1$ ,  $x_2(1) = 0$  таким образом, чтобы обеспечить минимум потребления энергии:

$$J = \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \min . \quad (43)$$

Запишем гамильтониан:

$$H = u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-3x_1 - x_2 + u). \quad (44)$$

Необходимыми условиями экстремума будут:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 3\psi_2, \quad (45)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + \psi_2, \quad (46)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \psi_2 = 0. \quad (47)$$

Из (47) получим

$$u = -0,5\psi_2. \quad (48)$$

Подставив (48) в уравнения объекта (42) и объединив последние с уравнениями (45), (46), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 - 0,5\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = 3\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2. \end{cases} \quad (49)$$

Система (49) однородна и может быть представлена в матричном виде

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X}, \quad (50)$$

где  $\hat{X} = [x_1, x_2, \psi_1, \psi_2]^T$ , а матрица  $A$  в данном случае имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Структура решения системы, как известно, зависит от вида собственных чисел матрицы  $A$  ([1]). Определим их с помощью следующего кода Matlab:

```
A = [0 1 0 0;-3 -1 0 -0.5;0 0 0 3;0 0 -1 1];
L = eig(A)

L =
-0.5000 + 1.6583i
-0.5000 - 1.6583i
 0.5000 + 1.6583i
 0.5000 - 1.6583i
```

В данном случае кратных корней нет, поэтому решение будем искать в виде:

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_1^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_4\alpha_1^{(4)}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_2^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_4\alpha_2^{(4)}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_3 = C_1\alpha_3^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_3^{(2)}e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_3^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_4\alpha_3^{(4)}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_4 = C_1\alpha_4^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_4^{(2)}e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_4^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_4\alpha_4^{(4)}e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (51)$$

где  $\lambda_j$  ( $j = 1 \dots 4$ ) – собственные числа матрицы  $A$  (определенные выше);  $\alpha^{(j)} = [\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \alpha_4^{(j)}]^T$  – собственные векторы, соответствующие числам  $\lambda_j$ ;  $C_j$  – постоянные, определяемые через дополнительные условия.

Отметим, что в нашем случае все перечисленные величины – комплексные числа.

Определим собственные векторы матрицы  $A$  с помощью следующего вызова функции `eig`:

```
[V, D] = eig(A); V

V =
-0.1443-0.4787i -0.1443+0.4787i -0.0714 -0.0714
 0.8660 0.8660 -0.0357-0.1185i -0.0357+0.1185i
 0 0 0.8571 0.8571
 0 0 0.1429+0.4738i 0.1429-0.4738i
```

Матрица  $V$  состоит из столбцов, каждый из которых – собственный вектор, определенный для соответствующего собственного числа. Матрица  $D$  нами не используется.

Для нахождения постоянных  $C_1 \dots C_4$  воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(1) &= 1, x_2(1) = 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений (51) получаем:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1\alpha_1^{(1)} + C_2\alpha_1^{(2)} + C_3\alpha_1^{(3)} + C_4\alpha_1^{(4)} = 0, \\ x_2(0) = C_1\alpha_2^{(1)} + C_2\alpha_2^{(2)} + C_3\alpha_2^{(3)} + C_4\alpha_2^{(4)} = 0, \\ x_1(1) = C_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2} + C_3\alpha_1^{(3)}e^{\lambda_3} + C_4\alpha_1^{(4)}e^{\lambda_4} = 1, \\ x_2(1) = C_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2} + C_3\alpha_2^{(3)}e^{\lambda_3} + C_4\alpha_2^{(4)}e^{\lambda_4} = 0, \end{cases} \quad (52)$$

или в матричной форме:

$$MC = N, \quad (53)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \alpha_1^{(3)} & \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_2^{(4)} \\ \alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1} & \alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2} & \alpha_1^{(3)}e^{\lambda_3} & \alpha_1^{(4)}e^{\lambda_4} \\ \alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1} & \alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2} & \alpha_2^{(3)}e^{\lambda_3} & \alpha_2^{(4)}e^{\lambda_4} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$N = [0, 0, 1, 0]^T. \quad (55)$$

$C = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$  – вектор, подлежащий определению.

Сформируем матрицы  $M$  и  $N$  и решим уравнение (53) в Matlab:

```
M = [V(1:2, :); V(1:2, :)*diag(exp(L))];
N = [0; 0; 1; 0];
C = M\N

C =

-1.4951 - 1.2951i
-1.4951 + 1.2951i
-5.6584 + 9.2247i
-5.6584 - 9.2247i
```

Перепишем систему (51) следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} + C'_{13}e^{\lambda_3 t} + C'_{14}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_2 = C'_{21}e^{\lambda_1 t} + C'_{22}e^{\lambda_2 t} + C'_{23}e^{\lambda_3 t} + C'_{24}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_3 = C'_{31}e^{\lambda_1 t} + C'_{32}e^{\lambda_2 t} + C'_{33}e^{\lambda_3 t} + C'_{34}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_4 = C'_{41}e^{\lambda_1 t} + C'_{42}e^{\lambda_2 t} + C'_{43}e^{\lambda_3 t} + C'_{44}e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (56)$$

где  $C'_{i,j} = C_j \alpha_i^{(j)}$ .

Матрицу  $C'$  определим с помощью кода

$$C\_ = V * \text{diag}(C)$$

$$C\_ =$$

$$\begin{array}{cccc} -0.4042+0.9026i & -0.4042-0.9026i & 0.4042-0.6589i & 0.4042+0.6589i \\ -1.2948-1.1216i & -1.2948+1.1216i & 1.2948+0.3408i & 1.2948 - 0.3408i \\ 0 & 0 & -4.8500+7.9069i & -4.8500 - 7.9069i \\ 0 & 0 & -5.1790-1.3631i & -5.1790 + 1.3631i \end{array}$$

Далее получим решение в обыкновенном виде, перейдя от комплексных функций к действительным. Для этого рассмотрим, например, первые два слагаемых первого уравнения системы (56). Показатели степени экспонент  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – комплексно сопряженные числа. Примем  $C'_{11} = a_1 + ib_1$ ,  $C'_{12} = a_2 + ib_2$ , тогда

$$\begin{aligned} C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} &= (a_1 + ib_1)e^{(\alpha_1 + i\beta_1)t} + (a_2 + ib_2)e^{(\alpha_1 - i\beta_1)t} = \\ &= e^{\alpha_1 t} \left[ (a_1 + ib_1)e^{i\beta_1 t} + (a_2 + ib_2)e^{-i\beta_1 t} \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Применим известные равенства

$$e^{i\beta_1 t} = \cos(\beta_1 t) + i \cdot \sin(\beta_1 t), \quad (58)$$

$$e^{-i\beta_1 t} = \cos(\beta_1 t) - i \cdot \sin(\beta_1 t). \quad (59)$$

Подставляя (58), (59) в (57), после преобразований получим

$$\begin{aligned} C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} &= e^{\alpha_1 t} \left[ (a_1 + a_2)\cos(\beta_1 t) + (-b_1 + b_2)\sin(\beta_1 t) + \right. \\ &\quad \left. + i(b_1 + b_2)\cos(\beta_1 t) + i(a_1 - a_2)\sin(\beta_1 t) \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Решение не должно содержать мнимой части, поэтому очевидно

$$a_2 = a_2, \quad b_2 = -b_1, \quad (61)$$

что подтверждается предыдущим расчетом.

С учетом (61) окончательно запишем

$$C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha_1 t} [2a_1 \cos(\beta_1 t) - 2b_1 \sin(\beta_1 t)]. \quad (62)$$

Аналогично поступая со всеми слагаемыми решения, содержащими экспоненты комплексно сопряженных чисел, решение системы уравнений представим в виде

$$x_1 = e^{-0,5t}[-0,8084 \cos(1,6583t) - 1,8052 \sin(1,6583t)] + e^{0,5t}[0,8084 \cos(1,6583t) + 1,3178 \sin(1,6583t)], \quad (63)$$

$$x_2 = e^{-0,5t}[-2,5964 \cos(1,6583t) + 2,2432 \sin(1,6583t)] + e^{0,5t}[2,5964 \cos(1,6583t) - 0,6816 \sin(1,6583t)], \quad (64)$$

$$\psi_1 = e^{0,5t}[-9,7 \cos(1,6583t) - 15,8138 \sin(1,6583t)], \quad (65)$$

$$\psi_2 = e^{0,5t}[-10,358 \cos(1,6583t) + 2,7262 \sin(1,6583t)]. \quad (66)$$

Управление:

$$u = -0,5\psi_2 = e^{0,5t}[5,179 \cos(1,6583t) - 1,3631 \sin(1,6583t)]. \quad (67)$$

Графики полученных оптимальных траекторий и оптимального управления приведены на рис. 1.

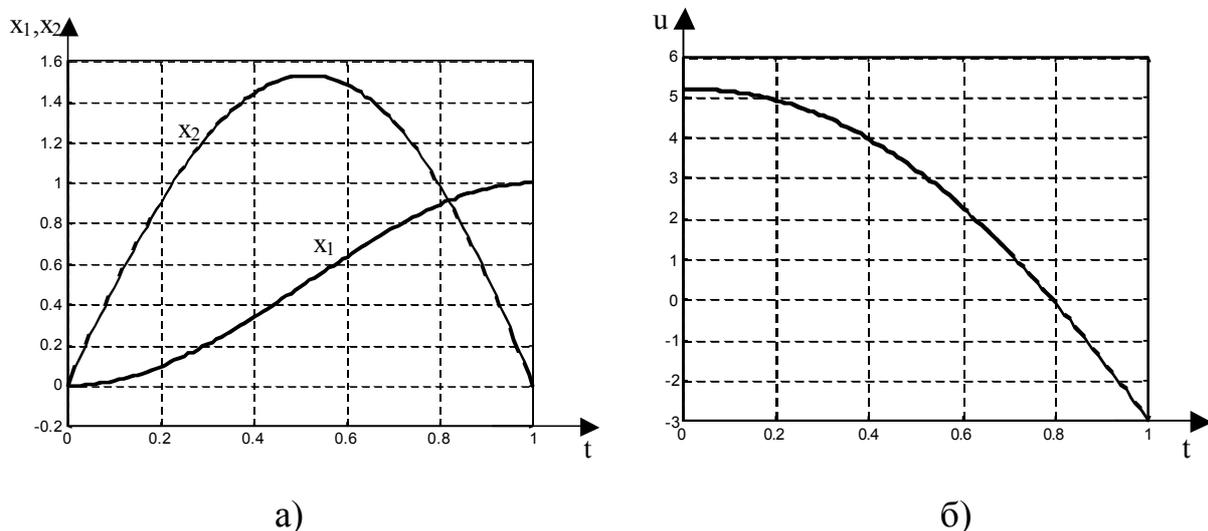


Рис. 1. Графики изменения координат объекта (а) и управления (б)

Значение функционала определим численным интегрированием с помощью следующего кода Matlab:

```
t = 0:.01:1;
u = exp(.5*t) .* (5.179*cos(1.6583*t) - 1.3631*sin(1.6583*t));
J = trapz(t, u.*u)
J =
    12.2882
```

Здесь использовалась библиотечная функция trapz, выполняющая интегрирование методом трапеций.

## 2.2. Задача с незакрепленными концами и фиксированным временем

Как и раньше, рассмотрим сначала задачу поиска безусловного экстремума функционала одной функции

$$J(y(t), \dot{y}(t), t) = g_0(y(t_0), y(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(y(t), \dot{y}(t), t) dt. \quad (68)$$

Интегральная составляющая критерия определяет «качество»  $y(t)$  на промежутке времени  $t_0 \dots t_k$ . Функция  $g_0(\dots)$  определяет составляющую качества, связанную с незакрепленными левым и правым концами.

В соответствии с ранее приведенной классификацией задача поиска экстремума функционала (68) есть задача Больца.

Для определения необходимых условий экстремума функционала (68) необходимо найти его первую вариацию и приравнять ее к нулю. Отметим, что приращение  $\Delta y(t)$  в данном случае приводит к приращению интеграла и функции  $g_0(\dots)$ . Последнее связано с приращениями значений незакрепленных концов:

$$\begin{cases} \Delta y(t_0) \neq 0, \\ \Delta y(t_k) \neq 0. \end{cases} \quad (69)$$

Определим приращение функционала (68), вызванное приращением функции  $\Delta y(t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta J = & g_0(y(t_0) + \Delta y(t_0), y(t_k) + \Delta y(t_k)) - g_0(y(t_0), y(t_k)) + \\ & + \int_{t_0}^{t_k} [f_0(y(t) + \Delta y(t), \dot{y}(t) + d\Delta y/dt, t) - f_0(y(t), \dot{y}(t), t)] dt. \end{aligned} \quad (70)$$

Разложив в  $\Delta J$  ряд Тейлора и отбросив все слагаемые выше первого порядка малости, получим первую вариацию функционала:

$$\delta J = \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} \Delta y(t_0) + \frac{\partial g_0}{\partial y(t_k)} \Delta y(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial y} \Delta y(t) + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \frac{d\Delta y}{dt} \right] dt. \quad (71)$$

Проинтегрировав второе слагаемое подынтегрального выражения (71) по частям, получим:

$$\begin{aligned} \delta J = & \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} \Delta y(t_0) + \frac{\partial g_0}{\partial y(t_k)} \Delta y(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial f_0}{\partial y} \Delta y(t) dt + \\ & + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \Delta y \Big|_{t_0}^{t_k} - \int_{t_0}^{t_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \Delta y(t) dt. \end{aligned} \quad (72)$$

Поскольку функция  $y(t)$  доставляет экстремум функционалу (68), его первая вариация, определенная на этой функции, должна быть равна нулю. Сгруппировав слагаемые в (72), запишем:

$$\delta J = \left[ \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}(t_0) \right] \Delta y(t_0) + \left[ \frac{\partial g_0}{\partial y(t_k)} + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}(t_k) \right] \Delta y(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \right] \Delta y(t) dt = 0. \quad (73)$$

Равенство (73) должно выполняться при любых произвольных функциях  $\Delta y(t)$  и их граничных значениях  $\Delta y(t_0)$  и  $\Delta y(t_k)$ . Поэтому необходимые условия экстремума функционала (68) можно записать в виде:

$$\frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}(t_0) = 0, \quad (74)$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial y(t_k)} + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}(t_k) = 0, \quad (75)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (76)$$

Уравнение (76) есть уравнение Эйлера, а уравнения (74), (75) называются *условиями трансверсальности*.

Условия трансверсальности связывают частные производные функций  $g_0(\dots)$  и  $f_0(\dots)$  и после их вычисления преобразуются в алгебраические уравнения.

В случае, когда функционал зависит от нескольких функций, уравнения Эйлера записываются для всех функций, а условия трансверсальности – для всех незакрепленных концов.

Применительно к задачам оптимального управления объектом, описываемым  $n$  дифференциальными уравнениями первого порядка, функционал качества приводится обычно к виду:

$$J = g_0(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), x_1(t_k), \dots, x_n(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) dt. \quad (77)$$

Как максимум, мы имеем  $n$  незакрепленных левых и  $n$  незакрепленных правых концов, что и отражено в (77). На практике число незакрепленных концов обычно меньше, и в  $g_0(\dots)$  является функцией менее чем  $2n$  переменных.

Для учета ограничений, накладываемых на функции  $x_i(t)$ , управление  $u(t)$  и незакрепленные концы, используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Исходный функционал (77) «расширяется» путем включения в него всех ограничений (в виде равенств нулю), помноженных на неопределенные множители:

$$J^* = G(\dots) + \int_{t_0}^{t_k} L(\dots) dt, \quad (78)$$

$$G = g_0(\dots) + \sum_{i=1}^r v_i g_i(\dots), \quad (79)$$

$$L = f_0(X, u(t)) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \phi_i(X, \dot{X}, u, t), \quad (80)$$

где  $g_i(\dots) = 0$  – ограничения, накладываемые на незакрепленные концы (максимальное их количество равно числу незакрепленных концов);  $v_i$  – неопределенные множители.

Необходимыми условиями экстремума функционала (78) будут

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad i = 1 \dots n, \quad (81)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_j(t_H)} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right|_{t_H} = 0, \quad (82)$$

где  $j$  – индексы незакрепленных левых концов,

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_s(t_K)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \right|_{t_K} = 0, \quad (83)$$

где  $s$  – индексы незакрепленных правых концов.

Уравнения (81) есть уравнения Эйлера-Лагранжа, а уравнения (82) и (83) – условия трансверсальности для функционала (78).

Учитывая, что  $L = H - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \dot{x}_i$ , уравнения (81) – (83) можно записать через функцию Гамильтона:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{\psi}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (84)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_j(t_H)} \right|_{t_H} = -\psi_j(t_H), \quad (85)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_s(t_K)} \right|_{t_K} = \psi_s(t_K). \quad (86)$$

Как уже указывалось, уравнения (84) совместно с уравнениями объекта образуют систему из  $2n$  дифференциальных уравнений первого порядка. Для их решения необходимо  $2n$  дополнительных условий. Если задача содержит  $r$  незакрепленных концов, то мы имеем  $2n - r$  граничных условий и  $r$  условий трансверсальности (85), (86). Таким образом, общее число дополнительных условий равно  $2n$ , и, следовательно, задача имеет решение.

### Пример 2.

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 + u, \end{cases} \quad (87)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в положение  $x_1(1) = 1$  таким образом, чтобы обеспечить минимум потребления энергии:

$$J = \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (88)$$

Конечное значение координаты  $x_2(1)$  может быть любым (т.е. нас не интересует конечная скорость объекта).

В данной задаче имеется один незакрепленный правый конец –  $x_2(1)$ . Эта переменная не входит в функционал, а кроме того, на нее не наложено никаких ограничений. Поэтому в данном случае

$$g_0 = 0, G = 0. \quad (89)$$

Запишем гамильтониан:

$$H = u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-3x_1 - x_2 + u). \quad (90)$$

Необходимыми условиями экстремума будут:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 3\psi_2, \quad (91)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + \psi_2. \quad (92)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \psi_2 = 0. \quad (93)$$

Из (93) получим

$$u = -0,5\psi_2. \quad (94)$$

Подставив (94) во второе уравнение системы (87) и объединив последние с уравнениями (91), (92), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 - 0,5\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = 3\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2. \end{cases} \quad (95)$$

Для ее решения необходимо четыре дополнительных условия. Мы имеем три граничных условия:  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_1(1) = 1$ . Для нахождения четвертого условия используем уравнение трансверсальности для  $x_2(1)$ :

$$\frac{\partial G}{\partial x_2(1)} = \psi_2(1). \quad (96)$$

Откуда с учетом (89) получим:  $\psi_2(1) = 0$ .

Дальнейшее решение производится аналогично решению задачи из примера 1.

Приведем решение для координат объекта и управления:

$$x_1 = e^{-0,5t}[-0,2208 \cos(1,6583t) - 1,8052 \sin(1,1932t)] + e^{0,5t}[0,2208 \cos(1,6583t) + 1,06 \sin(1,6583t)], \quad (97)$$

$$x_2 = e^{-0,5t}[-1,8682 \cos(1,6583t) + 0,9626 \sin(1,6583t)] + e^{0,5t}[1,8682 \cos(1,6583t) + 0,164 \sin(1,6583t)], \quad (98)$$

$$u = e^{0,5t}[3,7376 \cos(1,6583t) + 0,3278 \sin(1,6583t)]. \quad (99)$$

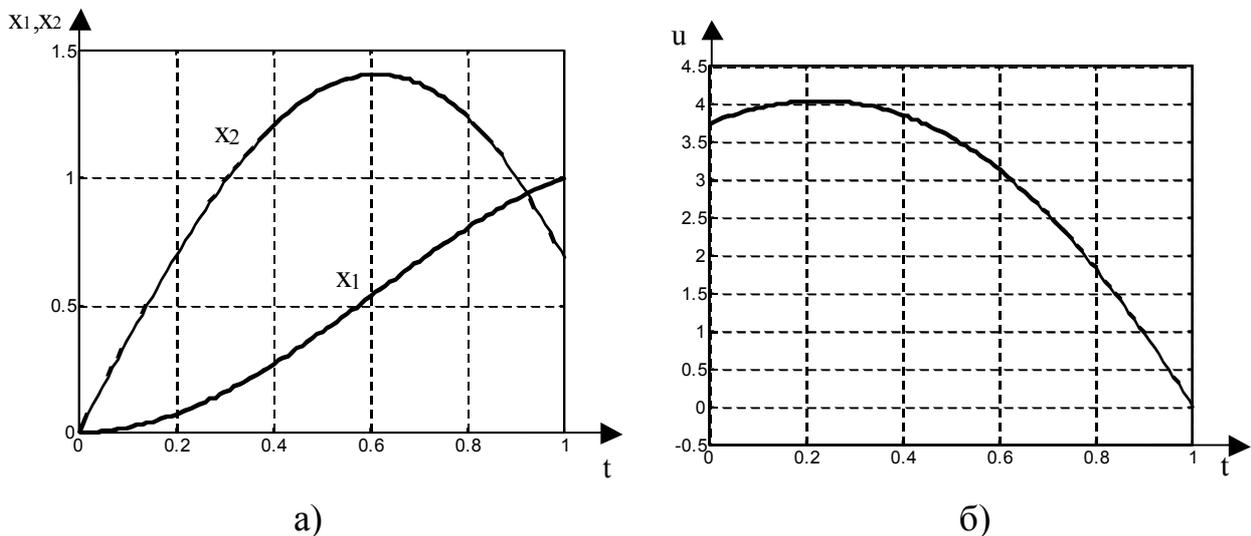


Рис. 2. Графики изменения координат объекта (а) и управления (б)

Подставляя  $t = 1$  в (87), получим конечное значение координаты  $x_2(1)$ :

$$x_{2k} = \exp(-.5) * (-1.8682 * \cos(1.6583) + .9626 * \sin(1.6583)) + \dots \\ \exp(.5) * (1.8682 * \cos(1.6583) + .164 * \sin(1.6583))$$

$$x_{2k} = 0.6808$$

Определим значение функционала:

$$t = 0:.01:1; \\ u = \exp(.5*t) .* (3.7366 * \cos(1.6583*t) + .3278 * \sin(1.6583*t)); \\ J = \text{trapz}(t, u.*u) \\ J = 10.2553$$

Значение функционала меньше, чем в предыдущем примере. Очевидно, это связано с тем, что в данном случае не накладывалось ограничений на конечную скорость объекта, следовательно, и не потребовалось его торможение на заключительной стадии переходного процесса.

Пример 3.

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 + u, \end{cases} \quad (100)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в положение  $x_1(1) = 1$  таким образом, чтобы обеспечить минимум функционала:

$$J = 10x_2^2(1) + \int_0^1 u^2 dt. \quad (101)$$

В данной задаче требования к переходному процессу выражают компромисс между желанием обеспечить минимум потребления энергии (интегральная часть функционала) и желанием иметь как можно меньшую скорость объекта ( $x_2$ ) в конечный момент времени (алгебраическая часть функционала).

Запишем гамильтониан и функцию G.

$$H = u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-3x_1 - x_2 + u), \quad (102)$$

$$G = 10x_2^2(1). \quad (103)$$

Гамильтониан (102) полностью совпадает с гамильтонианами из примеров 1 и 2, поэтому воспользуемся полученными ранее решениями и сразу запишем систему уравнений, выражающую необходимые условия оптимальности:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 - 0,5\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = 3\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2. \end{cases} \quad (104)$$

Решение системы уравнений имеет вид (см. пример 1):

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_1^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_1^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ x_2 = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_2^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_2^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ \Psi_1 = C_1 \alpha_3^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_3^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_3^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_3^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ \Psi_2 = C_1 \alpha_4^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_4^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_4^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_4^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (105)$$

где  $\lambda_j$  ( $j = 1 \dots 4$ ) – собственные числа матрицы A:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.5000 + 1.6583i, \\ \lambda_2 &= -0.5000 - 1.6583i, \\ \lambda_3 &= 0.5000 + 1.6583i, \\ \lambda_4 &= 0.5000 - 1.6583i,\end{aligned}$$

$\alpha^{(j)} = [\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \alpha_4^{(j)}]^T$  – собственные векторы, соответствующие числам  $\lambda_j$ :

$$\begin{aligned}\alpha^{(1)} &= [-0.1443-0.4787i, 0,866, 0, 0]^T, \\ \alpha^{(2)} &= [-0.1443+0.4787i, 0,866, 0, 0]^T, \\ \alpha^{(3)} &= [-0,0714, -0,0357-0,1185i, 0,8571, 0,1429+0,4738i]^T, \\ \alpha^{(4)} &= [-0,0714, -0,0357+0,1185i, 0,8571, 0,1429-0,4738i]^T.\end{aligned}$$

Для нахождения постоянных  $C_1 \dots C_4$  воспользуемся граничными условиями и условием трансверсальности:

$$\Psi_2(1) = \frac{\partial G}{\partial x_2(1)} = 20x_2(1). \quad (106)$$

Из первых двух уравнений (105) получим:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1\alpha_1^{(1)} + C_2\alpha_1^{(2)} + C_3\alpha_1^{(3)} + C_4\alpha_1^{(4)} = 0, \\ x_2(0) = C_1\alpha_2^{(1)} + C_2\alpha_2^{(2)} + C_3\alpha_2^{(3)} + C_4\alpha_2^{(4)} = 0, \\ x_1(1) = C_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2} + C_3\alpha_1^{(3)}e^{\lambda_3} + C_4\alpha_1^{(4)}e^{\lambda_4} = 1. \end{cases} \quad (107)$$

Раскрывая (106) с учетом второго и четвертого уравнений (105), определим:

$$\begin{aligned}C_1\alpha_4^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_4^{(2)}e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_4^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_4\alpha_4^{(4)}e^{\lambda_4 t} = \\ = 20C_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + 20C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} + 20C_3\alpha_2^{(3)}e^{\lambda_3 t} + 20C_4\alpha_2^{(4)}e^{\lambda_4 t},\end{aligned} \quad (108)$$

или

$$\begin{aligned}C_1(\alpha_4^{(1)} - 20\alpha_2^{(1)})e^{\lambda_1 t} + C_2(\alpha_4^{(2)} - 20\alpha_2^{(2)})e^{\lambda_2 t} \\ + C_3(\alpha_4^{(3)} - 20\alpha_2^{(3)})e^{\lambda_3 t} + C_4(\alpha_4^{(4)} - 20\alpha_2^{(4)})e^{\lambda_4 t} = 0.\end{aligned} \quad (109)$$

Объединяя (107) и (109), получим систему из четырех уравнений, решение которой позволяет определить постоянные  $C_1 \dots C_4$ . Представим эту систему в матричной форме:

$$MC = N, \quad (110)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \alpha_1^{(3)} & \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_2^{(4)} \\ \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1} & \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2} & \alpha_1^{(3)} e^{\lambda_3} & \alpha_1^{(4)} e^{\lambda_4} \\ (\alpha_4^{(1)} - 20\alpha_2^{(1)}) e^{\lambda_1} & (\alpha_4^{(2)} - 20\alpha_2^{(2)}) e^{\lambda_2} & (\alpha_4^{(3)} - 20\alpha_2^{(3)}) e^{\lambda_3} & (\alpha_4^{(4)} - 20\alpha_2^{(4)}) e^{\lambda_4} \end{bmatrix}, \quad (111)$$

$$N = [0, 0, 1, 0]^T. \quad (112)$$

$C = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$  – вектор, подлежащий определению.

Сформируем матрицы  $M$  и  $N$  и решим уравнение (99) в Matlab. Матрица  $V$  и вектор  $L$  содержат собственные векторы и собственные числа системы (94), см. пример 1.

```
M = [V(1:2, :); [V(1, :); V(4, :)-20*V(2, :)]*diag(exp(L) )];
N = [0; 0; 1; 0];
C = M\N
```

```
C =
-1.3681 - 1.0697i
-1.3681 + 1.0697i
-4.4045 + 8.6746i
-4.4045 - 8.6746i
```

Перепишем систему (105) следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} + C'_{13}e^{\lambda_3 t} + C'_{14}e^{\lambda_4 t}, \\ x_2 = C'_{21}e^{\lambda_1 t} + C'_{22}e^{\lambda_2 t} + C'_{23}e^{\lambda_3 t} + C'_{24}e^{\lambda_4 t}, \\ \Psi_1 = C'_{31}e^{\lambda_1 t} + C'_{32}e^{\lambda_2 t} + C'_{33}e^{\lambda_3 t} + C'_{34}e^{\lambda_4 t}, \\ \Psi_2 = C'_{41}e^{\lambda_1 t} + C'_{42}e^{\lambda_2 t} + C'_{43}e^{\lambda_3 t} + C'_{44}e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (113)$$

где  $C'_{i,j} = C_j \alpha_i^{(j)}$ .

Матрицу  $C'$  определим с помощью кода

```
C_ = V*diag(C)
```

```
C_ =
-0.3146+0.8093i -0.3146-0.8093i 0.3146-0.6196i 0.3146+0.6196i
-1.1848-0.9264i -1.1848+0.9264i 1.1848+0.2119i 1.1848-0.2119i
0 0 -3.7753+7.4354i -3.7753-7.4354i
0 0 -4.7393-0.8476i -4.7393+0.8476i
```

Как и в примере 1, перейдем к решению в обыкновенном виде, проведя соответствующие преобразования над парами слагаемых решения (113) (см. пример 1). В результате получим:

$$x_1 = e^{-0,5t}[-0,6292 \cos(1,6583t) - 1,6186 \sin(1,6583t)] + e^{0,5t}[0,6292 \cos(1,6583t) + 1,2392 \sin(1,6583t)], \quad (114)$$

$$x_2 = e^{-0,5t}[-2,3696 \cos(1,6583t) + 1,8528 \sin(1,6583t)] + e^{0,5t}[2,3696 \cos(1,6583t) - 0,4238 \sin(1,6583t)], \quad (115)$$

$$\psi_1 = e^{0,5t}[-7,5506 \cos(1,6583t) - 14,8708 \sin(1,6583t)], \quad (116)$$

$$\psi_2 = e^{0,5t}[-9,4786 \cos(1,6583t) + 1,6952 \sin(1,6583t)]. \quad (117)$$

Управление:

$$u = -0,5\psi_2 = e^{0,5t}[4,7393 \cos(1,6583t) - 0,8476 \sin(1,6583t)]. \quad (118)$$

Графики полученных оптимальных траекторий и оптимального управления приведены на рис. 3.

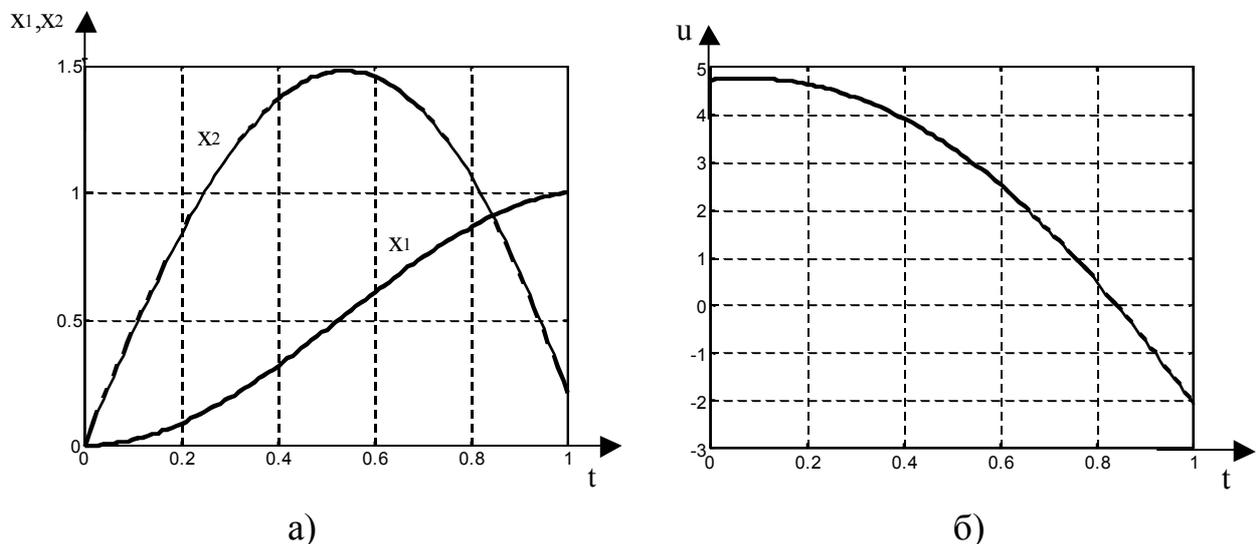


Рис. 3. Графики изменения координат объекта (а) и управления (б)

Скорость движения объекта в момент времени  $t = 1$  определим в Matlab:

```
x2k = exp(-.5) * (-2.3696*cos(1.6583)+1.8528*sin(1.6583)) + ...
      exp(.5) * (2.3696*cos(1.6583) - .4238*sin(1.6583))
```

```
x2k =
    0.2076
```

Значение функционала:

```
t = 0:.01:1;
u = exp(.5*t) .* (4.7393*cos(1.6583*t) - .8476*sin(1.6583*t));
J = 10*x2k + trapz(t, u.*u)
```

```
J =
    13.3140
```

При этом «потребление энергии» ( $\int_0^1 u^2 dt$ ) составило:

```
trapez(t,u.*u)
```

```
ans =
```

```
11.2380
```

Как и следовало ожидать, значение интеграла больше, чем в примере 2, где на конечную скорость объекта не накладывалось никаких ограничений, но меньше, чем в примере 1, в котором она должна была быть нулевой.

#### Пример 4.

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u, \end{cases} \quad (119)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в состояние, характеризуемое равенством

$$x_1(1) + x_2(1) = 1, \quad (120)$$

таким образом, чтобы обеспечить минимум потребления энергии:

$$J = \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (121)$$

Физический смысл такой задачи может быть следующим.

Будем полагать, что уравнения (119) описывают две независимые системы. За время, равное единице, их нужно привести в «согласованное» состояние, заданное уравнением (120) с минимальным потреблением энергии.

В данном случае присутствует ограничение на правые концы траектории движения, которое вносится в функцию G:

$$G = v(x_1(1) + x_2(1) - 1), \quad (122)$$

где  $v$  – неопределенный множитель.

Запишем гамильтониан:

$$H = u^2 + \psi_1(-x_1 + u) + \psi_2(-2x_2 + u). \quad (123)$$

Необходимыми условиями экстремума будут:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \psi_1 + \psi_2 = 0, \quad (124)$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_1, \quad (125)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 2\psi_2. \quad (126)$$

Из (124) получим

$$u = -0,5\psi_1 - 0,5\psi_2. \quad (127)$$

С учетом (127) полная система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 0,5\psi_1 - 0,5\psi_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - 0,5\psi_1 - 0,5\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 = 2\psi_2. \end{cases} \quad (128)$$

Для ее решения потребуется четыре дополнительных условия. Мы имеем два граничных условия  $x_1(0) = 0$  и  $x_2(0) = 0$  и уравнение (120), связывающее  $x_1(1)$  и  $x_2(1)$ . Воспользуемся условиями трансверсальности

$$\frac{\partial G}{\partial x_1(1)} = \psi_1(1) = v, \quad (129)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2(1)} = \psi_2(1) = v. \quad (130)$$

Собственно значение  $v$  нас не интересует, важно только, что

$$\psi_1(1) = \psi_2(1). \quad (131)$$

Таким образом, все четыре дополнительных условия нам известны.

Система (128) однородна и может быть представлена в матричном виде

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X}, \quad (132)$$

где  $\hat{X} = [x_1, x_2, \psi_1, \psi_2]^T$ , а матрица  $A$  имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & -2 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Определим собственные числа матрицы  $A$  с помощью Matlab:

```
A = [-1 0 -0.5 -0.5; 0 -2 -0.5 -0.5 ; 0 0 1 0; 0 0 0 2];
L = eig(A)
```

```
L =
-1
-2
1
2
```

Кратных чисел нет, поэтому решение будем искать в виде:

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_1^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_1^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_2 = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_2^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_2^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_3 = C_1 \alpha_3^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_3^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_3^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_3^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_4 = C_1 \alpha_4^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_4^{(2)} e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_4^{(3)} e^{\lambda_3 t} + C_4 \alpha_4^{(4)} e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (133)$$

где  $\lambda_j$  ( $j = 1 \dots 4$ ) – собственные числа матрицы  $A$  (определенные выше);  $\alpha^{(j)} = [\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \alpha_4^{(j)}]^T$  – собственные векторы, соответствующие числам  $\lambda_j$ ;  $C_j$  – постоянные, определяемые через дополнительные условия.

Определим собственные векторы матрицы  $A$  с помощью следующего вызова функции `eig`:

`[V, D] = eig(A); V`

`V =`

```

1.0000      0   -0.2394   -0.1632
      0   1.0000   -0.1596   -0.1224
      0      0    0.9577      0
      0      0      0    0.9790

```

Матрица  $V$  состоит из столбцов, каждый из которых – собственный вектор, определенный для соответствующего комплексного числа. Матрица  $D$  нами не используется.

Для нахождения постоянных  $C_1 \dots C_4$  воспользуемся дополнительными условиями, которые в новых обозначениях будут следующими:

$$\begin{cases} \hat{X}_1(0) = 0, \\ \hat{X}_2(0) = 0, \\ \hat{X}_1(1) + \hat{X}_2(1) = 1, \\ \hat{X}_3(1) - \hat{X}_4(1) = 0. \end{cases} \quad (134)$$

Первые два уравнения (134) с учетом решения (133) следующие:

$$x_1(0) = C_1 \alpha_1^{(1)} + C_2 \alpha_1^{(2)} + C_3 \alpha_1^{(3)} + C_4 \alpha_1^{(4)} = 0, \quad (135)$$

$$x_2(0) = C_1 \alpha_2^{(1)} + C_2 \alpha_2^{(2)} + C_3 \alpha_2^{(3)} + C_4 \alpha_2^{(4)} = 0. \quad (136)$$

Третье и четвертое уравнения (134) примут вид:

$$\begin{aligned} x_1(1) + x_2(1) = C_1 (\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) e^{\lambda_1} + C_2 (\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}) e^{\lambda_2} + \\ + C_3 (\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)}) e^{\lambda_3} + C_4 (\alpha_1^{(4)} + \alpha_2^{(4)}) e^{\lambda_4} = 1, \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(1) - \psi_1(1) = & C_1(\alpha_3^{(1)} - \alpha_4^{(1)})e^{\lambda_1} + C_2(\alpha_3^{(2)} - \alpha_4^{(2)})e^{\lambda_2 t} + \\ & + C_3(\alpha_3^{(3)} - \alpha_4^{(3)})e^{\lambda_3 t} + C_4(\alpha_3^{(4)} - \alpha_4^{(4)})e^{\lambda_4 t} = 0. \end{aligned} \quad (138)$$

В матричной форме уравнения (135) – (138) запишутся:

$$MC = N, \quad (139)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \alpha_1^{(3)} & \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_2^{(4)} \\ (\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)})e^{\lambda_1} & (\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)})e^{\lambda_2} & (\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)})e^{\lambda_3} & (\alpha_1^{(4)} + \alpha_2^{(4)})e^{\lambda_4} \\ (\alpha_3^{(1)} - \alpha_4^{(1)})e^{\lambda_1} & (\alpha_3^{(2)} - \alpha_4^{(2)})e^{\lambda_2} & (\alpha_3^{(3)} - \alpha_4^{(3)})e^{\lambda_3} & (\alpha_3^{(4)} - \alpha_4^{(4)})e^{\lambda_4} \end{bmatrix}, \quad (140)$$

$$N = [0, 0, 1, 0]^T. \quad (141)$$

$C = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$  – вектор, подлежащий определению.

Сформируем матрицы M и N и решим уравнение (31) в Matlab:

```
M = [V(1:2, :); [V(1, :) + V(2, :); V(3, :) - V(4, :)] * diag(exp(L))];
N = [0; 0; 1; 1];
C = M \ N
C =
```

```
-0.1747
-0.1193
-0.5859
-0.2109
```

Перепишем систему (133) следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = C'_{11}e^{\lambda_1 t} + C'_{12}e^{\lambda_2 t} + C'_{13}e^{\lambda_3 t} + C'_{14}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_2 = C'_{21}e^{\lambda_1 t} + C'_{22}e^{\lambda_2 t} + C'_{23}e^{\lambda_3 t} + C'_{24}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_3 = C'_{31}e^{\lambda_1 t} + C'_{32}e^{\lambda_2 t} + C'_{33}e^{\lambda_3 t} + C'_{34}e^{\lambda_4 t}, \\ \hat{X}_4 = C'_{41}e^{\lambda_1 t} + C'_{42}e^{\lambda_2 t} + C'_{43}e^{\lambda_3 t} + C'_{44}e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (142)$$

где  $C'_{i,j} = C_j \alpha_i^{(j)}$ .

Матрицу  $C'$  определим с помощью кода

```
C_ = V * diag(C)
```

```
C_ =
```

```
-0.1747      0      0.1403      0.0344
      0     -0.1193      0.0935      0.0258
      0      0     -0.5611      0
      0      0      0      -0.2064
```

Окончательно решение запишем в виде:

$$x_1 = -0,1747e^{-t} + 0,1403e^t + 0,0344e^{2t}, \quad (143)$$

$$x_2 = -0,1193e^{-2t} + 0,0935e^t + 0,0258e^{2t}, \quad (144)$$

$$\psi_1 = -0,5611e^t, \quad (145)$$

$$\psi_2 = -0,2064e^{2t}. \quad (146)$$

Управление

$$u = -0,5\psi_1 - 0,5\psi_2 = 0,2806e^t + 0,1032e^{2t}. \quad (147)$$

Графики координат объекта и управления приведены на рис. 4.

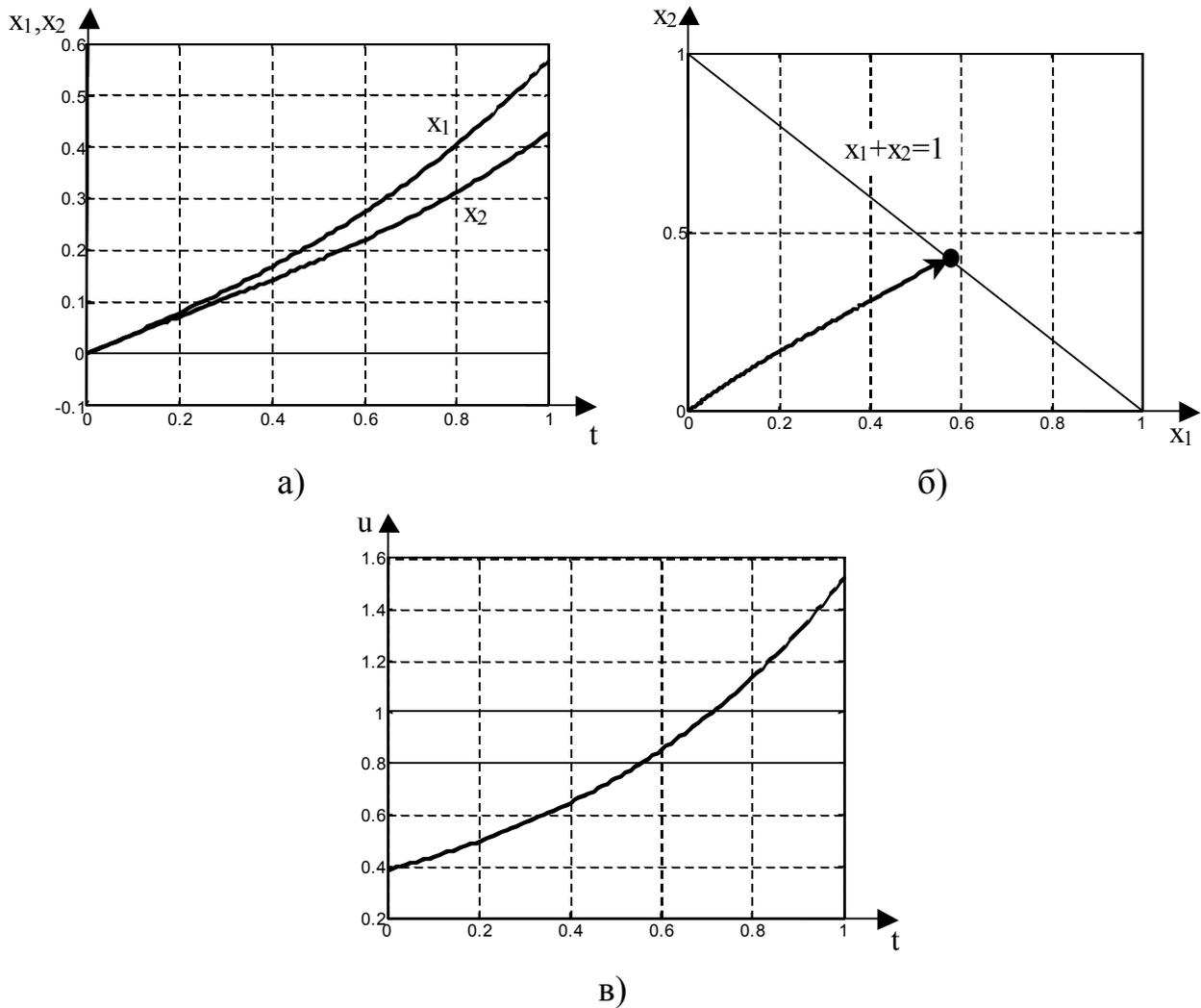


Рис. 4. Оптимальная траектория (а, б) и оптимальное управление (в)

Конечные значения координат:

$$x_{1k} = -0.1747 \cdot \exp(-1) + 0.1403 \cdot \exp(1) + 0.0344 \cdot \exp(2)$$

$$x_{1k} =$$

$$0.5713$$

$$x_{2k} = -0.1193 \cdot \exp(-2) + 0.0935 \cdot \exp(1) + 0.0258 \cdot \exp(2)$$

$$x_{2k} = 0.4287$$

Значение функционала:

$$\begin{aligned} t &= 0 : .01 : 1; \\ u &= .2806 \cdot \exp(t) + .1032 \cdot \exp(2t) \\ J &= \text{trapz}(t, u .* u) \end{aligned}$$

$$J = 0.7626$$

### Пример 5

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (148)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в положение  $x_2(1) = 0$  (конечная скорость равна нулю) таким образом, чтобы обеспечить максимум функционала:

$$J = x_1(1) \quad (149)$$

с учетом ограничения на энергоресурс

$$\int_0^1 u^2 dt = 12. \quad (150)$$

Из формулировки задачи видно, что это задача на максимальную дальность перемещения. Избавимся от изопериметрического ограничения (150), введя дополнительную переменную  $x_3$ , такую, что

$$\dot{x}_3 = u^2. \quad (151)$$

Примем  $x_3(0) = 0$ , тогда  $x_3(1) = 12$ .

Запишем гамильтониан и функцию G:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u^2, \quad (152)$$

$$G = x_1(1). \quad (153)$$

Необходимыми условиями экстремума будут:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (154)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad (155)$$

$$\dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0, \quad (156)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2 + 2\psi_3 u = 0. \quad (157)$$

Из (154)–(157) получим

$$\psi_1 = C_1 = \text{const}, \quad (158)$$

$$\psi_2 = -\psi_1 t + C_2 = -C_1 t + C_2, \quad (159)$$

$$\psi_3 = C_3 = \text{const}, \quad (160)$$

$$u = -\frac{\psi_2}{2\psi_3} = \frac{C_1 t - C_2}{2C_3}. \quad (161)$$

Применим условие трансверсальности

$$\Psi_1(1) = \frac{\partial G}{\partial x_1(1)} = 1, \quad (162)$$

следовательно,  $C_1 = 1$ . Подставляя это значение в (159) и (161), получим

$$\psi_2 = C_2 - t, \quad (163)$$

$$u = -\frac{\psi_2}{2\psi_3} = \frac{t - C_2}{2C_3}, \quad (164)$$

$$u^2 = \frac{t^2 - 2C_2 t + C_2^2}{4C_3^2}. \quad (165)$$

Интегрируя (151) с учетом (165), определим

$$x_3 = \frac{t^3}{12C_3^2} - \frac{C_2 t^2}{4C_3^2} + \frac{C_2^2 t}{4C_3^2} + C_4. \quad (166)$$

Из начального условия для  $x_3$  следует, что  $C_4 = 0$ . Конечное условие дает:

$$x_3(1) = \frac{1}{12C_3^2} - \frac{C_2}{4C_3^2} + \frac{C_2^2}{4C_3^2} = \frac{1 - 3C_2 + 3C_2^2}{12C_3^2} = 12, \quad (167)$$

откуда

$$C_3 = \pm \frac{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}}{12}. \quad (168)$$

Необходимо выбрать знак в (168). Рассмотрим оба варианта. Первый:

$$C_3 = \frac{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}}{12}, \quad (169)$$

$$u = \frac{t - C_2}{2C_3} = \frac{6(t - C_2)}{1 - 3C_2 + 3C_2^2} = k_1 t + k_2, \quad (170)$$

где

$$k_1 = \frac{6}{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}}, \quad k_2 = -\frac{6C_2}{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}}. \quad (171)$$

Из (148) с учетом (170) получим

$$x_2 = \frac{k_1}{2} t^2 + k_2 t + k_3. \quad (172)$$

Так как  $x_2(0) = 0$ ,  $k_3 = 0$ . Далее из того, что  $x_2(1) = 0$ , следует:

$$\frac{k_1}{2} + k_2 = 0, \quad (173)$$

откуда с учетом (171) получим:  $C_2 = 0,5$ . Подставляя это значение в (170), имеем

$$u = \frac{6(t - C_2)}{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}} = 12t - 6. \quad (174)$$

Интегрируя уравнения объекта с учетом (174) и нулевых начальных условий, получим:

$$x_2 = 6t^2 - 6t, \quad (175)$$

$$x_1 = 2t^3 - 3t^2. \quad (176)$$

Согласно (176) в момент времени  $t = 1$   $x_1 = -1$ .

Второй вариант:

$$C_3 = -\frac{\sqrt{1 - 3C_2 + 3C_2^2}}{12}. \quad (177)$$

Проведя вычисления, аналогичные проведенным выше, в данном случае получим:

$$u = 6 - 12t, \quad (178)$$

$$x_2 = 6t - 6t^2, \quad (179)$$

$$x_1 = 3t^2 - 2t^3. \quad (180)$$

При этом  $x_1(1) = 1$ .

Сравнивая решения по двум вариантам, выбираем второе как обеспечивающее максимум функционала (149) (первое решение, очевидно, дает его ми-

нимум). Графики оптимальных траекторий и оптимального управления, построенные по формулам (178)–(180), приведены на рис. 5.

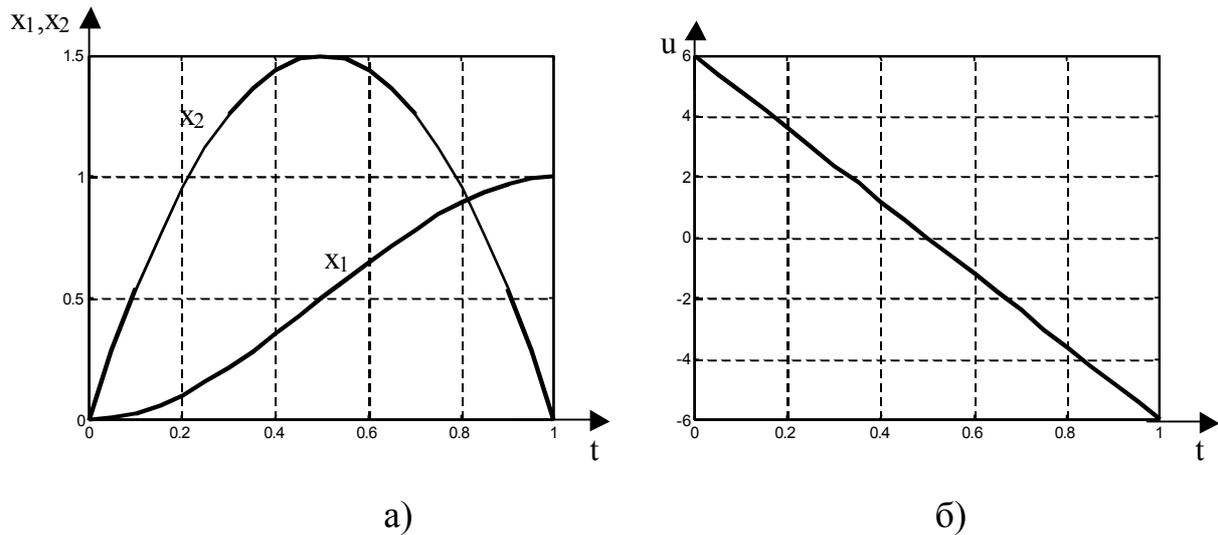


Рис. 5. Графики изменения координат объекта (а) и управления (б)

В заключение отметим, что с помощью вариационного исчисления можно решать задачи и с нефиксированным временем, однако в данной работе для этой цели мы будем использовать принцип максимума.

### 2.3. Задания

Определить оптимальное управление, переводящее объект, описанный матрицами состояния  $A$  и управления  $B$ , из состояния  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  в состояние  $x_1(t_k)$ ,  $x_2(t_k)$  за заданное время  $t_k$  таким образом, чтобы достигался минимум функционала  $J$ .

Варианты:

$$1. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(t_k) = 2, x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt, t_k = 2.$$

$$2. A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(t_k) = 2, x_2(t_k) = 0,5,$$

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt, t_k = 1.$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(t_k) = 1, x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_K} (u^2 + x_2^2) dt, \quad t_K = 1.$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_K) = 5, \quad x_2(t_K) \text{ любое,}$$

$$J = \int_0^{t_K} u^2 dt, \quad t_K = 3.$$

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_K) \text{ любое, } x_2(t_K) = 1,$$

$$J = \int_0^{t_K} u^2 dt, \quad t_K = 2.$$

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_K) = 1, \quad x_2(t_K) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_K} (u^2 + 2x_2^2) dt, \quad t_K = 10.$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(t_K) = x_2(t_K) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_K} u^2 dt, \quad t_K = 2.$$

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_K) = 1, \quad x_2(t_K) = -1,$$

$$J = \int_0^{t_K} (u^2 + x_1^2) dt, \quad t_K = 4.$$

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_K) + 2x_2(t_K) = 1,$$

$$J = \int_0^{t_K} (u^2 + x_1^2) dt, \quad t_K = 2.$$

$$10. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_K) = 1,$$

$x_2(t_K)$  неизвестно,

$$J = x_2^2(t_k) + \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 1.$$

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1, \quad x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} (u^2 + x_2^2) dt, \quad t_k = 10.$$

$$12. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) \text{ неизвестно},$$

$$x_2(t_k) = 5,$$

$$J = x_1^2(t_k) + \int_0^{t_k} 4u^2 dt, \quad t_k = 6.$$

$$13. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) + x_2(t_k) = 4,$$

$$J = x_1^2(t_k) + x_2^2(t_k) + \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 1.$$

$$14. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 2, \quad x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} (u^2 + x_2^2) dt, \quad t_k = 4.$$

$$15. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1, \quad x_2(t_k) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 2x_2^2 + 3u^2) dt, \quad t_k = 2.$$

$$16. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) \text{ максимально},$$

$$x_2(t_k) = 0, \quad J = -x_1(t_k), \quad \int_0^{t_k} u^2 dt = 10, \quad t_k = 2.$$

$$17. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1, \quad x_2(t_k) = 1,$$

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 5.$$

$$18. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 0,$$

$$x_2(t_k) = \text{максимально}, \quad J = -x_2(t_k), \quad \int_0^{t_k} u^2 dt = 10, \quad t_k = 6.$$

$$19. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 1,$$

$x_2(t_k)$  неизвестно,

$$J = 2x_2^2(t_k) + \int_0^{t_k} u^2 dt, \quad t_k = 1.$$

$$20. \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad 3x_1(t_k) + 2x_2(t_k) = 1,$$

$$J = x_1^2(t_k) + 2x_2^2(t_k) + \int_0^{t_k} 3u^2 dt, \quad t_k = 2.$$

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

#### 3.1. Принцип максимума Понтрягина

Принципом максимума называют математический метод, разработанный академиком Л.С. Понтрягиным и его учениками для решения задач оптимального управления. Этот метод позволяет определить необходимые условия минимума функционала вида

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(X(t), U(t)) dt, \quad (181)$$

где  $X$  – вектор переменных состояния объекта;  $U$  – вектор управляющих воздействий при наличии любых, в том числе неклассических (в виде неравенств) ограничений, накладываемых на векторы  $X$  и  $U$ .

Важно отметить, что при этом конечное время  $t_k$  неизвестно и подлежит определению при решении задачи.

В нашей работе мы будем рассматривать задачи оптимального управления, когда неклассические ограничения заданы только на вектор управления, чему соответствует вариант принципа максимума, наиболее часто используемый на практике. Будем считать, что этот вектор должен принадлежать некоторой известной области допустимых значений  $\Omega$ , т.е.  $U \subset \Omega$ . Область  $\Omega$  может быть задана, например, неравенствами вида

$$|u_i| \leq u_{i,\max}, \quad i = 1 \dots m, \quad (182)$$

что означает ограничение управляющих воздействий по модулю.

Для определения необходимых условий минимума функционала (181) принцип максимума, как и вариационное исчисление, использует функцию Гамильтона. Эта функция задается следующим образом:

$$H = \psi_0(t)f_0(X(t), U(t)) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t)f_i(X(t), U(t)), \quad (183)$$

где  $\psi_0 \dots \psi_n$  – неопределенные множители;  $f_i(X(t), U(t))$  – правые части дифференциальных уравнений объекта.

Отличием данной функции от гамильтониана, применяемого в вариационном исчислении, является присутствие множителя  $\psi_0$  перед подынтегральной функцией функционала.

При фиксированных значениях  $\psi_0 \dots \psi_n$  и  $x_1 \dots x_n$  функция  $H$  является функцией управления  $U$ . Следовательно, из области допустимых значений  $\Omega$  можно выбрать такой вектор управляющих воздействий, при котором гамильтониан достигает максимума. Обозначим верхнюю грань (максимум) значений  $H$  через  $M(\Psi, X)$ :

$$M(\Psi, X) = \sup_{U \subset \Omega} H(\Psi, X, U). \quad (184)$$

Сформулируем принцип максимума [3].

Для оптимальности управления и траектории  $X(t)$  необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции  $\Psi(t) = [\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]$ , соответствующей функциям  $U(t)$  и  $X(t)$ , что:

1) при любом  $t$  на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_k$  функция  $H(\Psi, X, U)$  переменного  $U \subset \Omega$  достигает при данном управлении  $U(t)$  максимума

$$H(\Psi(t), X(t), U(t)) = M(\Psi(t), X(t)); \quad (185)$$

2) в конечный момент времени  $t_k$  выполняются соотношения

$$\psi_0(t_k) \leq 0; \quad M(\Psi(t_k), X(t_k)) = 0. \quad (186)$$

Кроме того, если  $\Psi(t), X(t), U(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1 \dots n \quad (187)$$

и условию (185), то функции  $\psi_0(t)$  и  $M(\Psi(t), X(t))$  переменного  $t$  являются постоянными и условие (186) выполняется в любой момент времени на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_k$ .

Отметим, что вектор  $\Psi(t)$  может быть определен с точностью до постоянного множителя, так как очевидно, что если некоторый вектор  $\Psi^*(t)$  удовлетворяет условиям принципа максимума, то вектор  $k\Psi^*(t)$ , где  $k = \text{const} > 0$ , также им удовлетворяет. Поэтому всегда при  $\psi_0(t) \neq 0$  можно положить  $\psi_0(t) = -1$ , что мы и будем делать (случай  $\psi_0(t) = 0$  является особым и нами не рассматривается).

### 3.2. Линейная задача максимального быстродействия.

#### Теорема об $n$ интервалах

Принцип максимума позволяет решать задачи оптимального управления, в которых в качестве критерия оптимизации выступает время переходного процесса. Это время должно быть минимальным, – другими словами, речь идет об обеспечении максимального быстродействия системы.

Теоретически любой линейный объект может быть переведен из любого начального состояния в любое конечное за сколь угодно малое время. Увеличение быстродействия достигается увеличением мощности управляющего сигнала. Однако на практике этот сигнал всегда ограничен (в данной работе рассматривается ограничение управления по модулю (182)). В таких условиях минимальное время перехода объекта из одного состояния в другое существует и конечно, т.е. задача оптимального управления имеет решение.

Пусть имеется линейный объект управления, описываемый матричным уравнением

$$\dot{X} = AX + BU. \quad (188)$$

Уравнение (188) эквивалентно системе из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k, \quad i = 1 \dots n, \quad (189)$$

где  $n$  – порядок системы;  $m$  – число управляющих воздействий.

Предположим, что система (189) является нормальной, т.е. матрицы

$$G_j = [b_j | Ab_j | A^2b_j | \dots | A^{n-1}b_j], \quad j = 1 \dots m, \quad (190)$$

где  $b_j$  –  $j$ -й столбец матрицы  $B$ , для всех  $j$  являются невырожденными. Это означает управляемость системы по всем управляющим воздействиям.

Пусть область допустимых значений управления  $U$  представляет собой  $m$ -мерный параллелепипед, задаваемый неравенствами

$$u_{j,\min} \leq u_j \leq u_{j,\max}, \quad j = 1 \dots m, \quad (191)$$

где  $u_{j,\min} < 0$ ,  $u_{j,\max} > 0$ .

Требуется определить управление, обеспечивающее максимальное быстроедействие системе (189) при переводе ее из состояния  $X(t_0)$  в состояние  $X(t_k)$ , т.е. доставляющее минимум функционалу:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} dt. \quad (192)$$

Составим гамильтониан:

$$H = -1 + \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k, \quad (193)$$

или в матричной форме

$$H = -1 + \Psi^T A X + \Psi^T B U. \quad (194)$$

Уравнения (187) примут вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -A^T \Psi. \quad (195)$$

Оптимальное управление доставляет максимум функции Гамильтона в каждый момент времени. Для этого оно должно максимизировать функцию  $\Psi^T B U$ , которую можно представить в виде:

$$\Psi^T B U = \sum_{k=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n \psi_i b_{ik} \right] u_k. \quad (196)$$

Так как компоненты вектора  $u$  могут изменяться независимо друг от друга, максимум функции (196) достигается при следующих условиях:

$$u_k = \begin{cases} u_{k,\max}, & \text{если } \sum_{i=1}^n \psi_i b_{ik} > 0, \\ u_{k,\min}, & \text{если } \sum_{i=1}^n \psi_i b_{ik} < 0, \quad k = 1 \dots m. \end{cases} \quad (197)$$

Таким образом, оптимальные управления  $u_k(t)$  являются кусочно-постоянными функциями, принимающими значения  $u_{k,\min}$  и  $u_{k,\max}$ . Необходимо выяснить, определяются ли эти функции однозначным способом (за исключением конечного числа точек).

Как следует из (197),  $u_k(t)$  определяется неоднозначно, если

$$\sum_{i=1}^n \psi_i b_{ik} = 0. \quad (198)$$

Вектор-функция  $\Psi(t)$  – аналитическая функция, так как является решением системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами (195). Следовательно, аналитической является и функция  $\sum_{i=1}^n \psi_i(t) b_{ik}$ .

Предположим, что эта функция обращается в нуль на бесконечном множестве точек  $t$ , т.е.

$$\sum_{i=1}^n \psi_i b_{ik} \equiv 0. \quad (199)$$

Запишем это тождество в векторной форме:

$$\Psi^T(t) b_k \equiv 0, \quad (200)$$

где  $b_k$  –  $k$ -й столбец матрицы  $B$ .

Продифференцировав (200)  $n-1$  раз с учетом (195), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Psi^T(t) b_k \equiv 0, \\ \Psi^T(t) A b_k \equiv 0, \\ \dots \\ \Psi^T(t) A^{n-1} b_k \equiv 0. \end{cases} \quad (201)$$

Относительно вектора  $\Psi(t)$  уравнения (201) представляют систему линейных однородных алгебраических уравнений. Принимая во внимание (190), систему (201) можно переписать в компактной форме:

$$\Psi^T(t) G_k^T \equiv 0. \quad (202)$$

Определитель этой системы

$$\det(G_k^T) \neq 0, \quad (203)$$

так как система (189) является нормальной. Тогда тождество (202) может иметь место только в случае, если

$$\Psi^T(t) \equiv 0. \quad (204)$$

Однако это противоречит принципу максимума. Таким образом, предположение (199) неверно и оптимальное управление  $U(t)$  определяется однозначно за исключением конечного числа точек.

Для решения задач на максимальное быстродействие часто полезно знать число точек, в которых наблюдается равенство (198), так как это число определяет количество переключений управляющих сигналов между максимальным и минимальным уровнями.

Пусть матрица  $A$  объекта имеет только вещественные (возможно, кратные) собственные числа, а уравнения  $u_j(t)$  доставляют минимум функционалу (192). Определим, сколько раз может обращаться в нуль функция  $\sum_{i=1}^n \psi_i(t)b_{ij}$ .

Пусть  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$  – различные собственные числа матрицы  $A$  ( $r \leq n$  за счет того, что среди собственных чисел имеются кратные). Тогда матрица  $-A^T$ , входящая в уравнение (184), имеет собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , где  $\lambda_v = -\rho_v$ ,  $v = 1 \dots r$ . Таким образом, собственные числа матрицы  $-A^T$  также являются вещественными. Обозначим кратность собственного числа  $\lambda_v$  как  $\rho_v$ . Очевидно, что  $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_r = n$ .

Каждая функция  $\psi_i(t)$ ,  $i = 1 \dots n$ , является решением системы однородных линейных дифференциальных уравнений (184), которое имеет вид

$$\psi_i(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + f_r(t)e^{\lambda_r t}. \quad (205)$$

Входящие в (205) функции  $f_v(t)$ ,  $v = 1 \dots r$  представляют собой многочлены, причем степень каждого многочлена определяется кратностью соответствующего собственного числа  $\lambda_v$  и не превышает  $\rho_v - 1$ .

Очевидно, что линейная комбинация  $\sum_{i=1}^n \psi_i(t)b_{ij}$  будет иметь вид, аналогичный (205):

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(t)b_{ij} = \sigma_1(t)e^{\lambda_1 t} + \sigma_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + \sigma_r(t)e^{\lambda_r t}, \quad (206)$$

где  $\sigma_v(t)$ ,  $v=1 \dots r$  – многочлены, имеющие ту же степень, что и многочлены  $f_v(t)$ .

Докажем следующее утверждение: выражение (206) может обращаться в нуль не более чем

$$(\rho_1 - 1) + (\rho_2 - 1) + \dots + (\rho_r - 1) + (r - 1) = n - 1$$

раз.

В случае, если  $r = 1$ , утверждение справедливо, так как функция

$\sigma_1(t)e^{\lambda_1 t}$  обращается в нуль в точках, в которых обращается в нуль многочлен  $\sigma_1(t)$ , и, следовательно, имеет не более  $\rho_1 - 1$  нулей, а кроме того, в данном случае  $n = \rho_1$ .

Предположим, что утверждение справедливо, когда число слагаемых в (206) меньше  $r$ . Покажем, что оно справедливо и при  $r$  слагаемых. Это позволит нам, исходя из справедливости утверждения при  $r = 1$ , доказать его справедливость для случая  $r = 2$  и далее для любого  $r$ .

Предположим, что при  $r$  слагаемых наше утверждение неверно и функция (206) имеет, по крайней мере,  $(\rho_1 - 1) + (\rho_2 - 1) + \dots + (\rho_r - 1) + r$  нулей. Умножим (206) на  $e^{-\lambda_r t}$ , что не изменит ее нулей. В результате получим функцию

$$\sigma_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_r)t} + \sigma_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_r)t} + \dots + \sigma_{r-1}(t)e^{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)t} + \sigma_r(t). \quad (207)$$

Продифференцировав (207)  $\rho_r$  раз, получим

$$g_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_r)t} + g_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_r)t} + \dots + g_{r-1}(t)e^{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)t}, \quad (208)$$

где  $g_v(t)$  – многочлены, имеющие ту же степень, что и многочлены  $\sigma_v(t)$ .

Поскольку между двумя нулями функции лежит, по крайней мере, один нуль ее производной, то при каждом дифференцировании может «теряться» не более одного нуля, т.е. функция (208) имеет не менее

$$\begin{aligned} (\rho_1 - 1) + (\rho_2 - 1) + \dots + (\rho_r - 1) + r - \rho_r = \\ = (\rho_1 - 1) + (\rho_2 - 1) + \dots + (\rho_{r-1} - 1) + r - 1 \end{aligned}$$

нулей. Но функция (208) имеет  $r - 1$  слагаемых, числа  $(\lambda_i - \lambda_r)$  – различны. По ранее сделанному предположению, для него справедливо наше утверждение и она должна иметь не более чем  $(\rho_1 - 1) + (\rho_2 - 1) + \dots + (\rho_{r-1} - 1) + r - 2$  нулей. Полученное противоречие доказывает, что если наше утверждение справедливо для  $r - 1$  слагаемых, то оно справедливо и для  $r$  слагаемых. Далее: поскольку оно справедливо для одного слагаемого, оно справедливо для двух, трех и так далее для любого  $r$ .

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы:

*Если матрица состояния  $A$  линейного объекта имеет только вещественные собственные числа, а управления  $u_j, j = 1 \dots m$  удовлетворяет принципу максимума и доставляет минимум функционалу  $J = \int_{t_0}^{t_k} dt$ , то каждое из управлений  $u_j$  является кусочно-постоянной функцией, принимающей предельные значения  $u_{j,min}, u_{j,max}$ , и имеет не более  $n - 1$  переключений, где  $n$  порядок системы.*

Данная теорема называется *теоремой о числе переключений*, или *теоремой об  $n$  интервалах* (управления). Впервые она была доказана А.А. Фельдбаумом.

В заключение отметим, что если среди собственных чисел матрицы  $A$  объекта имеются комплексно-сопряженные пары, оптимальное управление также описывается кусочно-непрерывными функциями, число интервалов также конечно, но зависит от начального и конечного состояний объекта.

Ниже приведены примеры решения задач на максимальное быстродействие с помощью принципа максимума с применением теоремы об  $n$  интервалах.

Пример 6.

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u, \end{cases} \quad (209)$$

перевести из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  в состояние  $x_1(t_k) = 1, x_2(t_k) = 0$  за минимальное время при ограничении на управление

$$|u| \leq 1. \quad (210)$$

Функционал качества будет иметь вид

$$J = t_k = \int_0^{t_k} dt \rightarrow \min. \quad (211)$$

Полагая  $\psi_0 = -1$ , запишем гамильтониан:

$$H = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_2 + u). \quad (212)$$

Уравнения (187) в данном случае будут иметь вид:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (213)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + \psi_2. \quad (214)$$

Из уравнений (213), (214) получаем

$$\psi_1 = C = \text{const}, \quad (215)$$

$$\dot{\psi}_2 = -C + \psi_2. \quad (216)$$

Из (212) найдем условия максимума гамильтониана по управлению:

$$\begin{cases} u = u_{\max} = 1 & \text{при } \psi_2 > 0, \\ u = u_{\min} = -1 & \text{при } \psi_2 < 0. \end{cases} \quad (217)$$

При  $\psi_2 = 0$  управление не определено. Из (216) видно, что при любых значениях  $C$  и  $\psi_2(0)$  функция  $\psi_2(t)$  меняет знак не более одного раза. Таким образом, управление будет формироваться не более чем двумя интервалами постоянного значения, что согласно теореме об  $n$  интервалах подтверждает правильность нашего решения.

Подставив (217) в (212), определим функцию  $M(\Psi, X)$ :

$$M = -1 + Cx_2 + \psi_2(-x_2 + \text{sign}(\psi_2)). \quad (218)$$

Согласно принципу максимума на всем интервале управления функция  $M(\Psi, X)$  постоянна и равна нулю. Из физических соображений ясно, что в начальный момент времени управление должно быть положительным, так как в противном случае объект начнет удаляться от цели. Поэтому  $\psi_2(0) > 0$  и из (218) получим

$$M(0) = -1 + Cx_2(0) + \psi_2(0)(-x_2(0) + 1) = -1 + \psi_2(0) = 0, \quad (219)$$

откуда  $\psi_2(0) = 1$ .

Для определения константы  $C$  по уравнениям (209), (212), (213), (214) и (217) составим Simulink-модель системы (рис. 6). Модель предусматривает вычисление координат объекта и функции  $\psi_2(t)$ , а также значения гамильтониана  $H$  при заданном  $C$ . Остановка вычислений производится с помощью библиотечного блока Stop Simulation в момент, когда  $x_2$  изменяет знак с положительного на отрицательный (т.е. становится практически равной нулю). При этом фиксируется значение  $x_1(t_k)$ . Подбирая значение  $C$ , добиваемся выполнения условия:  $x_1(t_k) = 1$ . Отметим: чтобы функция  $\psi_2(t)$  меняла знак, что требуется для изменения знака управления, согласно (216) необходимо, чтобы  $C > \psi_2(0)$ .

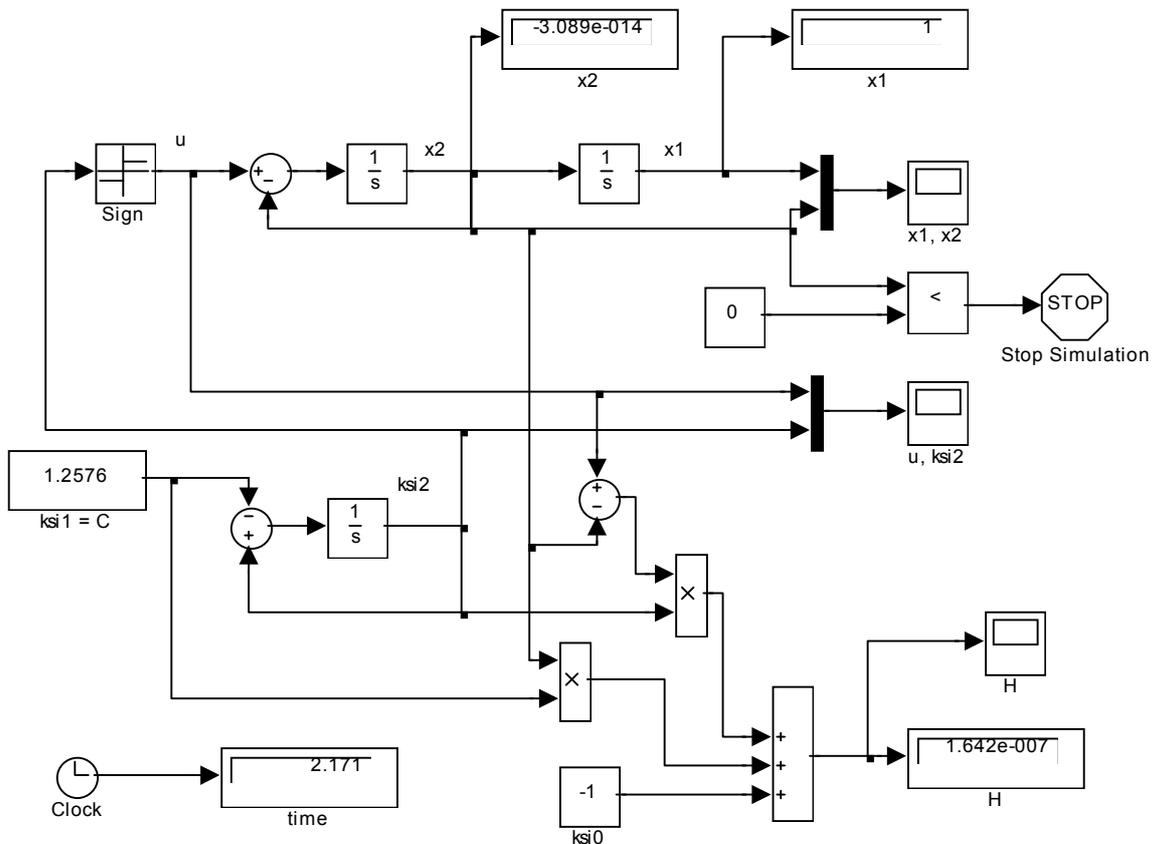


Рис. 6. Simulink-модель системы для определения постоянной  $C$

В результате моделирования найдено значение  $C = 1,2576$  и получены графики оптимальных траекторий и оптимального управления (рис. 7). Время процесса составило 2,171 сек. Из этого времени 1,586 сек. управление было положительным, 0,586 сек. – отрицательным.

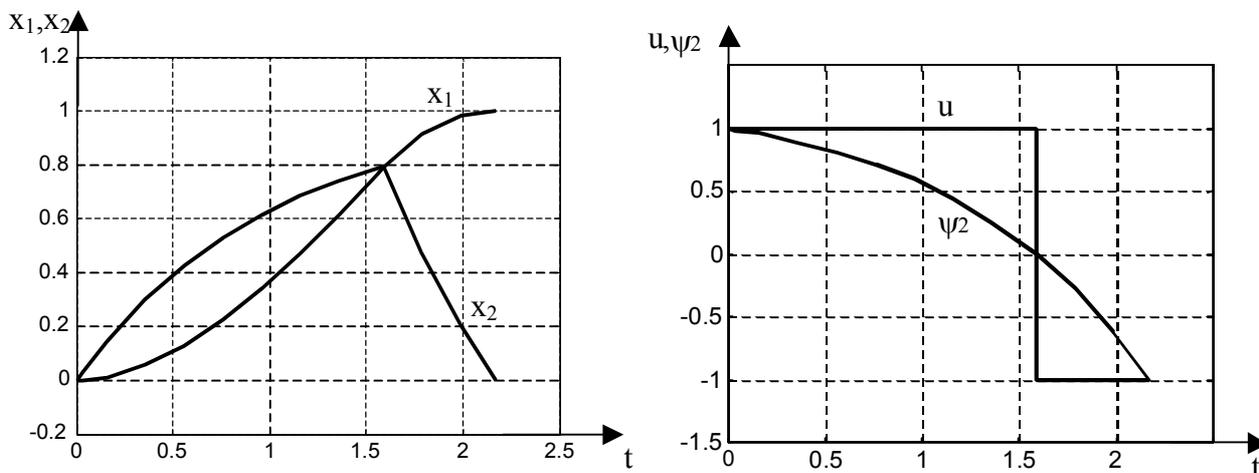


Рис. 7. Оптимальные траектории и оптимальное управление

### Пример 7

Требуется объект, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u, \end{cases} \quad (220)$$

перевести из любого начального состояния в состояние  $x_1(t_k) = x_2(t_k) = 0$  за минимальное время при ограничении на управление

$$|u| \leq 1. \quad (221)$$

Постановка задачи отличается от предыдущего примера только тем, что начальное состояние объекта может быть любым. Поэтому определить оптимальное управление в форме оптимальной программы в данном случае невозможно. Будем искать решение в форме оптимальной стратегии.

Согласно теореме об  $n$  интервалах оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией и принимает максимальные по модулю значения на всех интервалах управления. Объект управления имеет второй порядок, корни характеристического полинома системы  $(-1, 0)$  – вещественные, поэтому число интервалов управления равно двум.

Определим фазовые траектории объекта при  $u = 1$ .

Решение системы (220) в данном случае имеет вид:

$$x_2 = C_1 e^{-t} + 1, \quad (222)$$

$$x_1 = \int_0^t x_2(\tau) d\tau = -C_1 e^{-t} + t + C_2, \quad (223)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями:

$$C_1 = x_2(0) - 1, \quad (224)$$

$$C_2 = x_1(0) + C_1 = x_1(0) + x_2(0) - 1. \quad (225)$$

Из (222) находим

$$t = -\ln\left(\frac{x_2 - 1}{C_1}\right). \quad (226)$$

Величина  $(x_2 - 1)/C_1$ , стоящая под знаком логарифма, положительна (точнее, она лежит в пределах от 0 до 1). Следовательно, (226) можно записать в виде

$$t = -\ln\left|\frac{x_2 - 1}{C_1}\right| = -\ln|x_2 - 1| + \ln|C_1|. \quad (227)$$

Подставляя (227) в (223), получим

$$x_1 = -x_2 + 1 - \ln|x_2 - 1| + \ln|C_1| + C_2. \quad (228)$$

Обозначив

$$k_1 = 1 + \ln|C_1| + C_2 = \ln|x_2(0) - 1| + x_1(0) + x_2(0), \quad (229)$$

окончательно получим:

$$x_1 = k_1 - x_2 - \ln|x_2 - 1|. \quad (230)$$

Проведя аналогичные вычисления для случая  $u = -1$ , получим

$$x_2 = C_3 e^{-t} - 1, \quad (231)$$

$$x_1 = \int_0^t x_2(\tau) d\tau = -C_3 e^{-t} + t + C_4, \quad (232)$$

где

$$C_3 = x_2(0) + 1, \quad (233)$$

$$C_4 = x_1(0) + C_3 = x_1(0) + x_2(0) + 1. \quad (234)$$

И далее

$$x_1 = -x_2 - 1 + \ln|x_2 + 1| - \ln|C_3| + C_4. \quad (235)$$

Обозначив

$$k_2 = -1 - \ln|C_3| + C_4 = -\ln|x_2(0) + 1| + x_1(0) + x_2(0), \quad (236)$$

окончательно получим:

$$x_1 = k_2 - x_2 + \ln|x_2 + 1|. \quad (237)$$

На рис. 8 показаны фазовые траектории объекта при  $u = 1$ , построенные для  $k_1 = -1, -0,5, 0$ , и при  $u = -1$ , построенные для  $k_2 = 0, 0,5, 1$ .

Из рисунка видно, что при  $u = 1$   $x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow 1$ , при  $u = -1$   $x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow -1$ . Это следует непосредственно из (222),(223) и (231),(232).

При  $k_1 = 0$  и  $k_2 = 0$  фазовые траектории проходят через начало координат, т.е. через конечную точку процесса. Обозначим через  $\gamma^+$  участок фазовой траектории при  $u = 1, k_1 = 0$  до точки  $\{0,0\}$ , а через  $\gamma^-$  – участок фазовой траектории при  $u = -1, k_2 = 0$  до точки  $\{0,0\}$  (рис.8).

Очевидно, что на втором (заключительном) этапе процесса движение объекта должно происходить либо по линии  $\gamma^+$ , либо по линии  $\gamma^-$ , так как в противном случае объект не попадет в начало координат.

Выйти на линию  $\gamma^+$  объект может только справа (с помощью отрицательного управления), а на линию  $\gamma^-$  – только слева (с помощью положительного управления). Таким образом, линия  $\gamma = (\gamma^-, \gamma^+)$ , «объединяющая»  $\gamma^-$  и  $\gamma^+$ , делит фазовую плоскость на две зоны: слева от нее находится зона, в которой управление должно быть положительным, справа – зона, в которой управление должно быть отрицательным. Поэтому линия  $\gamma$  называется линией переключения.

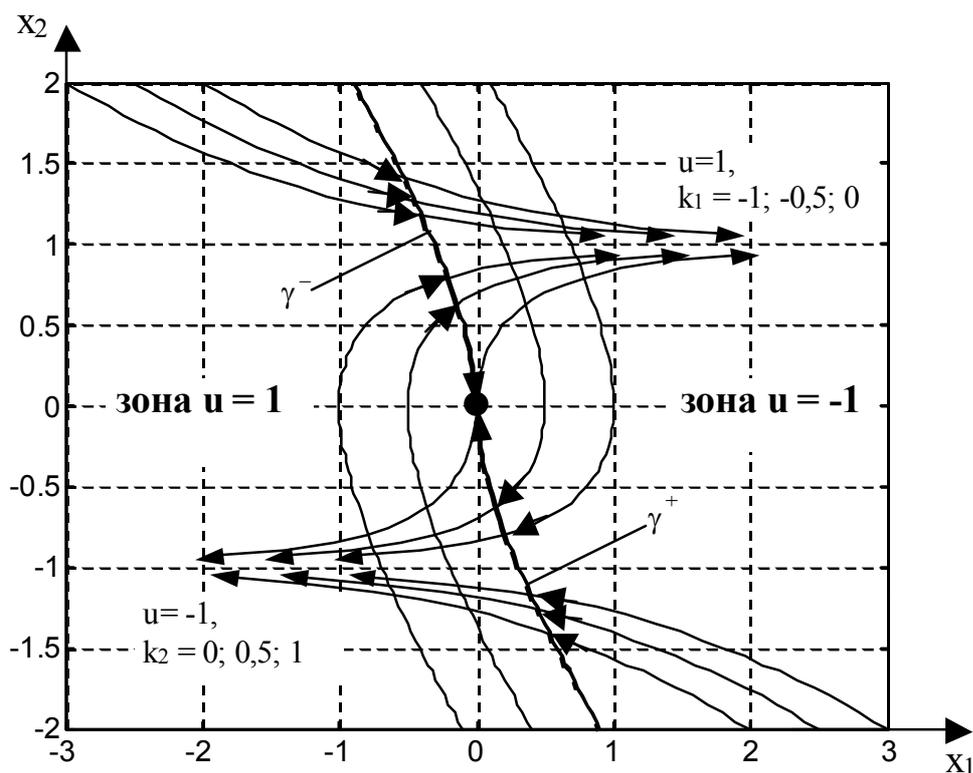


Рис. 8. Фазовые траектории объекта

Сформулируем полученные результаты. Для этого определим уравнение линии переключения. Это можно сделать, объединяя уравнения (230) и (237) при  $k_1 = 0$  и  $k_2 = 0$ :

$$x_1 = \begin{cases} -x_2 - \ln|x_2 - 1| & \text{при } x_2 < 0, \\ -x_2 + \ln|x_2 + 1| & \text{при } x_2 > 0, \end{cases} \quad (238)$$

или

$$x_1 = -x_2 + \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|. \quad (239)$$

Используя (239), запишем закон управления:

$$u = \begin{cases} 1 & \text{при } |x_1 + x_2 - \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|| < 0, \\ & x_1 + x_2 + \ln|x_2 - 1| = 0 \text{ и } x_2 < 0 \ (\gamma^+), \\ -1 & \text{при } |x_1 + x_2 - \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|| > 0, \\ & x_1 + x_2 - \ln|x_2 + 1| = 0 \text{ и } x_2 > 0 \ (\gamma^-). \end{cases} \quad (240)$$

Для упрощения закона управления исключим из (240) условия, касающиеся движения по траекториям  $\gamma^-$ ,  $\gamma^+$ . Это оправдано также тем, что точно реализовать контроль нахождения объекта на этих траекториях технически невозможно, так как для этого потребуются абсолютно точные измерения. Окончательно получим:

$$\begin{aligned} u &= -\text{sign}(x_1 + x_2 - \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|) = \\ &= \text{sign}(-x_1 - x_2 + \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|). \end{aligned} \quad (241)$$

Схема модели системы оптимального управления в Simulink, построенная по уравнениям (220), (241), показана на рис. 9. Фазовая траектория и графики переходного процесса при  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0,5$  приведены на рис. 10.

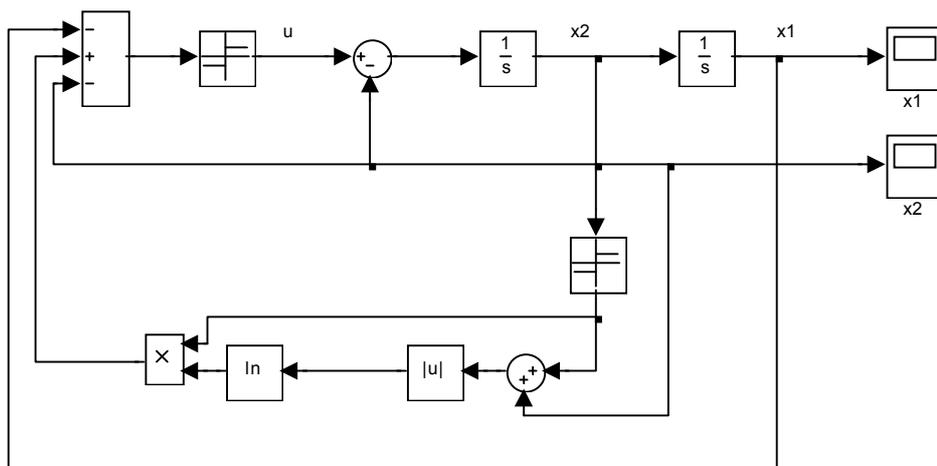


Рис. 9. Simulink-модель системы

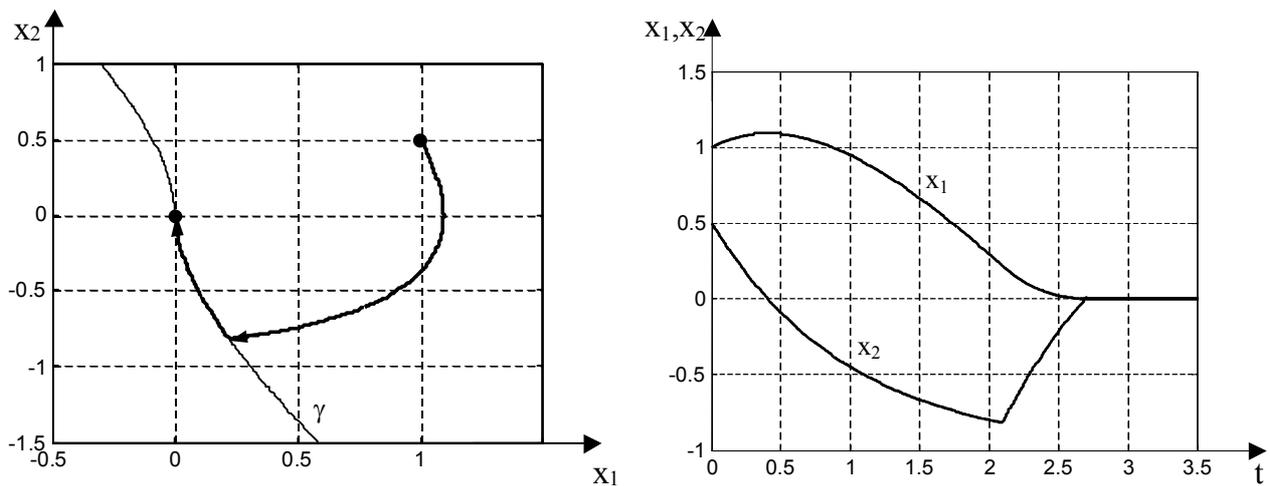


Рис. 10. Переходный процесс в системе

Далее рассмотрим, как полученные результаты могут быть использованы для построения оптимальной по быстродействию системы при задании конечной точки процесса вида  $x_1(t_k) = x_{1k} \neq 0$ ,  $x_2(t_k) = 0$ . В этом случае при нахождении линии переключения, очевидно, нужно принять  $k_1 = k_2 = x_{1k}$ . Тогда уравнение линии переключения и закон управления будут следующими:

$$x_1 = x_{1k} - x_2 + \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|, \quad (242)$$

$$u = \text{sign}(x_{1k} - x_1 - x_2 + \text{sign}(x_2) \ln|x_2 + \text{sign}(x_2)|). \quad (243)$$

Схема модели системы оптимального управления в Simulink, построенная по уравнениям (220), (243), показана на рис. 11. Фазовая траектория и графики переходного процесса при  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_{1k} = 1$  приведены на рис. 12.

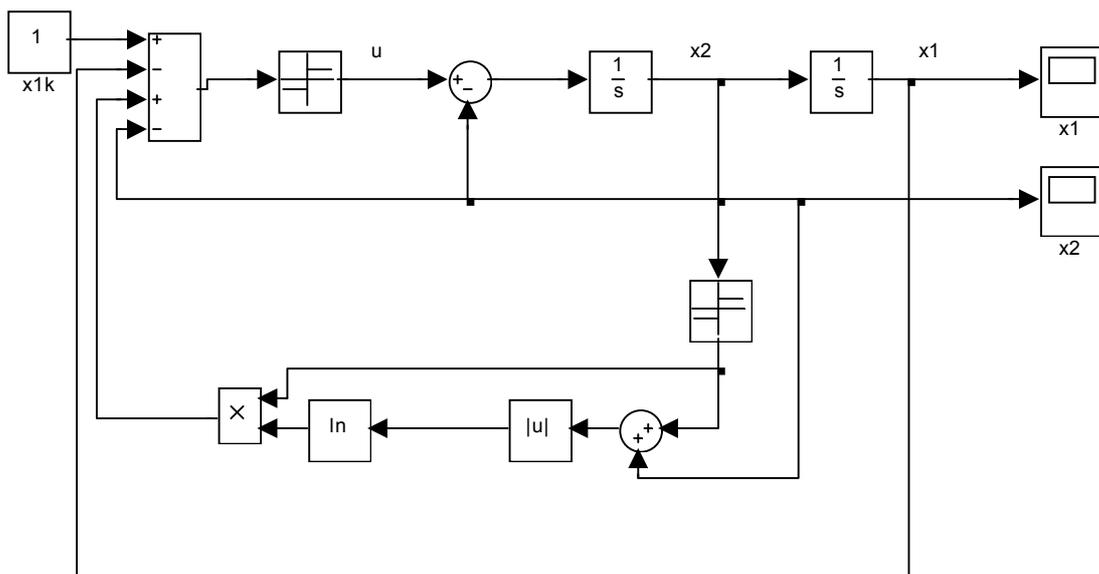


Рис. 11. Simulink-модель системы

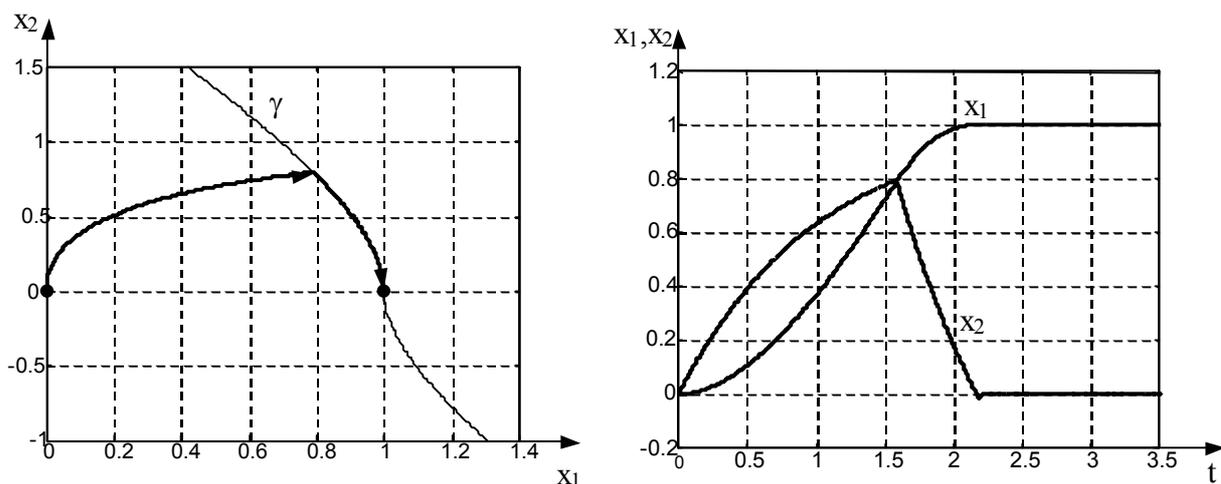


Рис. 12. Переходный процесс в системе

Как и следовало ожидать, решение задачи в данном случае полностью соответствует решению из примера 6.

### 3.3. Задания

Определить оптимальное управление в форме оптимальной программы, переводящее объект, описанный матрицами состояния  $A$  и управления  $B$ , из состояния  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$  в состояние  $x_1(t_k) = x_{1k}, x_2(t_k) = 0$  за минимальное время  $t_k$  с учетом ограничения на управление  $|u| \leq u_{\max}$  (см. пример 6).

Определить оптимальное управление в форме оптимальной стратегии, переводящее объект, описанный матрицами состояния  $A$  и управления  $B$ , из любого начального состояния в состояние  $x_1(t_k) = x_{1k}, x_2(t_k) = 0$  за минимальное время  $t_k$  с учетом ограничения на управление  $|u| \leq u_{\max}$  (см. пример 7).

Варианты:

$$1. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{1k} = 2, u_{\max} = 1;$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, x_{1k} = 1, u_{\max} = 1;$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{1k} = 5, u_{\max} = 4;$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, x_{1k} = 3, u_{\max} = 2;$$

$$5. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, x_{1k} = 1, u_{\max} = 6;$$

6.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 10$ ,  $u_{\max} = 0,5$ ;
7.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 25$ ,  $u_{\max} = 1$ ;
8.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 0,2$ ,  $u_{\max} = 0,1$ ;
9.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 10$ ,  $u_{\max} = 3$ ;
10.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 1$ ,  $u_{\max} = 4$ ;
11.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 12$ ,  $u_{\max} = 2$ ;
12.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 16$ ,  $u_{\max} = 0,5$ ;
13.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,25 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 0,8$ ,  $u_{\max} = 1$ ;
14.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 20$ ,  $u_{\max} = 4$ ;
15.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 3$ ,  $u_{\max} = 3$ ;
16.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1,6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,8 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 4,8$ ,  $u_{\max} = 3,2$ ;
17.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 0,3$ ,  $u_{\max} = 0,5$ ;
18.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,36 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 1$ ,  $u_{\max} = 2,4$ ;
19.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,08 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 1,5$ ,  $u_{\max} = 1$ ;
20.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -42 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{1k} = 5$ ,  $u_{\max} = 3$ ;

## 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

### 4.1. Метод динамического программирования

Метод динамического программирования предложен Беллманом в основном для оптимизации дискретных многошаговых процессов, однако применяется и для непрерывных систем.

В отличие от вариационного исчисления и принципа максимума, изначально направленных на отыскание оптимального управления в виде оптимальной программы, метод динамического программирования ориентирован на поиск оптимальной стратегии.

В основу метода положен следующий принцип *оптимальности Беллмана*:

*Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что независимо от того, каким было первоначальное состояние системы и первоначальное решение (управление), последующие решения (последующее управление) должны быть оптимальны относительно состояния, которое возникло после принятия первого решения.* Это означает, что оптимальная стратегия в любой момент времени определяется только тем состоянием, в котором находится система в этот момент.

Рассмотрим применение метода для непрерывных систем. Для простоты будем полагать управление скалярным. Пусть движение объекта определяется уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u, t), \quad i = 1 \dots n, \quad (244)$$

или в векторной форме:

$$\dot{X} = f(X, u, t). \quad (245)$$

Необходимо определить оптимальную стратегию  $u = u(X)$ , минимизирующую функционал

$$J = \int_0^{t_k} f_0(X(t), u(t)) dt, \quad (246)$$

с учетом граничного условия  $X(t_k) = X_k$ .

Согласно методу за начальное состояние объекта можно принять любое состояние  $X$ . При этом минимальное значение функционала и оптимальное управление, переводящее объект из состояния  $X$  в состояние  $X_k$ , однозначно определяются состоянием  $X$ . Обозначим минимальное значение функционала как  $S(X)$ , где  $S$  – неизвестная функция:

$$S(X) = \min_{u \in U} \int_0^{t_k} f_0(X(t), u(t)) dt, \quad (247)$$

где  $U$  – область допустимых управлений.

Отметим, что  $S(X_k) = 0$ , что непосредственно следует из (247).

Интеграл, входящий в (247), можно представить в виде

$$\int_0^{t_k} f_0(X(t), u(t)) dt = \int_0^{\Delta t} f_0(X(t), u(t)) dt + \int_{\Delta t}^{t_k} f_0(X(t), u(t)) dt. \quad (248)$$

Допустим, на интервале  $t = 0 \dots \Delta t$  управление было оптимальным. В дальнейшем управление должно выбираться, исходя из принципа оптимальности:

$$\int_{\Delta t}^{t_k} f_0(X(t), u(t)) dt = S(X(\Delta t)), \quad (249)$$

т.е. должно быть оптимально относительно состояния  $X(\Delta t)$ .

Так как траектория  $X(t)$  непрерывна, то при  $\Delta t \rightarrow 0$  справедливо следующее:

$$X(\Delta t) \rightarrow X + \dot{X}\Delta t = X + f(X, u)\Delta t, \quad (250)$$

$$\int_0^{\Delta t} f_0(X(t), u(t)) dt \rightarrow f_0(X, u)\Delta t, \quad (251)$$

где  $X, u$  – значения координат объекта и управления в начальный момент времени.

Подставим выражение (250) в (249). Результат совместно с (251) подставим в (248) и далее – в (246), (247):

$$J = f_0(X, u)\Delta t + S(X + f(X, u)\Delta t), \quad (252)$$

$$S(X) = \min_{u \in U} (f_0(X, u)\Delta t + S(X + f(X, u)\Delta t)). \quad (253)$$

Предположим, что  $S$  – непрерывно дифференцируемая по  $X$  функция, тогда при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$S(X + f(X, u)\Delta t) \rightarrow S(X) + \frac{\partial S}{\partial X} f(X, u)\Delta t, \quad (254)$$

где

$$\frac{\partial S}{\partial X} f(X, u) = \frac{\partial S}{\partial x_1} f_1(X, u) + \frac{\partial S}{\partial x_2} f_2(X, u) + \dots + \frac{\partial S}{\partial x_n} f_n(X, u). \quad (255)$$

Следовательно:

$$S(X) = \min_{u \in U} \left( f_0(X, u)\Delta t + S(X) + \frac{\partial S}{\partial X} f(X, u)\Delta t \right). \quad (256)$$

Из (256) получим

$$0 = \min_{u \in U} \left( f_0(X, u) \Delta t + \frac{\partial S}{\partial X} f(X, u) \Delta t \right). \quad (257)$$

Так как  $\Delta t \neq 0$ , окончательно запишем

$$0 = \min_{u \in U} \left( f_0(X, u) + \frac{\partial S}{\partial X} f(X, u) \right). \quad (258)$$

Уравнение (258) называется *функциональным уравнением Беллмана*. Оно связывает  $S(X)$  с функциями  $u(t)$  и  $X(t)$ , обеспечивающими минимум функционала (246). Его решение позволяет определить не только функцию  $S(X)$ , но и оптимальные траектории, и оптимальное управление.

### Пример 8.

Требуется объект управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u \end{cases} \quad (259)$$

перевести из любого начального состояния в состояние  $x_1(1) = x_2(1) = 0$  таким образом, чтобы обеспечить минимум функционала

$$J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt. \quad (260)$$

Конечное время  $t_k$  не фиксируется.

Функциональное уравнение Беллмана в данном случае имеет вид:

$$0 = \min_{u \in U} \left( x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} (-x_1 - 2x_2 + u) \right). \quad (261)$$

Так как на управление не наложено никаких ограничений, то для определения минимума продифференцируем правую часть уравнения по  $u$  и приравняем результат нулю:

$$2u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0, \quad (262)$$

откуда получим

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2}. \quad (263)$$

Подставляя (263) в (261), получим

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} \left( -x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (264)$$

После преобразования:

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial S}{\partial x_2} x_1 - 2 \frac{\partial S}{\partial x_2} x_2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 = 0. \quad (265)$$

Уравнение (265) – уравнение в частных производных, общего решения которого не существует. Будем искать частное решение в виде квадратичной формы

$$S(X) = C_1 x_1^2 + C_2 x_1 x_2 + C_3 x_2^2. \quad (266)$$

Напомним, что  $S(X)$  по сути есть минимальное значение функционала (260), по виду которого можно заключить, что  $S(X)$  должна быть неотрицательна при любых  $x_1, x_2$ .

Из (266) находим необходимые частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 2C_1 x_1 + C_2 x_2, \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = C_2 x_1 + 2C_3 x_2. \quad (267)$$

Подставляя (267) в (265), получим:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + 2C_1 x_1 x_2 + C_2 x_2^2 - C_2 x_1^2 - 2C_3 x_1 x_2 - \\ - 2C_2 x_1 x_2 - 4C_3 x_2^2 - \frac{1}{4} C_2^2 x_1^2 - C_2 C_3 x_1 x_2 - C_3^2 x_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (268)$$

Коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} 1 - C_2 - \frac{1}{4} C_2^2 = 0, \\ 1 + C_2 - 4C_3 - C_3^2 = 0, \\ 2C_1 - 2C_3 - 2C_2 - C_2 C_3 = 0. \end{cases} \quad (269)$$

Решая с помощью Matlab первое уравнение системы, получаем

```
C2 = roots([-0.25 -1 1])
```

```
c2 =
```

```
-4.8284  
0.8284
```

Из второго уравнения для  $C_2 = -4,8284$ :

```
C31 = roots([-1 -4 1+C2(1)])
```

```
c31 =
```

```
-2.4142  
-1.5858
```

Для  $C_2 = 0,8284$ :

```
C32 = roots([-1 -4 1+C2(2)])
```

```
C32 =
```

```
-4.4142
 0.4142
```

Для того чтобы квадратичная форма (266) была неотрицательно определенной, очевидно, что  $C_3$  должна быть неотрицательной величиной. Следовательно, из полученных решений следует выбрать вариант  $C_2 = 0,8284$ ,  $C_3 = 0,4142$ . Тогда из третьего уравнения системы (269) получим:

$$C_1 = C_3 + C_2 + \frac{1}{2}C_2C_3 = 1,4142. \quad (270)$$

С помощью (263) и (266) определим оптимальную стратегию

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}C_2x_1 - C_3x_2 = -0,4142x_1 - 0,4142x_2. \quad (271)$$

Структура системы оптимального управления показана на рис. 13.

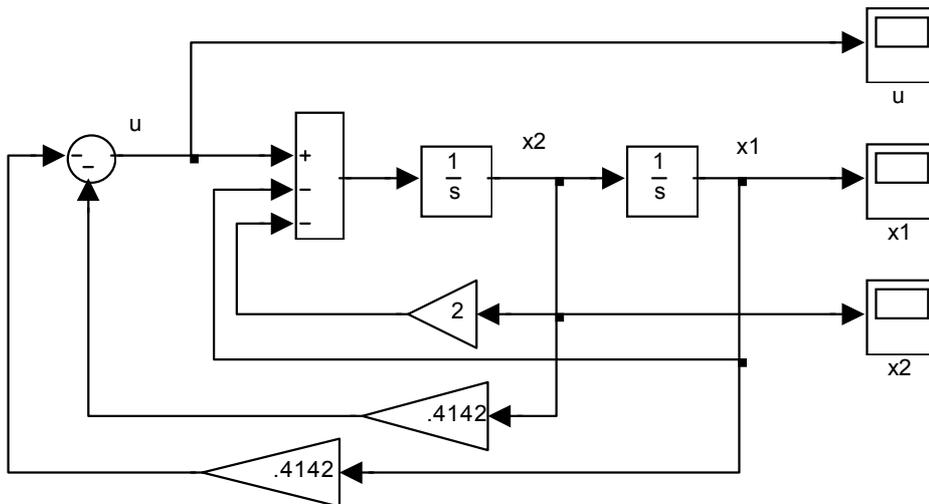


Рис. 13. Simulink-модель оптимальной системы

Графики оптимальных траектория и оптимального управления, рассчитанные для  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0,5$ , показаны на рис. 14.

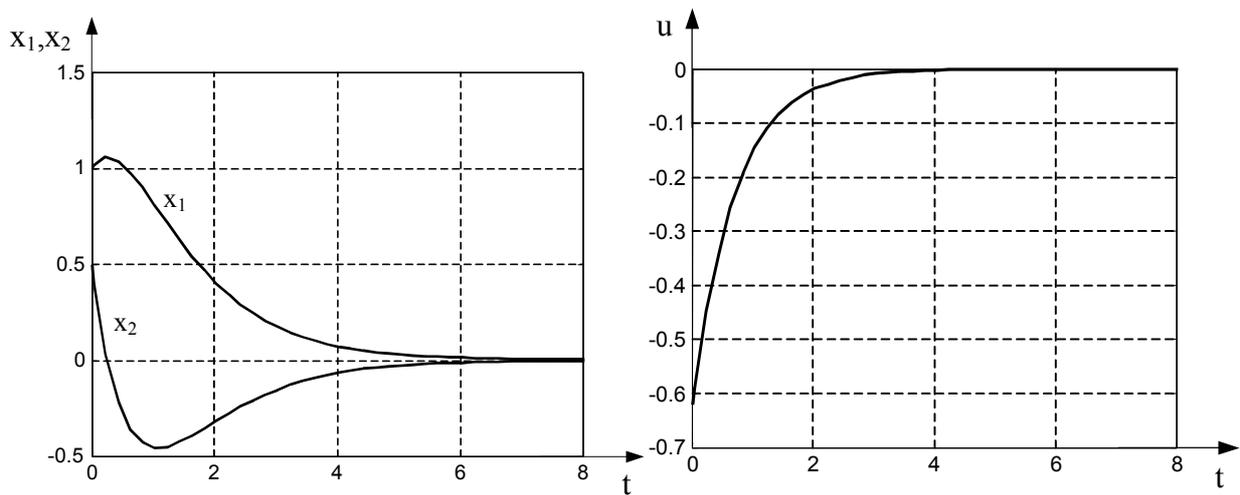


Рис. 14. Оптимальные траектории и оптимальное управление

#### 4.2. Задача об аналитическом конструировании регулятора

Задачей об аналитическом конструировании регулятора называется задача синтеза регулятора для линейного объекта, минимизирующего квадратичный критерий. К этому классу задач относится, в частности, рассмотренная в примере 8.

В общем случае постановка задачи следующая.

Имеется линейный объект управления

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (272)$$

где  $X$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $U$  –  $m$ -мерный вектор управляющих воздействий;  $A$ ,  $B$  – постоянные матрицы.

Требуется определить управление, минимизирующее функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt, \quad (273)$$

где  $Q$  и  $R$  – постоянные матрицы, имеющие размеры  $n \times n$  и  $m \times m$  соответственно. Матрица  $Q$  является неотрицательно определенной, т.е. для любого  $X \neq 0$   $X^T Q X \geq 0$ , матрица  $R$  – положительно определенной, т.е. для любого  $U \neq 0$   $U^T R U > 0$ .

С помощью матриц  $Q$  и  $R$  задаются соответствующие квадратичные формы. Так как любую квадратичную форму можно задать симметрической матрицей, будем считать матрицы  $Q$  и  $R$  симметрическими, т.е.  $Q = Q^T$ ,  $R = R^T$ . В соответствии с критерием Сильвестра, для того чтобы симметрическая матрица была положительно определенной, необходимо, чтобы все ее ведущие главные миноры (определители «вдоль» главной диагонали) были положительны. Указанное обстоятельство позволяет формировать матрицы  $Q$ ,  $R$  для решения задач.

На управление  $U$  не наложено никаких ограничений. На правый конец траектории условия также не накладываются. Однако очевидно, что функционал (273) может быть конечным только в том случае, если при  $t \rightarrow \infty$   $X \rightarrow 0$ .

Составим уравнение Беллмана:

$$0 = \min_U \left( \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T R U + \frac{\partial S}{\partial X} (A X + B U) \right). \quad (274)$$

Найдем уравнение, минимизирующее правую часть уравнения (274). Для этого продифференцируем ее по  $U$  и приравняем полученную производную нулю. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial U} [U^T R U] = 2 U^T R, \quad (275)$$

$$\frac{\partial}{\partial U} \left[ \frac{\partial}{\partial X} B U \right] = \frac{\partial}{\partial X} B, \quad (276)$$

в результате получим:

$$U^T R + \frac{\partial S}{\partial X} B = 0. \quad (277)$$

Из уравнения (277) находим, что

$$U = - \left( \frac{\partial S}{\partial X} B R^{-1} \right)^T. \quad (278)$$

Используя известное матричное тождество  $(CM)^T = M^T C^T$ , перепишем (278) в виде

$$U = - (R^{-1})^T B^T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T. \quad (279)$$

Так как  $R$  – симметрическая матрица, то  $(R^{-1})^T = R^{-1}$ , и поэтому можно записать

$$U = - R^{-1} B^T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T. \quad (280)$$

Управление (280) доставляет экстремум правой части (274). Определим вид экстремума, взяв вторую производную этого выражения по  $U$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial U^2} \left[ \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T R U + \frac{\partial S}{\partial X} (A X + B U) \right] = \frac{\partial}{\partial U} [U^T R] = R. \quad (281)$$

Поскольку  $R$  – положительно определенная матрица, правая часть уравнения (274) может иметь только минимум.

Подставив оптимальное управление (280) в (274), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial X} B R^{-1} R R^{-1} B^T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T + \\ + \frac{\partial S}{\partial X} \left( A X - B R^{-1} B^T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T \right) = 0, \end{aligned} \quad (282)$$

или

$$\frac{1}{2} X^T Q X - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial X} B R^{-1} B^T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T + \frac{\partial S}{\partial X} A X = 0. \quad (283)$$

Уравнение (283) представляет собой уравнение в частных производных относительно неизвестной функции  $S(X)$ . Будем искать его решение в виде положительно определенной квадратичной формы:

$$S(X) = \frac{1}{2} X^T P X, \quad (284)$$

где  $P = P^T > 0$  – симметрическая матрица.

Производная квадратичной формы:

$$\frac{\partial S}{\partial X} = X^T P. \quad (285)$$

Подставив (285) в (283), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} X^T Q X - \frac{1}{2} X^T P B R^{-1} B^T P^T X + X^T P A X = \\ = \frac{1}{2} X^T [Q - P B R^{-1} B^T P^T + 2 P A] X = 0. \end{aligned} \quad (286)$$

Рассмотрим выражение, стоящее в квадратных скобках (286). Матрица  $Q$  является симметрической. Покажем, что матрица  $P B R^{-1} B^T P^T$  также является симметрической. Действительно, в соответствии с матричным равенством  $(CM)^T = M^T C^T$  можно записать:

$$(P B R^{-1} B^T P^T)^T = (B^T P^T)^T (P B R^{-1})^T = P B (R^{-1})^T (P B)^T = P B R^{-1} B^T P^T. \quad (287)$$

Квадратичную форму  $X^T P A X$  также можно задать с помощью симметрической матрицы. Для этого представим ее в виде:

$$X^T P A X = X^T \left( \frac{1}{2} P A + \frac{1}{2} A^T P^T \right) X, \quad (288)$$

где  $\frac{1}{2} P A + \frac{1}{2} A^T P^T$  – симметрическая матрица.

Тогда (286) примет вид:

$$\frac{1}{2} X^T [Q - PBR^{-1}B^T P^T + PA + A^T P^T] X = 0. \quad (289)$$

Квадратичная форма, стоящая в левой части (289), может равняться нулю только в том случае, если ее матрица равняется нулю. Таким образом, получаем:

$$Q - PBR^{-1}B^T P^T + PA + A^T P^T = 0. \quad (290)$$

Уравнение (290) называется матричным уравнением Риккати. Оно позволяет определить искомую матрицу  $P$  и эквивалентно системе из  $n^2$  уравнений.

Матричное уравнение имеет не единственное решение. Из его решений необходимо выбрать такое, которое задает положительно определенную матрицу  $P$ . Эта матрица определяется однозначным образом и обеспечивает устойчивость системы управления.

Действительно, пусть  $P$  – положительно определенная матрица. В соответствии с (280) и (285) оптимальное управление задается равенством:

$$U = -R^{-1}B^T (X^T P)^T = -R^{-1}B^T P^T X. \quad (291)$$

По виду (291) можно заключить, что оптимальный регулятор является линейным. Определим устойчивость системы с помощью прямого метода Ляпунова. Для этого исследуем функцию (284).

В случае положительно определенной матрицы  $P$  эта функция является положительно определенной. Ее полная производная по времени, вычисленная в силу уравнений объекта с учетом (291), имеет вид:

$$\frac{d}{dt} S(X) = \frac{\partial S(X)}{\partial X} \frac{dX}{dt} = X^T P (AX + BU) = X^T PAX - X^T PBR^{-1}B^T P^T X. \quad (292)$$

Из уравнения (286) следует, что

$$X^T PAX = \frac{1}{2} X^T [PBR^{-1}B^T P^T - Q] X. \quad (293)$$

Подставив (293) в (292), получим

$$\frac{d}{dt} S(X) = -\frac{1}{2} X^T QX - \frac{1}{2} X^T PBR^{-1}B^T P^T X. \quad (294)$$

Из (291) получим:

$$U^T = -X^T PBR^{-1}. \quad (295)$$

Тогда, учитывая (291) и (295), (294) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} S(X) = -\frac{1}{2} X^T QX - \frac{1}{2} U^T R U. \quad (296)$$

Так как  $X^T Q X$  и  $U^T R U$  являются положительно определенными квадратичными формами,

$$\frac{d}{dt} S(X) < 0 \quad (297)$$

при всех  $X \neq 0$  и, следовательно, решение  $X = 0$  системы (272), (291) является асимптотически устойчивым.

Основную сложность при использовании метода аналитического конструирования регулятора составляет решение матричного уравнения Риккати. В настоящее время разработаны численные методы его решения. В частности, в пакете Control программы Matlab имеется функция `lqr`, решающая более общую по сравнению с рассмотренной выше задачу, в которой функционал задан в виде

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U + 2X^T N U) dt, \quad (298)$$

где  $N$  – некоторая постоянная матрица.

Функция `lqr` решает уравнение Риккати вида

$$Q - (PB + N)R^{-1}(B^T P + N^T) + PA + A^T P = 0, \quad (299)$$

а также вычисляет матрицу  $K$  и собственные числа матрицы состояний синтезированной системы  $A - BK$ .

Применяя простейший вариант функции `lqr` (без матрицы  $N$ ), решим задачу из примера:

$$\begin{aligned} A &= [0 \ 1; -1 \ -2]; \\ B &= [0; 1]; \\ Q &= [1 \ 0; 0 \ 1]; \\ R &= 1; \\ k &= \text{lqr}(A, B, Q, R) \\ k &= \end{aligned}$$

$$0.4142 \quad 0.4142$$

### 4.3. Задания

Определить оптимальное управление, переводящее объект, описанный матрицами состояния  $A$  и управления  $B$ , из любого начального состояния в начало координат  $x_1(t_k) = x_2(t_k) = 0$  таким образом, чтобы достигался минимум функционала  $J$ .

Решение проверить в Matlab с помощью функции `lqr`.

Варианты:

$$1. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \int_0^{t_k} (x_2^2 + u^2) dt;$$

2.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + u^2) dt$ ;
3.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 3x_2^2 + u^2) dt$ ;
4.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 2x_2^2 + 0,5u^2) dt$ ;
5.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & -1,5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (2x_1^2 + x_2^2 + 5u^2) dt$ ;
6.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 2x_2^2 + 2u^2) dt$ ;
7.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (2x_2^2 + u^2) dt$ ;
8.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 0,5u^2) dt$ ;
9.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -20 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 2x_2^2 + 3u^2) dt$ ;
10.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (3x_1^2 + 2x_2^2 + 4u^2) dt$ ;
11.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + x_2^2 + 2u^2) dt$ ;
12.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (x_1^2 + 2x_2^2 + 0,5u^2) dt$ ;
13.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (5x_1^2 + 2x_2^2 + 6u^2) dt$ ;
14.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (2x_1^2 + x_2^2 + 3u^2) dt$ ;
15.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \int_0^{t_k} (5x_1^2 + 10x_2^2 + 8u^2) dt$ ;

$$16. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \int_0^{t_K} (0,2x_1^2 + 0,3x_2^2 + u^2) dt;$$

$$17. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \int_0^{t_K} (2x_1^2 + x_2^2 + 0,3u^2) dt;$$

$$18. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \int_0^{t_K} (5x_1^2 + 4x_2^2 + 5u^2) dt;$$

$$19. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0,4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \int_0^{t_K} (x_2^2 + 0,8u^2) dt;$$

$$20. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & -0,7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \int_0^{t_K} (5,5x_1^2 + 3x_2^2 + 2,5u^2) dt.$$

## 5. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА: УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 5.1. Схема системы автоматического управления и ее математическое описание

В данной главе рассматривается система непрерывного автоматического регулирования угла поворота исполнительного вала электропривода с двигателем постоянного тока и преобразователем напряжения (рис.15). Система обеспечивает отработку заданного угла поворота исполнительного вала. Элементы схемы описаны ниже.

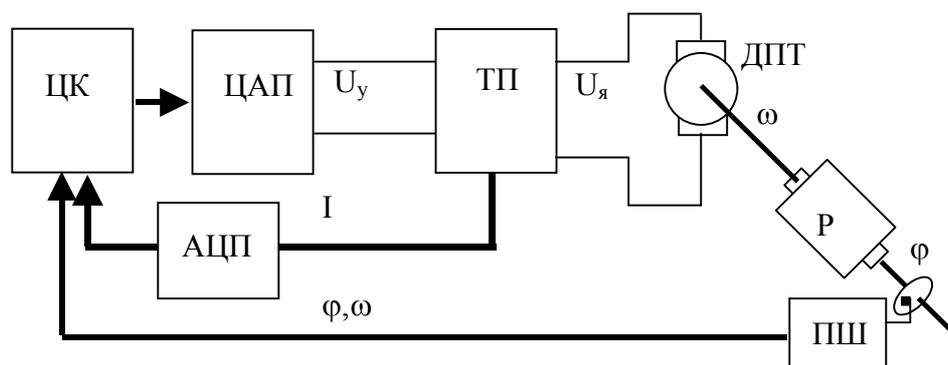


Рис. 15. Схема системы управления

ДПТ – двигатель постоянного тока с независимым возбуждением серии 2П. Параметры двигателя для всех вариантов приведены в п. 5.4. Суммарный приведенный к валу момент инерции принимается равным 120% от момента инерции вала двигателя.

ТП – тиристорный преобразователь (управляемый выпрямитель). Построен на базе двух трехфазных выпрямительных тиристорных мостов. Обеспечивает работу двигателя в четырех квадрантах (двигательный и генераторный режимы работы машины с вращением в обоих направлениях). Максимальное выпрямленное напряжение 514 В. Допускает внешнее задание выходного напряжения аналоговым сигналом  $-10...+10$  В. Кроме того, выдает аналоговый выходной сигнал пропорциональный выходному току (току якоря).

Для сглаживания пульсаций выходных напряжения и тока используется индуктивно-емкостный фильтр. Описывается дифференциальным уравнением первого порядка (апериодическое звено). Постоянная времени определяется вариантом. Коэффициент передачи определяется исходя из линейности регулировочной характеристики.

Р – редуктор. Передаточное число рассчитывается исходя из того, что при номинальной скорости двигателя максимальный угол поворота ( $320^\circ$ ) выходного вала  $\varphi_{\max}$  должен быть отработан за заданное время, определяемое вариантом.

ПШ – поворотный шифратор – высокоточный датчик абсолютного значения угла поворота выходного вала. Выдает цифровой сигнал.

ЦК – цифровой контроллер. Принимает сигналы датчиков поворота и тока якоря и формирует через ЦАП сигнал управления тиристорным преобразователем. Обладает высокой производительностью и может с достаточной точностью реализовать любые законы регулирования. Допускает локальное задание угла поворота оператором и внешнее задание через промышленную сеть.

ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь. Преобразует цифровой сигнал контроллера в сигнал напряжения постоянного тока от  $-10$  до  $+10$ В.

АЦП – аналого-цифровой преобразователь. Преобразует сигнал напряжения постоянного тока от  $-10$  до  $+10$ В в цифровой сигнал, подаваемый на контроллер.

Рассмотрим математическое описание элементов системы.

*Тиристорный преобразователь* в диапазоне изменения выходного напряжения  $-514\dots+514$ В описывается уравнением:

$$T_{\text{п}} \frac{dU_{\text{я}}}{dt} + U_{\text{я}} = k_{\text{п}} U_{\text{у}}, \quad (300)$$

где  $U_{\text{я}}$ ,  $U_{\text{у}}$  – напряжение якоря ДПТ и напряжение управления преобразователем;  $T_{\text{п}}$ ,  $k_{\text{п}}$  – постоянная времени и коэффициент передачи преобразователя.

Превышение напряжением максимального значения по модулю технически невозможно, так как этот максимум достигается при нулевом угле открытия силовых вентилях (тиристоров). Таким образом:

$$|U_{\text{я}}| \leq 514\text{В}. \quad (301)$$

Данное обстоятельство должно учитываться при построении системы управления.

*Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением* описывается системой дифференциальных уравнений [5]:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I - \frac{C_e\Phi}{L}\omega + \frac{1}{L}U_{\text{я}}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{C_e\Phi}{J}I - \frac{1}{J}M_c, \end{cases} \quad (302)$$

где  $I$ ,  $\omega$  – ток и угловая скорость вращения якоря;  $L$ ,  $R$  – индуктивность и активное сопротивление якорной цепи;  $\Phi$  – магнитный поток машины;  $C_e$  – конструктивный коэффициент двигателя;  $J$ ,  $M_c$  – суммарные приведенные к валу двигателя моменты инерции и сил сопротивления.

Величины  $C_e$  и  $\Phi$ , входящие в уравнения (302), неизвестны. Однако поскольку магнитный поток машины постоянен, произведение  $C_e\Phi$  можно заменить одним коэффициентом:

$$K_e = C_e\Phi. \quad (303)$$

Этот коэффициент находится из системы (301) при рассмотрении установившегося номинального режима работы двигателя:

$$\begin{cases} -\frac{R}{L} I_{\text{НОМ}} - \frac{K_e}{L} \omega_{\text{НОМ}} + \frac{1}{L} U_{\text{я,НОМ}} = 0, \\ \frac{K_e}{J} I_{\text{НОМ}} - \frac{1}{J} M_{\text{НОМ}} = 0, \end{cases} \quad (304)$$

где  $I_{\text{НОМ}}$  – номинальный ток двигателя, который определяется также при решении системы.

Важным с точки зрения будущего синтеза системы является то обстоятельство, что величины, описывающие состояние двигателя – ток и скорость в реальной системе должны быть искусственно ограничены по величине определенными предельными значениями.

Ток двигателя по условиям нормальной коммутации и неразрушения коллекторного узла во всех режимах не должен превышать по модулю трехкратного от номинального значения:

$$|I| \leq 3I_{\text{НОМ}}. \quad (305)$$

Скорость вращения вала в обоих направлениях не должна превышать 150% номинальной скорости по условию сохранения механической прочности:

$$|\omega| \leq 1,5\omega_{\text{НОМ}}. \quad (306)$$

*Редуктор* согласно принятым соглашениям преобразует скорость вращения вала двигателя в угол поворота исполнительного вала и поэтому описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{i} \omega, \quad (307)$$

где  $i$  – передаточное число редуктора.

Уравнения (300), (301), (302) и (306) совместно описывают объект управления. Управляющее устройство, реализуемое на цифровом контроллере, формирует управляющий сигнал  $U_y$  на основе задания по углу поворота, а также текущих значений этого угла, тока и скорости двигателя. При этом одной из функций системы является недопущение нарушения условий (305), (306).

Процесс отработки заданного угла поворота может быть оптимизирован по многим показателям, важнейшими из которых являются *время переходного процесса* и *потери энергии на процесс*. Первый показатель определяет быстродействие системы, второй – энергетическую эффективность привода. Если механизм, обслуживаемый системой, совершает циклическое движение (например, звено манипулятора), оба показателя в конечном итоге влияют на его максимальную производительность. Быстродействие задает возможную частоту включений привода по условию времени цикла отработки

заданного угла, а потери – возможную частоту включений по условиям нагрева двигателя. Поэтому при синтезе системы имеет смысл рассматривать комбинированный критерий, учитывающий как время процесса, так и потери энергии.

Для определения оптимального управления желательно иметь как можно более простое описание объекта. Анализируя уравнения (300), (302), (307) с учетом ограничений (301), (305), (306), можно сделать следующие выводы:

- 1) в общем случае объект не является линейным;
- 2) в линейном диапазоне функционирования, когда напряжение якоря, ток и скорость двигателя не достигают своих предельных значений, объект имеет четвертый порядок.

Принимая во внимание то обстоятельство, что оптимизация системы приносит ощутимые выгоды и имеет смысл только при отработке относительно больших начальных рассогласований, можно упростить описание объекта, пренебрегая его малыми инерционностями. Таковыми, очевидно, следует считать инерционность преобразователя напряжения (канал  $U_y \rightarrow U_j$ ) и электромагнитную инерционность двигателя ( $U_j \rightarrow I$ ). Поэтому будем полагать, что система управления способна «мгновенно» устанавливать требуемое значение тока якоря, а сам этот ток будем считать управляющим воздействием на объект. Помимо относительной малости соответствующих постоянных времени, такому допущению способствует наличие в составе системы управления внутреннего быстродействующего токового контура с воздействием на напряжение управления преобразователем  $U_y$ . Контур позволяет значительно увеличить скорость установки заданного тока двигателя, а его построение не вызывает особенных затруднений в техническом плане, учитывая, что сигнал по току уже заводится в контроллер, а максимальное выходное напряжение преобразователя более чем вдвое превосходит его номинальное значение и, следовательно, допустимая степень воздействия на ток достаточно велика.

Кроме того, будем считать приведенный к валу двигателя суммарный момент сил сопротивления равным нулю. Этому допущению способствует большое передаточное число редуктора.

С учетом сделанных допущений описание объекта примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = k_2 u, \end{cases} \quad (308)$$

$$|x_2| \leq x_{2\max}, \quad (309)$$

$$|u| \leq u_{\max}, \quad (310)$$

где  $x_1 = \varphi$ ;  $x_2 = \omega$ ;  $u = I$ ;  $k_1 = 1/i$ ;  $k_2 = K_e/J$ ;  $x_{2\max} = 1,5\omega_{\text{ном}}$ ;  $u_{\max} = 3I_{\text{ном}}$ .

## 5.2. Оптимизация системы по быстродействию

Рассмотрим задачу перевода системы (308) с учетом ограничений (309) и (310) из любого начального состояния в начало координат за минимальное

время. Необходимо найти такое управление, которое доставляло бы минимум функционалу

$$J = t_k = \int_0^{t_k} dt, \quad (311)$$

где  $t_k$  – время переходного процесса.

Поскольку постановка задачи содержит ограничения типа неравенств, для ее решения воспользуемся принципом максимума.

По уравнениям объекта составим гамильтониан:

$$H = -1 + \psi_1 k_1 x_2 + \psi_2 k_2 u. \quad (312)$$

Так как коэффициент  $k_2$  положителен, то при  $\psi_2 \neq 0$  максимум гамильтониану доставляет управление:

$$\begin{cases} u = u_{\max} & \text{при } \psi_2 > 0, \\ u = -u_{\max} & \text{при } \psi_2 < 0, \end{cases} \quad (313)$$

или то же самое в компактной форме

$$u = u_{\max} \operatorname{sign}(\psi_2). \quad (314)$$

Сопряженные уравнения:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (315)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -k_1 \psi_1. \quad (316)$$

Из (315), (316) получаем

$$\psi_1 = C_1, \quad (317)$$

$$\psi_2 = -k_1 C_1 t + C_2, \quad (318)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

При  $\psi_2 = 0$  управление не определено. Рассмотрим, какие значения оно может принимать в данном случае. Предположим, что функция  $\psi_2(t)$  равна нулю на некотором интервале времени. В течение этого интервала

$$H = -1 + \psi_1 k_1 x_2. \quad (319)$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (320)$$

$$\psi_1 = C_3 = \text{const}. \quad (321)$$

Поскольку функция  $\psi_1(t)$  непрерывна, то  $C_3 = C_1$ , т.е. функция  $\psi_1(t)$  постоянна в течение всего переходного процесса. Согласно принципу максимума при оптимальном управлении функция  $H(t)$  максимальна и равна нулю. Поэтому из (319) следует, что на интервале, когда  $\psi_2 = 0$ :

$$1) |x_2| = x_{2\max} = \text{const}, \quad (322)$$

$$2) |\psi_1| = \frac{1}{k_1 x_{2\max}}, \quad \text{sign}(\psi_1) = \text{sign}(x_2) \quad (323)$$

и в силу второго уравнения системы (308)

$$3) u = 0. \quad (324)$$

Кроме того, из постоянства  $\psi_1(t)$  следует, согласно (318), что функция  $\psi_2(t)$  может обращаться в нуль не более чем на одном интервале (рис.16).

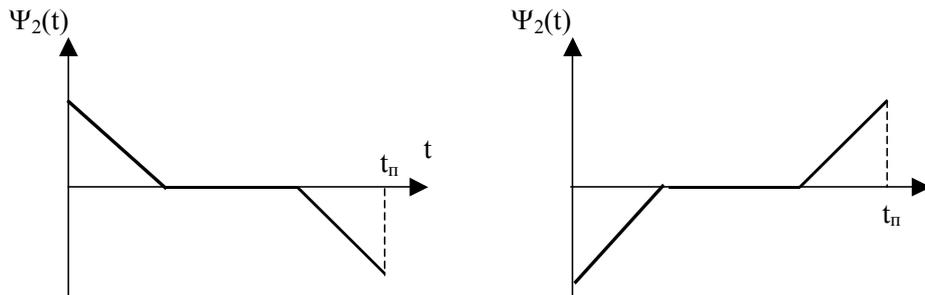


Рис. 16. Возможные графики зависимости  $\psi_2(t)$

Таким образом, установлено, что оптимальное управление может принимать три возможных значения:  $-u_{\max}$ ,  $0$ ,  $u_{\max}$ , и число интервалов его постоянного уровня не превышает трех. На последнем интервале управление должно принимать предельное значение, так как при  $u = 0$ ,  $|x_2| = x_{2\max}$  объект не сможет достигнуть начала координат.

Рассмотрим фазовые траектории объекта при всех возможных значениях управления.

При  $u = u_{\max}$  из (308) получим

$$x_2 = k_2 u_{\max} t + C_4, \quad (325)$$

$$x_1 = \frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} t^2 + k_1 C_4 t + C_5, \quad (326)$$

где  $C_4$ ,  $C_5$  – постоянные интегрирования, определяемые как начальные значения координат объекта на интервале.

Из (325) получим

$$t = \frac{x_2 - C_4}{k_2 u_{\max}}. \quad (327)$$

Подставим (327) в (326):

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} \left( \frac{x_2 - C_4}{k_2 u_{\max}} \right)^2 + k_1 C_4 \frac{x_2 - C_4}{k_2 u_{\max}} + C_5 = \\
&= \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2^2 - \frac{k_1 C_4^2}{2k_2 u_{\max}} + C_5 = \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2^2 + C_6.
\end{aligned} \tag{328}$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке  $x_1 = C_6$ .

Аналогично можно показать, что при  $u = -u_{\max}$

$$x_1 = -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2^2 + C_7. \tag{329}$$

При  $u = 0$  возможны два варианта движения системы:

$$1) \ x_2 = x_{2\max}, \quad x_1 = k_1 x_{2\max} t + C_8, \tag{330}$$

$$2) \ x_2 = -x_{2\max}, \quad x_1 = -k_1 x_{2\max} t + C_9. \tag{331}$$

На фазовой плоскости оба варианта представляются горизонтальными прямыми линиями, которые ограничивают область допустимых состояний объекта.

На рис. 17 показаны фазовые траектории объекта, рассчитанные при следующих значениях постоянных:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $x_{2\max} = 1$ ,  $u_{\max} = 1$ .

Постоянные интегрирования выбраны равными:

$$C_6 = -2, -1, 0 \text{ при } u = u_{\max},$$

$$C_7 = 0, 1, 2 \text{ при } u = -u_{\max}.$$

При  $C_6 = 0$  и  $C_7 = 0$  фазовые траектории проходят через начало координат, т.е. через конечную точку процесса. Обозначим через  $\gamma^+$  участок фазовой траектории при  $u = u_{\max}$ ,  $C_6 = 0$  до точки  $\{0,0\}$ , а через  $\gamma^-$  – участок фазовой траектории при  $u = -u_{\max}$ ,  $C_7 = 0$  до точки  $\{0,0\}$  (рис.17).

Очевидно, что на заключительном этапе процесса движение объекта должно происходить либо по линии  $\gamma^+$ , либо по линии  $\gamma^-$ , так как в противном случае объект не попадет в начало координат.

Выйти на линию  $\gamma^+$  объект может только справа (с помощью отрицательного или нулевого управления), а на линию  $\gamma^-$  – только слева (с помощью положительного или нулевого управления). Линия  $\gamma = (\gamma^-, \gamma^+)$ , «объединяющая»  $\gamma^-$  и  $\gamma^+$ , делит область допустимых состояний объекта на две зоны: слева находится зона, в которой управление должно быть положительным, справа – зона, в которой управление должно быть отрицательным. На линиях  $x_2 = x_{2\max}$  и  $x_2 = -x_{2\max}$  управление должно быть нулевым.

На рис. 17 также показана оптимальная траектория для начальных условий  $x_1(0) = -2$ ,  $x_2(0) = 0$  (кривая ABCO). Эта траектория включает участок положительного управления AB (разгон), участок нулевого управления BC (движение с постоянной скоростью) и участок отрицательного управления CO (торможение).

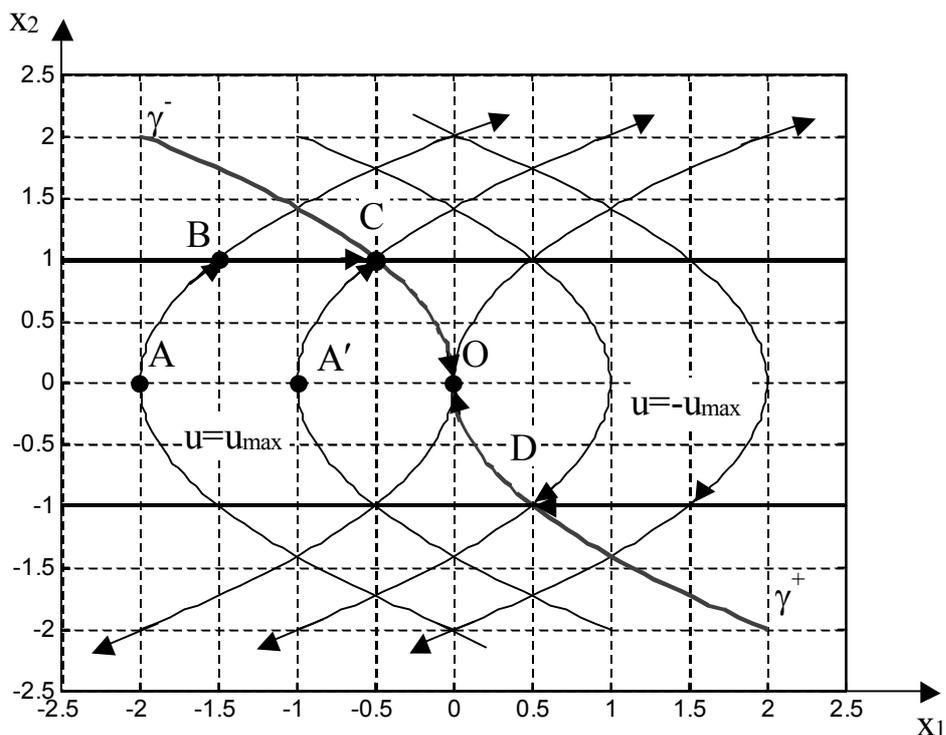


Рис. 17. Фазовые траектории объекта

Очевидно, что в общем случае число интервалов управления зависит от начального состояния объекта. Например, если смещать точку  $A$  вправо по оси  $x_1$ , длительность движения на участке нулевого управления будет уменьшаться. В предельном случае, когда процесс начинается с точки  $A'$ , эта длительность равна нулю (траектория  $A'CO$ ). При дальнейшем смещении начальной точки процесса к началу координат оптимальная траектория уже не будет содержать участка  $x_2 = x_{2\max}$ , а оптимальное управление – интервала  $u = 0$ . Наконец, в случае, когда начальная точка лежит на линии  $\gamma$ , оптимальная траектория состоит всего из одного участка.

Сформулируем полученные результаты, одновременно обобщив их для всех состояний объекта (включая и недопустимые состояния  $|x_2| > x_{2\max}$ ). Представление оптимального закона управления на фазовой плоскости показано на рис. 18. При его построении учитывалось, что управление должно «возвращать» объект в область допустимых состояний, если по каким-либо причинам последний его покинул.

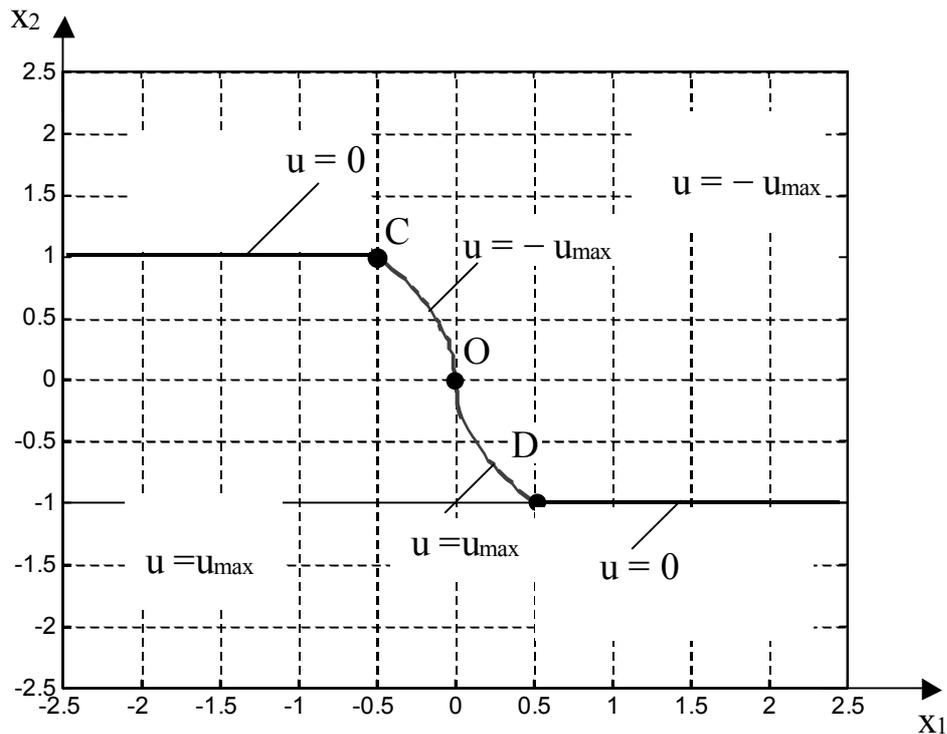


Рис. 18. Представление закона управления на фазовой плоскости

Составим алгоритм управления. Для этого определим уравнение линии  $\gamma$  и координаты точек C и D.

Уравнение линии  $\gamma$  найдем, объединяя уравнения (328) и (329) при  $C_6 = 0$  и  $C_7 = 0$ :

$$x_1 = \begin{cases} \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2^2 & \text{при } x_2 < 0, \\ -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2^2 & \text{при } x_2 > 0, \end{cases} \quad (332)$$

или

$$x_1 = -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2 |x_2|. \quad (333)$$

Координаты точки C:  $x_1 = -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2$ ,  $x_2 = x_{2\max}$ .

Координаты точки D:  $x_1 = \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2$ ,  $x_2 = -x_{2\max}$ .

Алгоритм управления будет следующим.

$$\text{Если } x_1 < -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2 :$$

$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{при } x_2 < x_{2\max}, \\ 0 & \text{при } x_2 = x_{2\max}, \\ -u_{\max} & \text{при } x_2 > x_{2\max}. \end{cases} \quad (334)$$

$$\text{Если } -\frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2 \leq x_1 \leq \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2 :$$

$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{при } x_1 + \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2 |x_2| < 0, \\ & x_1 + \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2 |x_2| = 0 \text{ и } x_2 < 0 \ (\gamma^+), \\ -u_{\max} & \text{при } x_1 + \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2 |x_2| > 0, \\ & x_1 + \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_2 |x_2| = 0 \text{ и } x_2 > 0 \ (\gamma^-). \end{cases} \quad (335)$$

$$\text{Если } x_1 > \frac{k_1}{2k_2 u_{\max}} x_{2\max}^2 :$$

$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{при } x_2 < -x_{2\max}, \\ 0 & \text{при } x_2 = x_{2\max}, \\ -u_{\max} & \text{при } x_2 > -x_{2\max}. \end{cases} \quad (336)$$

Для упрощения закона управления исключим из алгоритма условия, касающиеся движения по траекториям  $\gamma^-$ ,  $\gamma^+$  и  $|x_2| = x_{2\max}$ , и сделаем кривую, изображенную на рис. 18 линией переключения управления с  $u = u_{\max}$  на  $u = -u_{\max}$ . Это оправдано по нескольким причинам. Во-первых, упрощается алгоритм управления. Во-вторых, технически невозможно точно реализовать контроль нахождения объекта на исключенных траекториях. В-третьих, «свободное» движение объекта при  $u = 0$  на практике не будет проходить по линии  $|x_2| = x_{2\max}$  вследствие действия на объект неучтенных возмущений. Применительно к рассматриваемой задаче оптимального управления электроприводом это означает следующее: при нулевом токе якоря момент, развиваемый двигателем, также равен нулю и не компенсирует приведенного момента нагрузки. В результате привод получает некоторое ускорение. В зависимости от знака приведенного момента изображающая точка вновь попадает либо в зону  $u = u_{\max}$ , либо в зону  $u = -u_{\max}$ . Таким образом, реализовать вариант управления  $u = 0$  не имеет смысла.

Схема модели системы оптимального управления в Simulink показана на рис. 19.

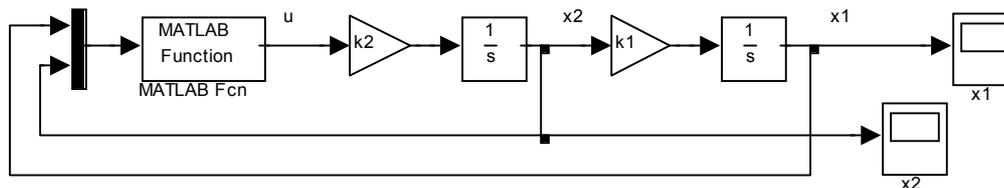


Рис.19. Модель оптимальной системы в Simulink

Модель содержит блок Matlab Fcn, вызывающий внешнюю функцию Matlab, которая в нашем случае реализует упрощенный алгоритм оптимального управления.

Эта функция помещена в отдельный файл, имя которого заносится в блок Matlab Fcn, и содержит следующий код:

```
function u = fun(x)
global k1 k2 umax x2max
x1 = x(1);
x2 = x(2);
if x1 < -k1/(2*k2*umax)*x2max*x2max
    if x2 < x2max, u = umax;
    else u = -umax;
    end
elseif x1 <= k1/(2*k2*umax)*x2max*x2max
    if x1+ k1/(2*k2*umax)*x2*abs(x2) <= 0, u = umax;
    else u=-umax;
    end
else
    if x2 < -x2max, u = umax;
    else u = -umax;
    end
end
```

Для простоты понимания код функции не оптимизирован. Глобальные переменные  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $u_{\max}$ ,  $x_{2\max}$ , содержащие значения соответствующих постоянных, могут быть определены как в командной строке Matlab, так и в отдельном script-файле.

Графики переходного процесса и фазовая траектория при  $x_1(0) = -2$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $x_{2\max} = 1$ ,  $u_{\max} = 1$  приведены на рис. 20.

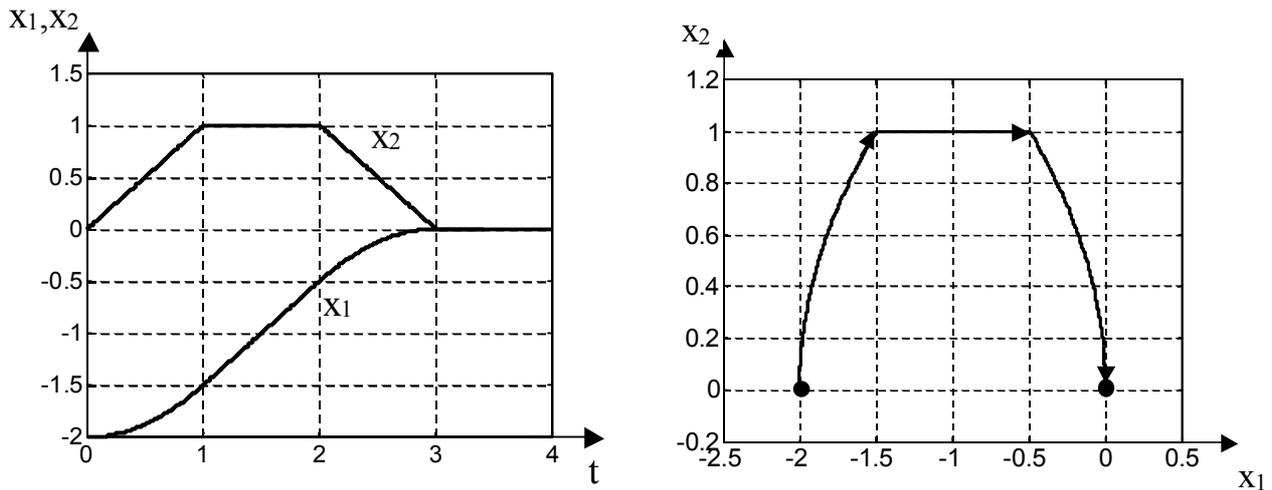


Рис. 20. Переходный процесс в системе

Подобно тому, как это сделано в примере 6, используем полученные результаты для построения оптимальной по быстродействию системы при задании конечной точки процесса вида  $x_1(t_k) = x_{1k} \neq 0$ ,  $x_2(t_k) = 0$ . Simulink-модель системы при этом подвергнется незначительной доработке (рис. 21).

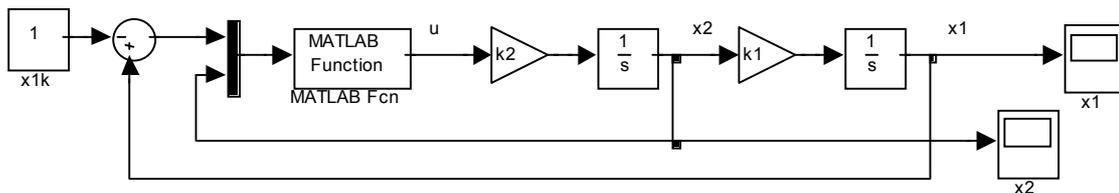


Рис.21. Модель оптимальной системы в Simulink

Анализируя построенную систему, приходим к выводу, что при всей относительной сложности алгоритма управления, по существу она относится к классу двухпозиционных релейных систем. Однако внутренняя реализация токового контура предполагает использование непрерывно изменяющегося выходного напряжения преобразователя. При работе привода на скоростях, меньших максимально допустимой, регулятор тока должен поддерживать максимальный по модулю ток якоря независимо от скорости. На участках ограничения скорости регулятор должен поддерживать неизменную максимальную скорость, и поэтому его уже следует считать регулятором скорости. Наша реализация такого регулятора с технической точки зрения не является наилучшей: поддержание скорости обеспечивается быстрыми переключениями максимально допустимых уровней тока. Очевидно, что для этого требуется быстрые переключения максимально допустимых уровней напряжения якоря. В таком случае большие нагрузки испытывают коллекторный узел двигателя и силовые ключи преобразователя напряжения. Кроме того, в двигателе и преобразователе выделяются необоснованно большие потери энергии.

Поэтому на участках движения с максимальной скоростью более рациональным представляется непрерывное ее регулирование с воздействием на напряжение якоря. Регулятор скорости может быть построен как обычный стабилизирующий регулятор, работающий по отклонению. В случае необходимости сигнал по току двигателя также можно использовать как дополнительный сигнал по возмущению с целью быстрой его компенсации.

### 5.3. Оптимизация системы по комбинированному критерию

Как уже было сказано, часто производительность обслуживаемого приводом механизма определяется не только быстродействием привода, но и потерями энергии, уходящими на нагрев двигателя и преобразователя в цикле работы. Поэтому в качестве критерия оптимизации системы может выступать минимум электрических потерь. Потери пропорциональны квадрату тока, поэтому минимизируемый функционал в наших обозначениях мог бы иметь вид:

$$J = \int_0^{t_k} u^2 dt. \quad (337)$$

Однако задача поиска управления для объекта (308), минимизирующего функционал (337), не имеет решения. Это можно строго доказать, но ограничимся здесь простыми соображениями.

Поскольку мы пренебрегли приведенным моментом сил сопротивления, движение с постоянной скоростью осуществляется при нулевом токе и не сопровождается выделением потерь. Поэтому потери на процесс тем меньше, чем меньше потери на участках разгона и торможения двигателя. Длительность этих участков можно свести к нулю, а максимальную скорость – к бесконечно малой величине. В итоге получаем, что наилучшим следует считать процесс с нулевыми потерями, занимающий бесконечное время.

Поэтому далее мы будем рассматривать комбинированный критерий, сочетающий как требования к быстродействию, так и требования к потерям:

$$J = \int_0^{t_k} (k_3 + u^2) dt. \quad (338)$$

Коэффициент  $k_3$ , входящий в функционал (338), есть весовой множитель, выражающий степень важности обеспечения быстродействия в общей структуре требований к процессу.

Составим гамильтониан:

$$H = -k_3 - u^2 + \psi_1 k_1 x_2 + \psi_2 k_2 u. \quad (339)$$

Применяя принцип максимума, проведем небольшое исследование с целью выяснить, какие значения может принимать оптимальное управление.

1. Если существуют участки оптимальной траектории объекта, на которых не вступают в действия ограничения и  $|x_2| < x_{2\max}$ ,  $|u| < u_{\max}$ , то для них

управление, доставляющее максимум гамильтониану, может быть найдено из условия:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi_2 k_2 = 0, \quad (340)$$

откуда

$$u = \frac{k_2}{2} \psi_2. \quad (341)$$

Сопряженные уравнения:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (342)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -k_1 \psi_1. \quad (343)$$

Из (342), (343) получаем

$$\psi_1 = C_1, \quad (344)$$

$$\psi_2 = -k_1 C_1 t + C_2, \quad (345)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Из (345) видно, что функция  $\psi_2(t)$  может обращаться в нуль. В момент, когда  $\psi_2 = 0$ , управление согласно (341) равно нулю. Обозначим значение координаты  $x_2$  в этот момент как  $v$ . Тогда функция Гамильтона примет вид

$$H = -k_3 + \psi_1 k_1 v. \quad (346)$$

Поскольку при оптимальном управлении  $H(t) = 0$ , из (346) получим

$$\psi_1 = C_1 = \frac{k_3}{k_1 v} = \text{const}. \quad (347)$$

2. Если существуют интервалы, на которых  $\frac{k_2}{2} \psi_2 > u_{\max}$  или  $\frac{k_2}{2} \psi_2 < -u_{\max}$ , то, очевидно, что максимум гамильтониану доставляют соответственно управления  $u = u_{\max}$  и  $u = -u_{\max}$ .

3. Если оптимальная траектория содержит интервалы, на которых вступает в силу ограничение по скорости объекта и  $x_2 = \pm x_{2\max}$ , тогда на данных интервалах в силу уравнений объекта (308)  $u(t) = 0$ . Функция Гамильтона принимает вид

$$H = -k_3 \pm \psi_1 k_1 x_{2\max} = 0. \quad (348)$$

Из (348) получим

$$\psi_1 = C_1 = \pm \frac{k_3}{k_1 x_{2\max}} = \text{const}, \quad \text{sign}(\Psi_1) = \text{sign}(x_2), \quad (349)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0, \quad (350)$$

откуда  $\psi_2 = \text{const}$ .

Функция  $\psi_2(t)$  непрерывна. Поэтому, сопрягая отрезки оптимальной траектории, приходим к выводу, что на рассматриваемом интервале  $\psi_2 = 0$ . Кроме того, из постоянства  $\psi_1(t)$  следует согласно (345), что функция  $\psi_2(t)$  может обращаться в нуль не более чем на одном интервале.

Выше установлено, что зависимость  $\psi_2(t)$  в общем случае имеет тот же вид, что и в предыдущей задаче. Однако оптимальное управление формируется по-другому и имеет участки, на которых оно изменяется непрерывно. Это затрудняет нахождение управления в форме оптимальной стратегии.

Рассмотрим задачу поиска оптимальной программы перемещения объекта из состояния  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = 0$  в состояние  $x_1(t_k) = x_{1k}$ ,  $x_2(t_k) = 0$ . Пусть для определенности  $x_{10} < x_{1k}$ . Тогда очевидно, что на начальном участке траектории участке управления должно быть положительным.

Принимая во внимание результаты проведенного ранее исследования, заключаем, что возможны четыре варианта оптимального управления в зависимости от того, вступают ли в силу ограничения на само управление и на значение координаты  $x_2$ .

**Вариант 1.** Никакие ограничения не вступают в силу (рис. 22).

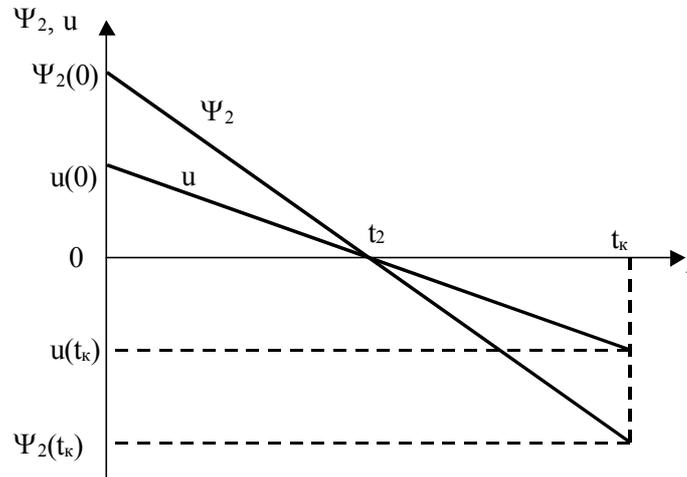


Рис. 22. Зависимости  $\psi_2(t)$  и  $u(t)$

Значение гамильтониана в начальный момент времени:

$$H(0) = -k_3 - u(0)^2 + \psi_2(0)k_2 u(0). \quad (351)$$

Если управление оптимально, функция Гамильтона равна нулю во время всего переходного процесса. Тогда из (351) получим:

$$\Psi_2(0) = \frac{k_3 + u(0)^2}{k_2 u(0)}. \quad (352)$$

Из (341) имеем

$$u(0) = \frac{k_2 \Psi_2(0)}{2}. \quad (353)$$

Отметим, что мы рассматриваем случай, когда  $u(0) < u_{\max}$ . Из (352) с учетом (341), (345) получим

$$C_2 = \frac{k_3 + k_2^2 C_2^2 / 4}{k_2^2 C_2 / 2}, \quad (354)$$

откуда

$$k_2^2 C_2^2 / 4 = k_3, \quad (355)$$

и далее

$$C_2 = \frac{2}{k_2} \sqrt{k_3}. \quad (356)$$

Начальное значение управления

$$u(0) = \frac{k_2 C_2}{2} = \sqrt{k_3}, \quad (357)$$

причем для данного варианта  $\sqrt{k_3} \leq u_{\max}$ .

Аналогично можно показать, что

$$\Psi_2(t_k) = -\frac{2}{k_2} \sqrt{k_3}, \quad (358)$$

$$u(t_k) = -\sqrt{k_3}. \quad (359)$$

Пусть в момент времени  $t = t_2$  координата  $x_2 = v \leq x_{2\max}$  (рис. 22). Тогда, учитывая (347):

$$\Psi_2(t) = -k_1 C_1 t + C_2 = -\frac{k_3}{v} t + \frac{2}{k_2} \sqrt{k_3}, \quad (360)$$

а управление формируется по закону

$$u(t) = \frac{k_2}{2} \Psi_2 = -\frac{k_2 k_3}{2v} t + \sqrt{k_3}. \quad (361)$$

Выразим величину  $t_k$  через  $v$  с помощью (359), (361):

$$t_k = \frac{4v}{k_2 \sqrt{k_3}}. \quad (362)$$

Из (308), (361) с учетом того, что  $x_2(0) = 0$ , находим

$$x_2(t) = \int_0^t k_2 u(\tau) d\tau = -\frac{k_2^2 k_3}{4v} t^2 + k_2 \sqrt{k_3} t. \quad (363)$$

Подставив (362) в (363), убеждаемся, что  $x_2(t_k) = 0$ .

Из (308), (363) определим зависимость

$$x_1(t) = \int_0^t k_1 x_2(\tau) d\tau = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12v} t^3 + \frac{k_1 k_2 \sqrt{k_3}}{2} t^2 + x_{10}. \quad (364)$$

Подставив (362) в (364), найдем  $v$  и  $t_k$ .

$$x_{1k} = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12v} \frac{64v^3}{k_2^3 k_3 \sqrt{k_3}} + \frac{k_1 k_2 \sqrt{k_3}}{2} \frac{16v^2}{k_2^2 k_3} + x_{10}, \quad (365)$$

или

$$x_{1k} = -\frac{16k_1 v^2}{3k_2 \sqrt{k_3}} + \frac{16k_1 v^2}{2k_2 \sqrt{k_3}} + x_{10} = \frac{16k_1 v^2}{6k_2 \sqrt{k_3}} + x_{10}, \quad (366)$$

откуда

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{6k_2 \sqrt{k_3}}{k_1} (x_{1k} - x_{10})}, \quad (367)$$

$$t_k = \frac{4v}{k_2 \sqrt{k_3}} = \sqrt{\frac{6}{k_1 k_2 \sqrt{k_3}} (x_{1k} - x_{10})}. \quad (368)$$

При этом  $v \leq x_{2 \max}$ .

Таким образом, условиями формирования оптимального управления по рассматриваемому варианту будут:

$$\sqrt{k_3} \leq u_{\max}, \quad (369)$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6k_2 \sqrt{k_3}}{k_1} (x_{1k} - x_{10})} \leq x_{2 \max}. \quad (370)$$

Пример оптимальной траектории и оптимального управления показан на рис. 23. Расчет проводился при следующих значениях величин:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 1$ ,  $x_{10} = 0$ ,  $x_{1k} = 1$ .

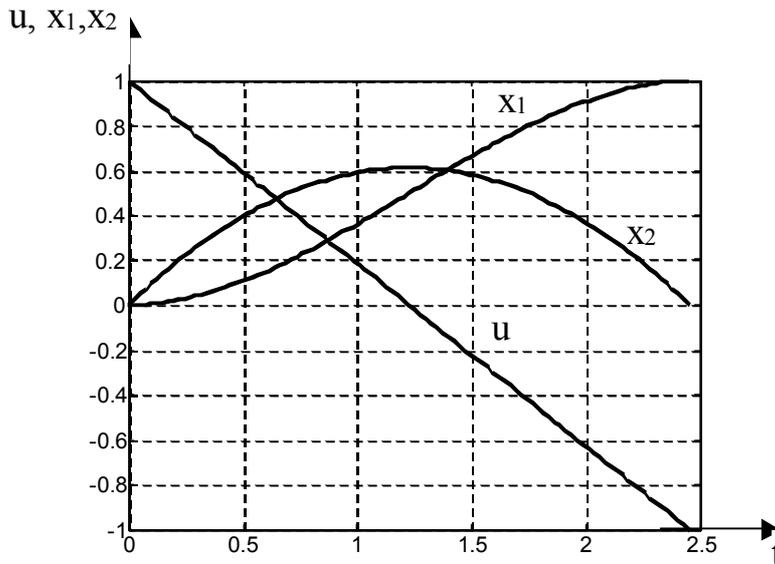


Рис. 23. Оптимальное управление и оптимальная траектория

**Вариант 2.** Величина  $x_2$  не достигает ограничения, управление ограничивается.

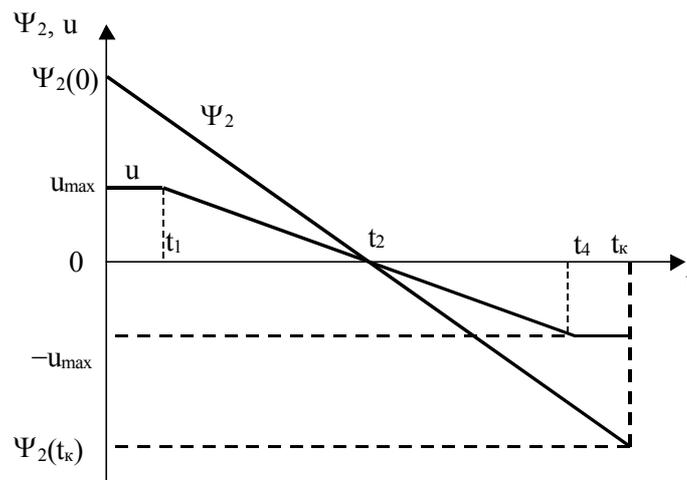


Рис. 24. Зависимости  $\psi_2(t)$  и  $u(t)$

На начальном участке траектории управление ограничено значением  $u_{\max}$ . Поэтому

$$H(0) = -k_3 - u(0)^2 + \psi_2(0)k_2u(0) = -k_3 - u_{\max}^2 + \Psi_2(0)k_2u_{\max} = 0, \quad (371)$$

откуда

$$\Psi_2(0) = C_2 = \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2u_{\max}}. \quad (372)$$

Аналогично можно показать, что

$$\Psi_2(t_k) = -\frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}}, \quad (373)$$

Пусть в момент времени  $t = t_2$  координата  $x_2 = v \leq x_{2\max}$ . Тогда, учитывая (347):

$$\psi_2 = -k_1 C_1 t + C_2 = -\frac{k_3}{v} t + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}}. \quad (374)$$

Нетрудно убедиться, что в случае  $\sqrt{k_3} = u_{\max}$  применение формул (360) и (374) дает один и тот же результат.

Определим функцию  $u(t)$ :

$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{при } |\psi_2| > \frac{2}{k_2} u_{\max}, \\ u(t) = \frac{k_2}{2} \psi_2(t) = -\frac{k_2 k_3}{2v} t + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{2u_{\max}} & \text{при } |\psi_2| < \frac{2}{k_2} u_{\max}. \end{cases} \quad (375)$$

Выразим моменты времени  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_4$  и  $t_k$  через  $v$ . Это можно сделать исходя из следующих условий:

$$\psi_2(t_1) = -\frac{k_3}{v} t_1 + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}} = \frac{2u_{\max}}{k_2}, \quad (376)$$

$$\psi_2(t_2) = -\frac{k_3}{v} t_2 + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}} = 0, \quad (377)$$

$$\psi_2(t_4) = -\frac{k_3}{v} t_4 + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}} = -\frac{2u_{\max}}{k_2}, \quad (378)$$

$$\psi_2(t_k) = -\frac{k_3}{v} t_k + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}} = -\frac{k_3 + u_{\max}^2}{k_2 u_{\max}}. \quad (379)$$

Из (376) – (379) получим:

$$t_1 = \frac{(k_3 - u_{\max}^2)v}{k_2 k_3 u_{\max}}, \quad (380)$$

$$t_2 = \frac{(k_3 + u_{\max}^2)v}{k_2 k_3 u_{\max}}, \quad (381)$$

$$t_4 = \frac{(k_3 + 3u_{\max}^2)v}{k_2 k_3 u_{\max}}, \quad (382)$$

$$t_k = \frac{2(k_3 + u_{\max}^2)v}{k_2 k_3 u_{\max}}. \quad (383)$$

Зависимости  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  на интервале  $t = 0 \dots t_1$  имеют вид:

$$x_2(t) = \int_0^t k_2 u(\tau) d\tau = k_2 u_{\max} t, \quad (384)$$

$$x_1(t) = \int_0^t k_1 x_2(\tau) d\tau = \frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} t^2 + x_{10}. \quad (385)$$

Подстановкой (380) в (384), (385) получим:

$$x_2(t_1) = \frac{(k_3 - u_{\max}^2)v}{k_3}, \quad (386)$$

$$x_1(t_1) = \frac{k_1(k_3 - u_{\max}^2)^2 v^2}{2k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}. \quad (387)$$

На интервале  $t = t_1 \dots t_4$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_{t_1}^t k_2 u(\tau) d\tau = \\ &= -\frac{k_2^2 k_3}{4v} (t^2 - t_1^2) + \frac{k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{2u_{\max}} (t - t_1) + x_2(t_1). \end{aligned} \quad (388)$$

Подставив (380), (386) в (388), после преобразований имеем:

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4v} t^2 + \frac{k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{2u_{\max}} t - \frac{(k_3 - u_{\max}^2)^2 v}{4k_3 u_{\max}^2}. \quad (389)$$

Подставив (381), (382) в (389), после преобразований получим:

$$x_2(t_2) = v, \quad (390)$$

$$x_2(t_4) = \frac{(k_3 - u_{\max}^2)v}{k_3}. \quad (391)$$

При  $\sqrt{k_3} = u_{\max}$  формула (389) аналогична формуле (363). Это подтверждает правильность наших построений.

$$x_1(t) = \int_{t_1}^t k_1 x_2(\tau) d\tau = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12v} (t^3 - t_1^3) + \frac{k_1 k_2 (k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}} (t^2 - t_1^2) - \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^2 v}{4k_3 u_{\max}^2} (t - t_1) + x_1(t_1). \quad (392)$$

Подставив (381), (387) в (392), после преобразований, имеем:

$$x_1(t) = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12v} t^3 + \frac{k_1 k_2 (k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}} t^2 - \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^2 v}{4k_3 u_{\max}^2} t + \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^3 v^2}{12k_2 k_3^2 u_{\max}^3} + x_{10}. \quad (393)$$

Подставив (381), (382) в (393), после преобразований найдем

$$x_1(t_2) = \frac{k_1 (3k_3^2 + 6k_3 u_{\max}^2 - u_{\max}^4) v^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}, \quad (394)$$

$$x_1(t_4) = \frac{k_1 (3k_3^2 + 18k_3 u_{\max}^2 - 5u_{\max}^4) v^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}. \quad (395)$$

Зависимости  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  на интервале  $t = t_4 \dots t_k$  имеют вид:

$$x_2(t) = \int_{t_4}^t k_2 u(\tau) d\tau = -k_2 u_{\max} (t - t_4) + x_2(t_4) = -k_2 u_{\max} t + \frac{2(k_3 + u_{\max}^2) v}{k_3}. \quad (396)$$

$$x_1(t) = \int_{t_4}^t k_1 x_2(\tau) d\tau = -\frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} (t^2 - t_4^2) + \frac{2k_1 (k_3 + u_{\max}^2) v}{k_3} (t - t_4) = -\frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} t^2 + \frac{2k_1 (k_3 + u_{\max}^2) v}{k_3} t + \frac{k_1 (-6k_3^2 - 12k_3 u_{\max}^2 - 14u_{\max}^4) v^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}. \quad (397)$$

Подставив (383) в (396), (397), получим:

$$x_2(t_k) = 0, \quad (398)$$

$$x_{1k} = \frac{k_1 (6k_3^2 + 12k_3 u_{\max}^2 - 2u_{\max}^4) v^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10} = 2(x_1(t_2) - x_{10}) + x_{10}, \quad (399)$$

что и следовало ожидать.

Из (399) определим  $v$  и далее, с помощью (383),  $t_k$ :

$$v = k_3 \sqrt{\frac{6k_2 u_{\max} (x_1(t_2) - x_{10})}{k_1 (6k_3^2 + 12k_3 u_{\max}^2 - 2u_{\max}^4)}}, \quad (400)$$

$$t_k = \frac{2(k_3 + u_{\max}^2)}{\sqrt{k_2 u_{\max}}} \sqrt{\frac{6(x_1(t_2) - x_{10})}{k_1 (6k_3^2 + 12k_3 u_{\max}^2 - 2u_{\max}^4)}}. \quad (401)$$

При  $\sqrt{k_3} = u_{\max}$  формулы (399), (400) и (401) становятся тождественными формулам (366), (367) и (368), что также подтверждает правильность наших построений.

Пример оптимальной траектории и оптимального управления показан на рис. 25. Расчет проводился при следующих значениях величин:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 1$ ,  $x_{10} = 0$ ,  $x_{1k} = 1$ ,  $u_{\max} = 0,5$ .

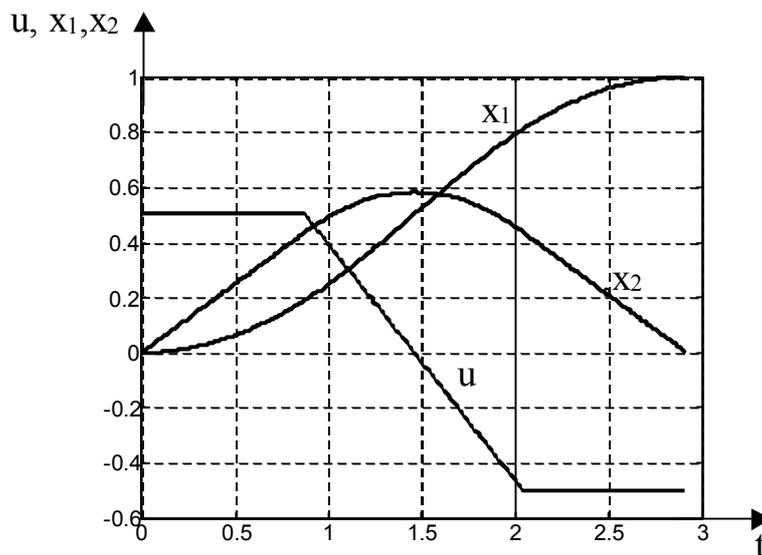


Рис. 25. Оптимальное управление и оптимальная траектория

**Вариант 3.** Ограничивается координата  $x_2$ , управление не достигает предельных значений (рис. 26). Как следует из проведенных ранее исследований, в данном случае:

$$\sqrt{k_3} \leq u_{\max}, \quad (402)$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6k_2 \sqrt{k_3}}{k_1}} (x_{1k} - x_{10}) > x_{2 \max}. \quad (403)$$

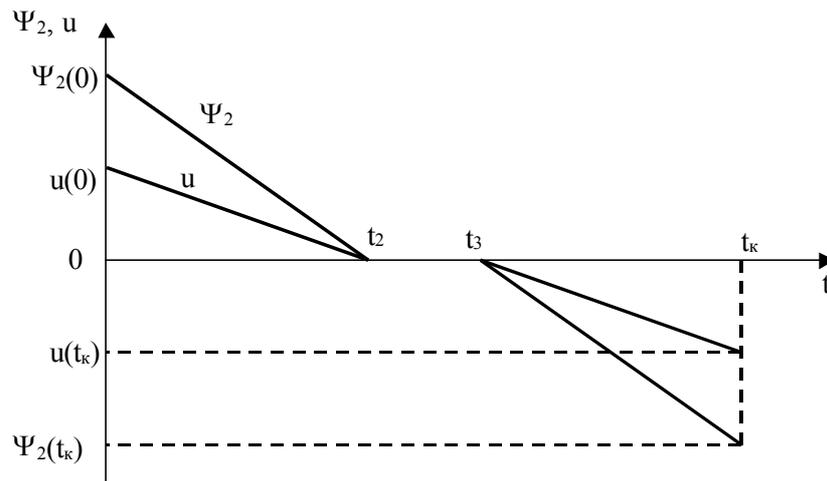


Рис. 26. Зависимости  $\psi_2(t)$  и  $u(t)$

Все необходимые выражения можно легко получить, используя результаты для первого случая (когда никакие ограничения не вступают в силу).

Функции  $u(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_1(t)$  на интервале  $t = 0 \dots t_2$  определим из (361), (363), (364), положив  $v = x_{2\max}$ :

$$u(t) = -\frac{k_2 k_3}{2x_{2\max}} t + \sqrt{k_3}, \quad (404)$$

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4x_{2\max}} t^2 + k_2 \sqrt{k_3} t, \quad (405)$$

$$x_1(t) = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}} t^3 + \frac{k_1 k_2 \sqrt{k_3}}{2} t^2 + x_{10}. \quad (406)$$

Момент времени  $t_2$  определим из условия  $u(t_2) = 0$ :

$$t_2 = \frac{2x_{2\max}}{k_2 \sqrt{k_3}}. \quad (407)$$

Подставив (407) в (406), получим

$$x_1(t_2) = \frac{4k_1 x_{2\max}^2}{3k_2 \sqrt{k_3}} + x_{10}. \quad (408)$$

На интервале  $t = t_2 \dots t_3$  движение системы определяется следующими выражениями:

$$\begin{cases} u(t) = 0, \\ x_2(t) = x_{2\max}, \\ x_1(t) = k_1 x_{2\max} (t - t_2) + x_1(t_2). \end{cases} \quad (409)$$

Необходимо определить время окончания данного интервала.

Из анализа уравнений объекта (308), а также рис. 25 следует, что перемещение объекта на участке торможения равно его перемещению на участке разгона:

$$x_{1к} - x_1(t_3) = x_1(t_2) - x_{10} = \frac{4k_1x_{2\max}^2}{3k_2\sqrt{k_3}}. \quad (410)$$

Отсюда следует, что перемещение на участке движения с постоянной скоростью

$$\begin{aligned} x_1(t_3) - x_1(t_2) &= (x_{1к} - x_{10}) - (x_{1к} - x_1(t_3)) - (x_1(t_2) - x_{10}) = \\ &= x_{1к} - x_{10} - \frac{8k_1x_{2\max}^2}{3k_2\sqrt{k_3}}. \end{aligned} \quad (411)$$

Из (411) определим

$$t_3 - t_2 = \frac{x_1(t_3) - x_1(t_2)}{k_1x_{2\max}} = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} - \frac{8x_{2\max}}{3k_2\sqrt{k_3}}, \quad (412)$$

откуда с учетом (407) получим

$$t_3 = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} - \frac{8x_{2\max}}{3k_2\sqrt{k_3}} + t_2 = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} - \frac{2x_{2\max}}{3k_2\sqrt{k_3}}. \quad (413)$$

С помощью (412) из (409) также определим

$$x_1(t_3) = k_1x_{2\max}(t_3 - t_2) + x_1(t_2) = x_{1к} - \frac{4k_1x_{2\max}^2}{3k_2\sqrt{k_3}}. \quad (414)$$

Выражение (414) показывает правильность предыдущих построений. Действительно, значение координаты  $x_1$  в момент времени  $t_3$  равно  $x_{1к}$  минус путь, пройденный объектом при торможении, который в свою очередь равен пути, пройденному им при разгоне (408).

Зная, что время пуска равно времени торможения, определим общее время переходного процесса:

$$t_k = t_2 + (t_3 - t_2) + (t_k - t_3) = 2t_2 + (t_3 - t_2) = t_2 + t_3. \quad (415)$$

Подставляя (407) и (413) в (415), получим

$$t_k = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} - \frac{2x_{2\max}}{3k_2\sqrt{k_3}} + \frac{2x_{2\max}}{k_2\sqrt{k_3}} = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} + \frac{4x_{2\max}}{3k_2\sqrt{k_3}}. \quad (416)$$

Формулы для оптимального управления и оптимальной траектории на интервале  $t = t_3 \dots t_k$  получим из (361), (363), (364) путем замены  $v = x_{2\max}$ , учитывая сдвиг по времени на величину  $t_3 - t_2$  и дополнительное приращение координаты  $x_1$  за время установившегося движения:

$$u(t) = -\frac{k_2 k_3}{2x_{2\max}}(t - (t_3 - t_2)) + \sqrt{k_3}, \quad (417)$$

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4x_{2\max}}(t - (t_3 - t_2))^2 + k_2 \sqrt{k_3}(t - (t_3 - t_2)), \quad (418)$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}}(t - (t_3 - t_2))^3 + \frac{k_1 k_2 \sqrt{k_3}}{2}(t - (t_3 - t_2))^2 + x_{10} + \\ &+ (x_1(t_3) - x_1(t_2)) = \\ &= -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}}(t - (t_3 - t_2))^3 + \frac{k_1 k_2 \sqrt{k_3}}{2}(t - (t_3 - t_2))^2 + x_{1k} - \frac{8k_1 x_{2\max}^2}{3k_2 \sqrt{k_3}}. \end{aligned} \quad (419)$$

Пример оптимальной траектории и оптимального управления показан на рис. 27. Расчет проводился при следующих значениях величин:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 1$ ,  $x_{10} = 0$ ,  $x_{1k} = 1$ ,  $x_{2\max} = 0,5$ .

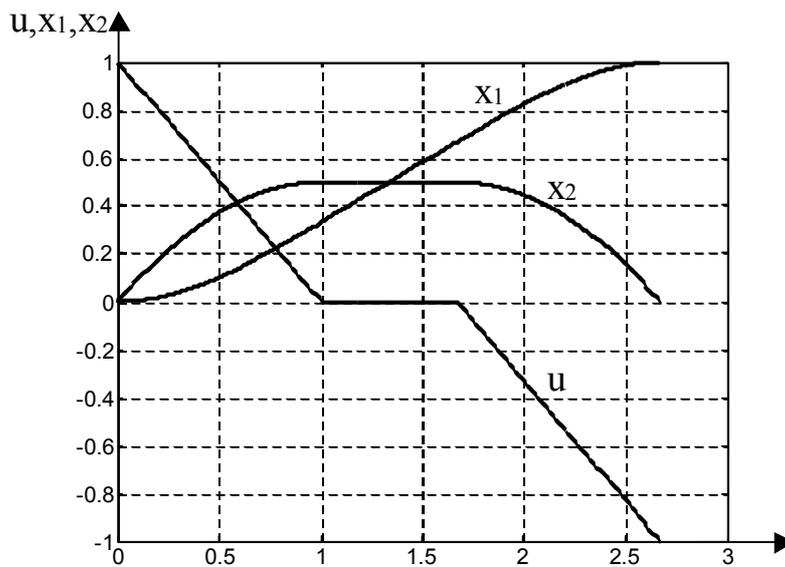


Рис. 27. Оптимальное управление и оптимальная траектория

**Вариант 4.** Ограничивается как координата  $x_2$ , так и управление (рис. 28). Из проведенных ранее исследований следует, что в данном случае

$$\sqrt{k_3} > u_{\max}, \quad (420)$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6k_2 \sqrt{k_3}}{k_1}} (x_{1k} - x_{10}) > x_{2\max}. \quad (421)$$

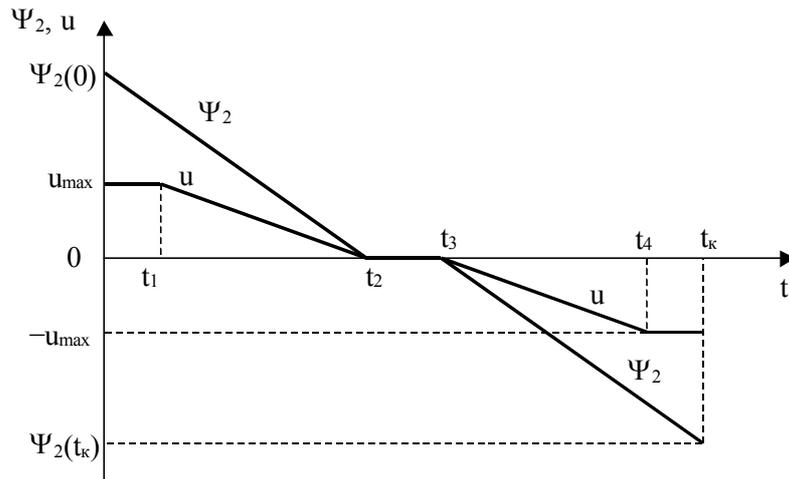


Рис. 28. Зависимости  $\psi_2(t)$  и  $u(t)$

Все необходимые выражения можно легко получить, используя результаты для второго варианта (когда ограничивается только управление).

Моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  определим из (380), (381) положив в них  $v = x_{2\max}$ :

$$t_1 = \frac{(k_3 - u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_2 k_3 u_{\max}}, \quad (422)$$

$$t_2 = \frac{(k_3 + u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_2 k_3 u_{\max}}. \quad (423)$$

Зависимости  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  на интервале  $t = 0 \dots t_1$  имеют вид:

$$x_2(t) = k_2 u_{\max} t, \quad (424)$$

$$x_1(t) = \frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} t^2 + x_{10}. \quad (425)$$

Подстановкой (422) в (424), (425) получим:

$$x_2(t_1) = k_2 u_{\max} t_1 = \frac{(k_3 - u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_3}, \quad (426)$$

$$x_1(t_1) = \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}^2}{2k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}. \quad (427)$$

На интервале  $t = t_1 \dots t_2$ :

$$u(t) = -\frac{k_2 k_3}{2x_{2\max}} t + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{2u_{\max}}, \quad (428)$$

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4x_{2\max}}(t^2 - t_1^2) + \frac{k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{2u_{\max}}(t - t_1) + x_2(t_1). \quad (429)$$

Подставив (422), (426) в (429), после преобразований получим:

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4x_{2\max}}t^2 + \frac{k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{2u_{\max}}t - \frac{(k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2}. \quad (430)$$

Подставив для проверки (423) в (430), после преобразований получим:

$$x_2(t_2) = x_{2\max}. \quad (431)$$

Определим зависимость  $x_1(t)$  на интервале:

$$x_1(t) = \int_{t_1}^t k_1 x_2(\tau) d\tau = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}}(t^3 - t_1^3) + \frac{k_1 k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}}(t^2 - t_1^2) - \frac{k_1(k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2}(t - t_1) + x_1(t_1). \quad (432)$$

Подставив (422), (427) в (432), после преобразований получим:

$$x_1(t) = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}}t^3 + \frac{k_1 k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}}t^2 - \frac{k_1(k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2}t + \frac{k_1(k_3 - u_{\max}^2)^3 x_{2\max}^2}{12k_2 k_3^2 u_{\max}^3} + x_{10}. \quad (433)$$

Подставив (423) в (433), найдем:

$$x_1(t_2) = \frac{k_1(3k_3^2 + 6k_3 u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}} + x_{10}. \quad (434)$$

На интервале  $t = t_2 \dots t_3$  движение системы определяется следующими выражениями:

$$\begin{cases} u(t) = 0, \\ x_2(t) = x_{2\max}, \\ x_1(t) = k_1 x_{2\max}(t - t_2) + x_1(t_2). \end{cases} \quad (435)$$

Необходимо найти время окончания данного интервала.

Из анализа уравнений объекта (308), а также рис. 28 следует, что перемещение объекта на участке торможения равно его перемещению на участке разгона:

$$x_{1к} - x_1(t_3) = x_1(t_2) - x_{10} = \frac{k_1(3k_3^2 + 6k_3 u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{6k_2 k_3^2 u_{\max}}. \quad (436)$$

Отсюда следует, что перемещение на участке движения с постоянной скоростью

$$\begin{aligned} x_1(t_3) - x_1(t_2) &= (x_{1к} - x_{10}) - (x_{1к} - x_1(t_3)) - (x_1(t_2) - x_{10}) = \\ &= x_{1к} - x_{10} - \frac{k_1(3k_3^2 + 6k_3u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{3k_2k_3^2u_{\max}}. \end{aligned} \quad (437)$$

Из (437) определим:

$$t_3 - t_2 = \frac{x_1(t_3) - x_1(t_2)}{k_1x_{2\max}} = \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} - \frac{(3k_3^2 + 6k_3u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_2k_3^2u_{\max}}, \quad (438)$$

откуда с учетом (423) получим:

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} - \frac{(3k_3^2 + 6k_3u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_2k_3^2u_{\max}} + t_2 \\ &= \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} + \frac{(-3k_3u_{\max}^2 + u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_2k_3^2u_{\max}}. \end{aligned} \quad (439)$$

С помощью (438) из третьего уравнения (435) также определим:

$$\begin{aligned} x_1(t_3) &= k_1x_{2\max}(t_3 - t_2) + x_1(t_2) = \\ &= x_{1к} - \frac{k_1(3k_3^2 + 6k_3u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{6k_2k_3^2u_{\max}}. \end{aligned} \quad (440)$$

Выражение (440) показывает правильность предыдущих построений. Действительно, значение координаты  $x_1$  в момент времени  $t_3$  равно  $x_{1к}$  минус путь, пройденный объектом при торможении, который в свою очередь равен пути, пройденному им при разгоне (434).

Зная, что время пуска равно времени торможения, определим общее время переходного процесса:

$$t_k = t_2 + (t_3 - t_2) + (t_k - t_3) = 2t_2 + (t_3 - t_2) = t_2 + t_3. \quad (441)$$

Подставляя (423) и (439) в (441), получим

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{(k_3 + u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_2k_3u_{\max}} + \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} - \frac{(3k_3u_{\max}^2 - u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_2k_3^2u_{\max}} = \\ &= \frac{x_{1к} - x_{10}}{k_1x_{2\max}} + \frac{(3k_3^2 + u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_2k_3^2u_{\max}}. \end{aligned} \quad (442)$$

Формулы для оптимального управления и оптимальной траектории на интервале  $t = t_3 \dots t_4$  получим из (375), (389), (393) путем замены  $v = x_{2\max}$ , учитывая сдвиг по времени на величину  $t_3 - t_2$  и дополнительное приращение координаты  $x_1$  за время установившегося движения:

$$u(t) = -\frac{k_2 k_3}{2x_{2\max}} (t - (t_3 - t_2)) + \frac{k_3 + u_{\max}^2}{2u_{\max}}, \quad (443)$$

$$x_2(t) = -\frac{k_2^2 k_3}{4x_{2\max}} (t - (t_3 - t_2))^2 + \frac{k_2(k_3 + u_{\max}^2)}{2u_{\max}} (t - (t_3 - t_2)) - \frac{(k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2}, \quad (444)$$

$$x_1(t) = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}} (t - (t_3 - t_2))^3 + \frac{k_1 k_2 (k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}} (t - (t_3 - t_2))^2 - \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2} (t - (t_3 - t_2)) + \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^3 x_{2\max}^2}{12k_2 k_3^2 u_{\max}^3} + x_{10} + x_1(t_3) - x_1(t_2). \quad (445)$$

Учитывая (434), (440), перепишем (445) следующим образом:

$$x_1(t) = -\frac{k_1 k_2^2 k_3}{12x_{2\max}} (t - (t_3 - t_2))^3 + \frac{k_1 k_2 (k_3 + u_{\max}^2)}{4u_{\max}} (t - (t_3 - t_2))^2 - \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^2 x_{2\max}}{4k_3 u_{\max}^2} (t - (t_3 - t_2)) + \frac{k_1 (k_3 - u_{\max}^2)^3 x_{2\max}^2}{12k_2 k_3^2 u_{\max}^3} + x_{1k} - \frac{k_1 (3k_3^2 + 6k_3 u_{\max}^2 - u_{\max}^4) x_{2\max}^2}{3k_2 k_3^2 u_{\max}}. \quad (446)$$

Момент времени  $t_4$  найдем с помощью (382), заменив  $v$  на  $x_{2\max}$  и добавив необходимый сдвиг по времени:

$$t_4 = \frac{(k_3 + 3u_{\max}^2) x_{2\max}}{k_2 k_3 u_{\max}} + t_3 - t_2, \quad (447)$$

откуда с учетом (438) получим:

$$t_4 = \frac{x_{1k} - x_{10}}{k_1 x_{2\max}} + \frac{(3k_3 u_{\max}^2 + u_{\max}^4) x_{2\max}}{3k_2 k_3^2 u_{\max}}. \quad (448)$$

Воспользовавшись (391), (395) найдем:

$$x_2(t_4) = \frac{(k_3 - u_{\max}^2) x_{2\max}}{k_3}, \quad (449)$$

$$\begin{aligned}
x_1(t_4) &= \frac{k_1(3k_3^2 + 18k_3u_{\max}^2 - 5u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{6k_2k_3^2u_{\max}} + x_{10} + x_1(t_3) - x_1(t_2) = \\
&= x_{1к} - \frac{k_1(3k_3^2 - 6k_3u_{\max}^2 + 3u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{6k_2k_3^2u_{\max}}.
\end{aligned} \tag{450}$$

На участке  $t = t_4 \dots t_k$

$$u = -u_{\max}, \tag{451}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \int_{t_4}^t k_2 u(\tau) d\tau = -k_2 u_{\max} (t - t_4) + x_2(t_4) = \\
&= -k_2 u_{\max} t + \frac{k_2 u_{\max} (x_{1к} - x_{10})}{k_1 x_{2\max}} + \frac{(3k_3^2 + u_{\max}^4)x_{2\max}}{3k_3^2}.
\end{aligned} \tag{452}$$

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= -\frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} (t - (t_3 - t_2))^2 + \frac{2k_1 (k_3 + u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_3} (t - (t_3 - t_2)) + \\
&+ \frac{k_1(-6k_3^2 - 12k_3u_{\max}^2 - 14u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{6k_2k_3^2u_{\max}} + x_{10} + x_1(t_3) - x_1(t_2).
\end{aligned} \tag{453}$$

Из (453) с учетом (437) получим:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= -\frac{k_1 k_2 u_{\max}}{2} (t - (t_3 - t_2))^2 + \frac{2k_1 (k_3 + u_{\max}^2)x_{2\max}}{k_3} (t - (t_3 - t_2)) + \\
&+ x_{1к} - \frac{2k_1 (k_3^2 + 2k_3 u_{\max}^2 + u_{\max}^4)x_{2\max}^2}{k_2 k_3^2 u_{\max}}.
\end{aligned} \tag{454}$$

Пример оптимальной траектории и оптимального управления показан на рис. 29. Расчет проводился при следующих значениях величин:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 1$ ,  $x_{10} = 0$ ,  $x_{1к} = 1$ ,  $u_{\max} = 0,5$ ,  $x_{2\max} = 0,5$ .

В заключение сделаем некоторые замечания относительно практической реализации оптимальной по комбинированному критерию системы управления.

1. Варианты 3 и 4 предусматривают движение с постоянной максимальной скоростью. По причинам, изложенным в п. 5.2, рациональная реализация таких режимов предполагает непрерывное регулирование скорости с воздействием на напряжение якоря.

2. При синтезе законов управления использовалось упрощенное описание объекта, не учитывающее малые инерционности и возмущения. Поэтому найденные оптимальные программы управления не в состоянии обеспечить удовлетворительную точность системы по углу поворота исполнительного вала. Для повышения точности следует предусмотреть переход системы в режим

непрерывного регулирования угла поворота по окончании оптимальной программы управления.

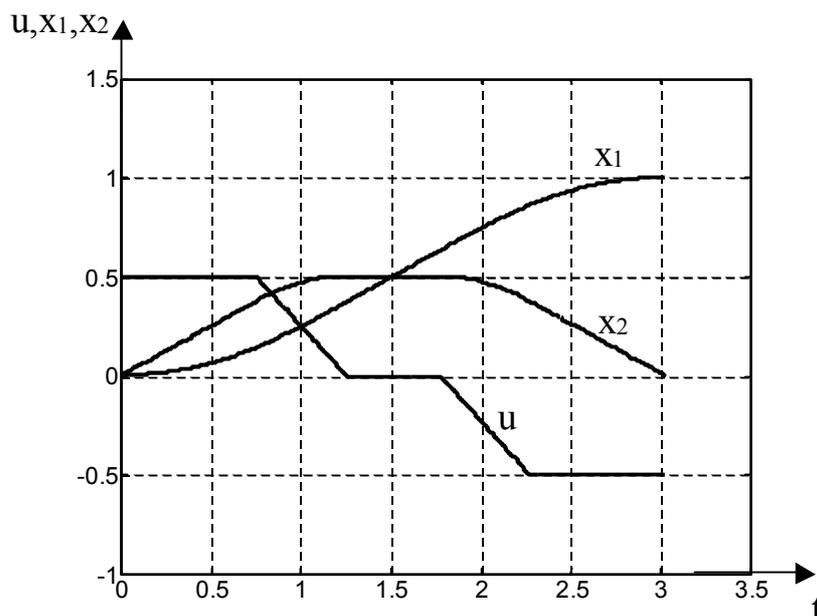


Рис. 29. Оптимальное управление и оптимальная траектория

#### 5.4. Задание

Данное задание может составлять часть задания на курсовой проект по курсу «Теория автоматического управления» (третья часть проекта) или выполняться независимо, в рамках практических и лабораторных работ по дисциплине.

1. Построить модель оптимальной по быстродействию системы управления электроприводом постоянного тока независимого возбуждения (см. п. 5.2).

1.1. Определить коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  для своего варианта. Исходные данные по вариантам приведены в таблице.

1.2. Построить упрощенную модель оптимальной системы, не учитывая малые инерционности системы, в Simulink. С помощью модели получить графики изменения управления и координат объекта при отработке системой различных рассогласований. Рассмотреть варианты с тремя, двумя и одним интервалами постоянного управления.

1.3. Построить полную модель оптимальной системы в Simulink, учитывающую динамику всех входящих в нее звеньев (инерционность преобразователя напряжения и электромагнитную инерционность двигателя).

Реализовать быстродействующий токовый контур.

Предусмотреть переход в режим непрерывного регулирования скорости двигателя с воздействием на напряжение якоря на участках ограничения скорости.

Исследовать переходные процессы в системе и сделать выводы о влиянии неучтенных при синтезе закона управления инерционностей, а также возмущения приведенным к валу двигателя моментом нагрузки механизма.

2. Построить модель оптимальной по комбинированному критерию системы управления электроприводом постоянного тока независимого возбуждения (см. п. 5.3).

2.1. Определить «предельные» значения весового коэффициента  $k_3$  и начального рассогласования  $x_{1к}-x_{10}$ , разграничивающие четыре варианта оптимального управления, описанные в п. 5.3.

2.2. Рассчитать четыре варианта оптимального управления и оптимальных траекторий, описанные в п. 5.3, и построить соответствующие зависимости.

3.3. Построить полную модель оптимальной системы в Simulink, учитывающую динамику всех входящих в нее звеньев (инерционность преобразователя напряжения и электромагнитную инерционность двигателя).

Реализовать быстродействующий токовый контур.

Предусмотреть переход в режим непрерывного регулирования скорости двигателя с воздействием на напряжение якоря на участках ограничения скорости.

Предусмотреть переход в режим непрерывного регулирования угла поворота исполнительного вала по окончании оптимальной программы управления.

Исследовать переходные процессы в системе и сделать выводы о влиянии неучтенных при синтезе закона управления инерционностей, а также возмущения приведенным к валу двигателя моментом нагрузки механизма.

### *Исходные данные к курсовому проекту по вариантам*

№ вар.	Мощность, КВт	Номинальная частота вращения, об/мин	Сопротивление обмотки при 15° С, Ом		Индуктивность якоря, мГн	Момент инерции ротора, кг×м <sup>2</sup>	Постоянная времени ТП, сек.	Время полного поворота, сек.
			якоря	добавочных полюсов				
1	2	3	4	5	6	6	7	8
Тип 2ПБ100МУХЛ4, 2ПБ100МГУХЛ4								
1	0,26	800	12,76	8,35	461	0,011	0,02	20
2	0,37	1000	8,49	5,14	313		0,08	12
3	0,6	1600	4,38	2,62	150		0,06	11
1	2	3	4	5	6	6	7	8
4	0,85	2360	1,99	1,22	78		0,09	30
5	1,2	3150	1,325	0,7	45		0,04	15
Тип 2ПБ112МУХЛ4, 2ПБ112МГУХЛ4								
6	0,34	750	8,72	7,07	106	0,015	0,06	40
7	0,45	1060	5,07	4,5	66		0,09	35
8	0,75	1500	2,48	2,13	31		0,07	22
9	1,1	2200	1,29	1,12	16		0,10	25
10	1,4	3000	0,788	0,682	11		0,09	15
Тип 2ПФ132МУХЛ4, 2ПФ132МГУХЛ4								
11	2	750	1,693	1,26	33	0,038	0,11	40
12	3	1060	0,906	0,692	18,5		0,10	24

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	6	7	8
13	4	1500	0,472	0,308	9,7		0,12	16
14	6	2360	0,226	0,166	1,6		0,09	36
15	7,5	3000	0,14	0,094	2,85		0,13	22
Тип 2ПФ132ЛУХЛ4, 2ПФ132ЛГУХЛ4								
16	2,8	750	1,08	0,915	23	0,048	0,12	28
17	4,2	1000	0,67	0,445	14		0,14	34
18	5,5	1600	0,269	0,22	5,7		0,11	18
19	7,5	2120	0,167	0,124	3,5		0,15	15
20	11	3000	0,08	0,066	1,8		0,14	10
Тип 2ПФ160МУХЛ4, 2ПФ160МГУХЛ4								
21	4,2	750	0,516	0,407	14	0,083	0,08	22
22	6	1000	0,326	0,208	9		0,09	18
23	7,5	1500	0,145	0,101	4		0,11	10
24	13	2240	0,081	0,056	2,2		0,10	12
25	16	3150	0,037	0,024	0,99		0,15	9
Тип 2ПФ160ЛУХЛ4, 2ПФ160ЛГУХЛ4								
26	5,6	800	0,328	0,227	10,5	0,1	0,07	16
27	8	1000	0,216	0,175	7		0,13	18
28	11	1500	0,096	0,073	3,1		0,12	10
29	16	2360	0,044	0,031	1,4		0,10	8
30	18,5	3150	0,024	0,017	0,78		0,16	5
Тип 2ПФ180МУХЛ4, 2ПФ180МГУХЛ4								
31	9	750	0,286	0,206	22	0,2	0,15	24
32	12	1060	0,15	0,092	4,9		0,14	25
33	15	1500	0,084	0,056	2,7		0,09	16
34	26	3150	0,022	0,015	0,68		0,16	8
Тип 2ПФ180ЛУХЛ4, 2ПФ180ЛГУХЛ4								
35	10	750	0,203	0,145	7,3	0,23	0,10	18
36	14	1000	0,136	0,084	4,4		0,13	24
37	18,5	1500	0,065	0,044	2,2		0,11	14
38	25	2120	0,042	0,03	0,81		0,17	12
Тип 2ПФ200МУХЛ4, 2ПФ200МГУХЛ4								
39	22	1600	0,047	0,029	1,6	0,25	0,14	10
Тип 2ПФ200ЛУХЛ4, 2ПФ200ЛГУХЛ4								
40	15	750	0,125	0,08	4,6	0,3	0,13	18
41	20	1000	0,083	0,053	3,2		0,12	18
42	30	1500	0,031	0,02	1,2		0,15	8

Номинальное напряжение питания двигателя для всех вариантов – 220 В.

## 6. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СРЕДСТВ СИСТЕМЫ MATLAB

Matlab ориентирован на работу с данными, представленными в векторно-матричной форме. Следующие примеры поясняют правила задания матриц и выбора элементов из них:

1. Введение матрицы (пробел или запятая разделяют элементы строк, точка с запятой – строки):

```
M = [1, 2 3; 4 5 6]
```

```
M =  
    1     2     3  
    4     5     6
```

2. Выборка элемента матрицы:

```
N = M(2, 1)
```

```
N =  
    4
```

3. Выборка строки (двоеточие следует читать как «все элементы строки»):

```
N = M(1, :)
```

```
N =  
    1     2     3
```

3. Выборка столбца (двоеточие следует читать как «все элементы столбца»):

```
N = M(:, 2)
```

```
N =  
    2
```

4. «Комбинированная» выборка элементов (2:3 следует читать как «столбцы со второго по третий»)

```
N = M(2, 2:3)
```

```
N =  
    5     6
```

5. Задание строки-последовательности с единичным шагом:

```
N = 1:5
```

```
N =  
    1     2     3     4     5
```

6. Задание строки-последовательности с заданным шагом (в данном случае равным 2):

```
N = 1:2:5
```

```
N =  
    1     3     5
```

7. Объединение матриц (здесь добавление строки):

```
N = [M; [7 8 9]]
```

```
N =  
    1     2     3  
    4     5     6  
    7     8     9
```

8. Объединение матриц (здесь добавление столбца):

```
N = [[0;0] M]
```

```
N =  
    0     1     2     3  
    0     4     5     6
```

9. Транспонирование матрицы (знак «' »):

```
L = [1 2 3]
```

```
L =  
    1     2     3
```

```
N = L'
```

```
N =  
    1  
    2  
    3
```

Для работы с матрицами в Matlab определены основные арифметические операции над матрицами: сложение (+), вычитание (-), умножение (\*), «левое» деление (\), «правое» деление (/), возведение в степень (^). Сложение и вычитание производятся поэлементно, поэтому размерность матриц-операндов должна быть одинаковой. Умножение и деление матриц выполняются по правилам матричной арифметики, согласно которым число столбцов матрицы первого операнда должно быть равно числу строк матрицы второго операнда. «Левое» и «правое» деления реализуют алгоритмы решения системы линейных алгебраических уравнений.

Левое деление позволяет найти решение системы  $AX = B$  (т.е. определить  $X$ ):

$$A = [1 \ 2; \ 3 \ 4]$$

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$B = [2; \ 1]$$

$$B = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$X = A \setminus B$$

$$X = \begin{matrix} -3.0000 \\ 2.5000 \end{matrix}$$

При этом  $X = A^{-1}B$ .

Правое деление решает задачу  $XA = B$ :

$$A = [1 \ 2; \ 3 \ 4]$$

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$B = [2 \ 1]$$

$$B = \begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix}$$

$$X = B/A$$

$$X = \begin{matrix} -2.5000 & 1.5000 \end{matrix}$$

При этом  $X = BA^{-1}$ .

Очевидно, что для выполнения данных операций необходимо, чтобы в обоих случаях матрица  $M$  была квадратной и ее определитель был не равен нулю.

Для выполнения операции возведения в степень требуется, чтобы матрица-операнд была квадратной.

Разрешаются операции сложения, вычитания, умножения и «правого» деления любых матриц со скалярной величиной, при этом соответствующая операция будет произведена над каждым элементом матрицы. Кроме того, реализованы также операции поэлементного умножения ( $.*$ ) и деления ( $./$ ) матриц одной размерности, а также возведение в степень всех элементов матрицы любой размерности ( $.^{\wedge}$ ).

Приведем краткие описания некоторых встроенных в систему Matlab функций для формирования и работы с матрицами. Большинство функций Matlab имеет несколько вариантов вызова, отличающихся числом входных и выходных параметров. Здесь дается описание только используемых в настоящем пособии вариантов. Полную информацию обо всех возможностях функций можно получить из справочной системы Matlab – например, с помощью команды `help`:

```
help имя_функции
```

### 1. Создание диагональной матрицы:

```
diag([1 2 3])
```

```
ans =  
    1     0     0  
    0     2     0  
    0     0     3
```

### 2. Определение собственных чисел и собственных векторов квадратной матрицы.

Вызов с одним выходным параметром (определение собственных чисел):

```
A = [1 2; 3 4]
```

```
A =  
    1     2  
    4     4
```

```
L = eig(A)
```

```
L =  
 -0.3723  
  5.3723
```

Вызов с двумя выходными параметрами (определение собственных векторов и собственных чисел):

```
[V,D] = eig(A)
```

```
V =  
 -0.8246  -0.4160  
  0.5658  -0.9094
```

```
D =  
 -0.3723     0  
     0     5.3723
```

Собственные числа определяются как диагональные элементы второго возвращаемого параметра.

Определение корней полинома производится с помощью функции `roots`. Полином задается как вектор коэффициентов, начиная со старшей степени аргумента. Найдем, например, корни полинома  $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ :

```
%Задаем полином с помощью вектора коэффициентов:
p = [1 2 3 4]

p =
     1     2     3     4

roots(p)

ans =
    -1.6506
   -0.1747 + 1.5469i
   -0.1747 - 1.5469i
```

Определение экспоненты (с матрицами и векторами работает поэлементно):

```
t = [0 .5 1]

t =
     0     0.5000     1.0000

exp(t)

ans =
     1.0000     1.6487     2.7183
```

Вычисление определенного интеграла, заданного последовательностями значений аргумента и функции методом трапеций:

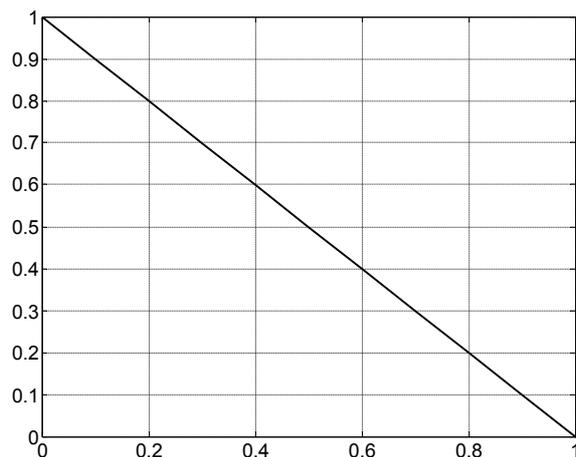
```
% Задаем вектор-последовательность аргумента:
x = 0:.1:1

x =
Columns 1 through 6
     0     0.1000     0.2000     0.3000     0.4000     0.5000
Columns 7 through 11
     0.6000     0.7000     0.8000     0.9000     1.0000

% вычисляем вектор-последовательность значения функции:
y = 1-x

y =
Columns 1 through 6
     1.0000     0.9000     0.8000     0.7000     0.6000     0.5000
Columns 7 through 11
     0.4000     0.3000     0.2000     0.1000         0

% Строим график функции (только для демонстрации):
plot(x,y),grid
```



*Рис. 30. Графическое окно*

```
% Вычисляем интеграл – площадь «под прямой y(x)»
trapez(x,y)

ans =
    0.5000
```

### *Библиографический список*

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для вузов. 4-е изд. – Ростов н/Д: Изд-во «Феникс», 1998. – 512 с.
2. *Иващенко Н.И.* Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем: учебник для вузов; изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1978. – 736 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 3-х т. Рек. Минобразования РФ/ ред. Н.Д. Егупов. – М.: изд-во Моск. гос. техн. ун-та, 2000.
4. *Потемкин В.Г.* Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: в 2 т. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 366 с.
5. *Рыбалев А.Н.* Теория автоматического управления: пособие к курсовому проектированию. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2004. – 145 с.
6. *Юревич Е.И.* Теория автоматического управления. – Л.: Энергия, 1969. – 375 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Введение</i>	3
1. Постановка задач оптимального управления и их классификация	5
2. Решение задач оптимального управления с помощью вариационного исчисления	9
3. Решение задач оптимального управления с помощью принципа максимума	39
4. Решение задач оптимального управления методом динамического программирования	54
5. Практическая задача: управление электроприводом постоянного тока	66
6. Краткое описание используемых средств системы Matlab	99
<i>Библиографический список</i>	104

**Андрей Николаевич Рыбалев,**  
доцент кафедры АПП и Э АмГУ,  
канд. техн. наук

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.  
ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.**  
*Учебное пособие*