

Министерство образования и науки Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Н. Рыбалёв, В.И. Усенко, В.Л. Русинов

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

ЧАСТЬ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ

Методическое пособие к выполнению практических
и самостоятельных работ

Учебное пособие

Благовещенск
2011

ББК 32.965я73

Р 93

*Рекомендовано
учебно-методическим советом университета*

Рецензенты:

*Воякин С.Н., зав. кафедрой электропривода, электроники и электрооборудования автомобилей и тракторов ДальГАУ,
канд. техн. наук, доцент;*

*Мясоедов Ю.В., зав. кафедрой энергетики АмГУ,
канд. техн. наук, профессор.*

Рыбалев А.Н., Усенко В.И, Русинов В.Л.

Р 93 Теория автоматического управления. Часть 1. Математические основы управления. Методическое пособие к выполнению практических и самостоятельных работ. Учебное пособие. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2011.

Пособие предназначено для студентов 3-х курса специальности «Автоматизация технологических процессов и производств» и полностью соответствует рабочей программе дисциплины «Математические основы управления», изучаемой в 5 учебном семестре.

В авторской редакции.

© Амурский государственный университет, 2011

© Рыбалев А.Н., Усенко В.И, Русинов В.Л., 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Практическое занятие 1. Математические модели систем управления. Связь между передаточной матрицей и переменными состояниями.....	7
Практическое занятие 2. Составление моделей одномерной системы в пространстве состояний методами прямого, последовательного и параллельного программирования	40
2.1. Метод прямого программирования.....	48
2.2. Метод последовательного программирования.....	57
2.3. Метод параллельного программирования.....	63
Практическое занятие 3. Линеаризация систем нелинейных уравнений. Получение передаточной матрицы линеаризованной системы.	67
Практическое занятие 4. Определение передаточных функций системы с помощью правил преобразования структурных схем. Определение статических характеристик по всем каналам управления	78
4.1. Последовательное (series) соединение блоков.....	78
4.2. Параллельное (parallel) соединение блоков	82
4.3. Соединение с обратной связью (feedback)	85
4.4. Перенос сумматора	89
4.5. Переносы линии связи	90
Практическое занятие 5. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений классическим и операторным методами.....	96
Практическое занятие 6. Временные характеристики систем и звеньев. Интеграл Дюамеля	123
6.1. Временные характеристики	123
6.2. Интеграл Дюамеля	127
6.3. Определение временных характеристик численными методами пакета Control.....	134
Практическое занятие 7. Частотные характеристики систем управления	145
7.1. Основные частотные характеристики.....	145
7.2. Использование MatLab при построении частотных характеристик.....	151
Практическое занятие 8. Построение частотных характеристик последовательного соединения звеньев.....	157
Практическое занятие 9. Расчет переходных и частотных характеристик простейшей замкнутой системы регулирования.....	164
9.1. Временные характеристики систем	165
9.2. Частотные характеристики.....	172
ПРИЛОЖЕНИЕ. Типовые звенья систем автоматического управления	176
1. Безынерционное (усилительное пропорциональное) звено	178
2. Идеальное интегрирующее звено	179
3. Аперидическое звено первого порядка.....	180
4. Реальное интегрирующее звено.....	182
5. Аперидическое звено второго порядка.....	184
6. Колебательное звено	186
7. Идеальное дифференцирующее звено	189

8. Реальное дифференцирующее звено.....	190
9. Идеальное форсирующее звено.....	192
10. Изотропное звено.....	193
11. Интегро-дифференцирующее звено.....	195
12. Звено запаздывания.....	197
Библиографический список.....	201

ВВЕДЕНИЕ

В первой части пособия вводятся в рассмотрение базовые понятия теории автоматического управления, изучаемые студентами специальности 220301 в курсе «Математические основы управления». Структура пособия полностью соответствует плану практических и самостоятельных занятий по дисциплине.

Первые два занятия посвящены моделям линейных систем. Рассматриваются модели двух видов: «вход-выход» и «вход-состояние-выход», а также связь между ними. Описываются методы прямого, последовательного и параллельного программирования. Изложение сопровождается многочисленными примерами с привлечением вычислительных средств программы Matlab.

На третьем занятии изучается такой важный способ получения линейных моделей объектов и систем управления, как линеаризация исходных нелинейных уравнений в окрестности рабочей точки. Исходное математическое описание системы, которое подвергается линеаризации, может быть представлено как в форме нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка, связывающих входы и выходы системы, так и в форме системы дифференциальных уравнений первого порядка (уравнений состояния).

Четвертое занятие посвящено правилам эквивалентных преобразований структурных схем, позволяющим получить математическое описание линейной системы по математическому описанию входящих в нее звеньев. Рассматриваются основные виды соединений звеньев, приводятся формулы для нахождения эквивалентного описания, описываются функции пакета Control программы Matlab, применяемые для преобразований.

На пятом занятии изучаются методы определения реакции линейной системы на входные воздействия путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих систему. Применяются классический и операторный методы, а также символьное решение уравнений в Matlab.

На шестом занятии вводятся в рассмотрение временные характеристики линейных систем. Изучаются способ определения временных характеристик с помощью интеграла Дюамеля и основные функции пакета Control, предназначенные для определения реакции линейных систем на типовые и произвольные воздействия численными методами.

Седьмое занятие посвящено частотным характеристикам систем управления. Даются определения различных частотных характеристик, описываются функции пакета Control для их расчета и построения.

На восьмом занятии решается практически важная задача построения логарифмических частотных характеристик последовательного соединения звеньев.

Девятое занятие логически завершает курс «Математические основы управления». На нем определяются переходные и частотные характеристики замкнутой системы автоматического управления с отрицательной обратной связью.

Материалы для всех занятий включают задания для самостоятельной работы по темам занятий и примеры их выполнения.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЕЙ И ПЕРЕМЕННЫМИ СОСТОЯНИЯ

При анализе и синтезе систем управления применяются их математические модели, т.е. соотношения (набор уравнений), связывающие входные, выходные и внутренние переменные системы.

Первым типом математической модели будем считать модели вход-состояние-выход (ВСВ) или *модели в пространстве состояний*.

Такие модели описывают состояние исследуемого объекта *системой дифференциальных уравнений первого порядка*, записанных относительно некоторых переменных – *переменных состояния*. В набор переменных состояния могут входить любые внутренние переменные при условии, что все они в совокупности однозначно определяют текущее состояние системы в любой момент времени. Это, в частности, означает, что переменные, не входящие в этот набор, могут быть выражены через переменные состояния и входные переменные посредством алгебраических уравнений. Состояние линейной электрической цепи, например, однозначно определяется токами в индуктивностях и напряжениями на емкостях. Все остальные токи и напряжения цепи могут быть рассчитаны через указанные величины и параметры источников энергии.

Пусть система управления описывается n переменными состояниями и имеет r входов и m выходов.

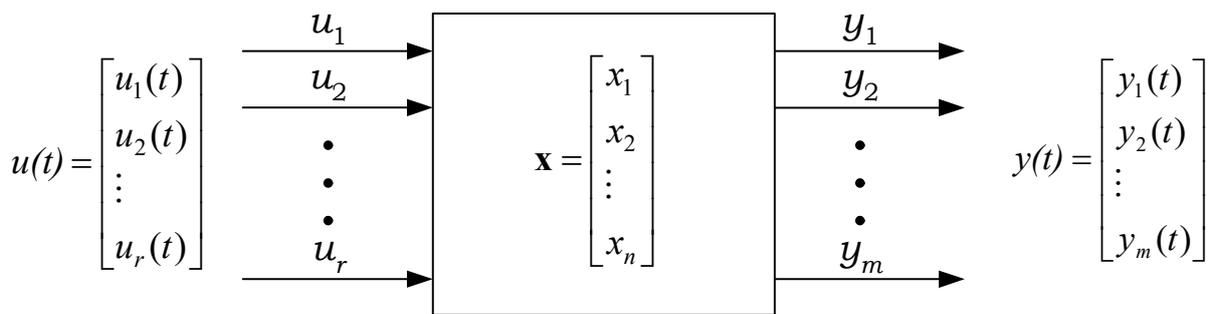


Рис. 1.1. Структурная схема многомерной системы

Состояние системы описывается дифференциальными уравнениями первого порядка относительно каждой из переменных состояния. Эти уравнения для линейных систем имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r}u_r, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2r}u_r, \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nr}u_r, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Эту же систему можно записать в развернутой матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Матрицы-столбцы, состоящие из переменных состояния и входных сигналов, называются *вектором состояния* и *вектором входных сигналов* соответственно:

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T, \quad \mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r]^T, \quad (1.3)$$

где полужирное начертание символа \mathbf{x} или \mathbf{u} означает вектор (матрица-столбец).

Тогда процессы в системе управления можно описать в компактном виде *дифференциальным уравнением состояния*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (1.4)$$

которое часто называют просто *уравнением состояния*. Уравнение состояния связывает скорость изменения состояния системы с самим состоянием и входными сигналами. В общем случае выходные сигналы линейной системы связаны с переменными состояния и входными сигналами *уравнением выхода*

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T$ – вектор выходных переменных.

В (1.4) и (1.5) используются следующие матрицы:

\mathbf{A} – матрица коэффициентов системы – квадратная матрица состояний размерности $n \times n$, где n – число переменных состояния;

\mathbf{B} – матрица входа размера $n \times r$, где r – число входных величин;

\mathbf{C} – матрица выхода размерности $t \times n$;

\mathbf{D} – матрица обхода, определяющая прямую зависимость выхода от входа, имеющая размерность $t \times r$.

Элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} обозначаются такими же, как и матрицы, но строчными, буквами.

Для наглядности размерности можно указать над матрицами уравнения состояния:

$$\begin{array}{ccccccc}
 n \times 1 & & n \times n & n \times 1 & \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ n \times r \quad r \times 1 \end{array} \\
 X = & A \cdot X & + & B \cdot U
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 m \times 1 & & m \times n & n \times 1 & \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ m \times r \quad r \times 1 \end{array} \\
 Y = & C \cdot X & + & D \cdot U
 \end{array}$$

Стрелки над матрицами поставлены для демонстрации следующего известного правила. Произведение $\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}$ матриц в указанном порядке возможно в том и только в том случае, если число столбцов матрицы \mathbf{B} равно числу строк матрицы \mathbf{U} . В матрице, являющейся произведением двух матриц, число строк равно числу строк левого сомножителя, а число столбцов – числу столбцов правого сомножителя. Данное правило можно изобразить с помощью стрелок над размерами матриц: перемножать можно матрицы с одинаковыми внутренними размерами, а наружные размеры дают размерность результирующей матрицы.

Системы с одним входом и одним выходом называют SISO системами (SISO – single-input / single-output). Системы с несколькими входами и выходами называют MIMO системами (multiple-input / multiple-output). Уравнения (1.4) и (1.5) могут быть записаны как для MIMO, так и для SISO систем. Если система имеет один вход, т.е. $r = 1$, то матрица \mathbf{B} является столбцом ($n \times 1$), а вектор \mathbf{u} превращается в скалярную переменную. Если система имеет только один выход ($m = 1$), то вектор \mathbf{y} превращается в скалярную переменную, а матрица \mathbf{C} имеет вид строки длиной $1 \times n$.

Смысл модели в переменных состояния заключается в том, что она, сохраняя соотношения между входами и выходами системы, позволяет одновременно исследовать поведение внутренних ее переменных. При надлежащем выборе они могут описывать различные физические величины (токи, напряжения, скорости, ускорения, перемещения, температуры и т.п.), представляющие интерес для исследователя.

В программе MatLab линейные системы в пространстве состояний являются частным случаем LTI (Linear Time-Invariant, линейных стационарных) систем и называются SS (State Space, в пространстве состояний) системами.

Вторым типом математической модели будем называть **модели вход-выход (ВВ)**. Динамика стационарной линейной системы может описываться линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n -го порядка с постоянными коэффициентами, связывающим входной $u(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u, \quad (1.6)$$

где n – порядок модели, причем $0 \leq m \leq n$;

a_i, b_i – постоянные коэффициенты (параметры модели);

$$y^{(n)} = \frac{d^n y(t)}{dt^n}, \dots, \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}, \quad u^{(m)} = \frac{d^m u(t)}{dt^m}, \dots, \dot{u} = \frac{du(t)}{dt}.$$

Дифференциальные уравнения получаются на основании фундаментальных физических законов. Этот метод в равной степени применим к механическим, электрическим, гидравлическим, электромеханическим и другим системам. В линейном ОДУ, которое получают чаще всего путем линеаризации нелинейного ДУ, выходную величину системы (искомую функцию времени) и ее производные принято записывать в левой части, а входные величины (известные функции времени) и их производные – в правой части.

Дифференциальное уравнение (1.6) можно записать в символической (операторной) форме, используя оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}:$$

$$a_n p^n y(t) + a_{n-1} p^{n-1} y(t) + \dots + a_1 p y(t) + a_0 y = b_m p^m u(t) + b_{m-1} p^{m-1} u(t) + \dots + b_1 p u(t) + b_0 u(t),$$

или

$$A(p)y(t) = B(p)u(t), \tag{1.7}$$

где дифференциальные полиномы $A(p)$ и $B(p)$ имеют следующие выражения:

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0, \tag{1.8}$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0. \tag{1.9}$$

В общем случае $A(p)$ имеет степень n , а $B(p)$ – степень m , $0 \leq m \leq n$, где n – порядок модели. В случае, когда $a_n = 1$ (или $b_m = 1$), полином называется *приведенным*. Полином, у которого коэффициент при младшем члене равен 1, т.е. $a_0 = 1$ (или $b_0 = 1$), называется *нормированным*.

Оператор $A(p)$ называется *характеристическим полиномом* ДУ (1.7), а комплексные числа $p_i, i = \overline{1, n}$, являющиеся решениями (корнями) характеристического уравнения

$$A(p) = 0, \tag{1.10}$$

или

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \tag{1.11}$$

называются *полюсами системы* (1.7).

Комплексные числа z_i , $i = \overline{1, m}$, являющиеся решением уравнения

$$B(p) = 0, \quad (1.12)$$

называются *нулями системы* (1.7).

Нули и полюсы ПФ могут быть либо действительным, либо комплексно-сопряжёнными числами.

Уравнение (1.7) можно записать в виде

$$y(t) = \frac{B(p)}{A(p)} u(t) = W(p)u(t),$$

где интегро-дифференциальный оператор

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (1.13)$$

называется *операторной передаточной функцией системы* (ПФ), описываемой уравнением (1.7).

ПФ представляет собой дробно-рациональную функцию оператора p с вещественными коэффициентами. Как видно из (1.13), ПФ может быть записана в виде отношения двух полиномов – полинома $B(p)$ правой части и полинома $A(p)$ левой части исходного символического (операторного) уравнения.

Другая интерпретация понятия ПФ связана с *методом преобразования Лапласа*. В этом случае передаточной функции можно дать следующее определение.

Передаточной функцией системы называется отношение операторных изображений выходной и входной переменных *при нулевых начальных условиях*:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

С помощью передаточной функции выходная величина легко связывается с входной:

$$Y(p) = W(p)X(p).$$

ПФ можно найти с помощью дифференциального уравнения, записав его в операторной форме при нулевых начальных условиях. Применительно к электрическим цепям ПФ получают с помощью операторной схемы замещения при нулевых начальных условиях, минуя этап составления ДУ.

Передаточная функция системы (или элемента) однозначно описывает динамическую связь между входной и выходной переменными и не несет никакой информации о внутренних переменных (переменных со-

стояния) и характере их изменения. Она может быть сформирована непосредственно по коэффициентам дифференциального уравнения n -го порядка.

В программе MatLab линейные системы, заданные передаточными функциями, называются TF (transfer functions) системами. Такие системы задаются векторами коэффициентов числителей и знаменателей передаточных функций. Кроме того, в MatLab передаточные функции можно задавать наборами полюсов, нулей и масштабных коэффициентов, используя полюсно-нулевые модели (ZPK).

ПФ можно записать таким образом, чтобы в числителе и знаменателе находились приведенные полиномы, т.е. полиномы, у которых коэффициенты при старших степенях оператора p были бы равны единице:

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{p^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} p^{m-1} + \dots + \frac{b_1}{b_m} + \frac{b_0}{b_m}}{p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} p + \frac{a_0}{a_n}} = \\
 &= \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{p^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} p^{m-1} + \dots + \frac{b_1}{b_m} + \frac{b_0}{b_m}}{p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} p + \frac{a_0}{a_n}} = K \frac{p^m + c_{m-1} p^{m-1} + \dots + c_1 + c_0}{p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 p + d_0}, \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

где K – масштабный коэффициент.

Известно, что алгебраическое уравнение (полином) степени n с действительными коэффициентами

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1.15)$$

имеет n корней, среди которых могут быть как действительные, так и комплексные, попарно сопряженные, корни. Если корнями уравнения (1.15) являются числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то оно может быть представлено в виде

$$a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n) = 0.$$

Учитывая это свойство полинома и зная нули и полюсы ПФ, ее можно записать в виде:

$$W(p) = K \frac{(p - z_1) \dots (p - z_m)}{(p - p_1) \dots (p - p_n)}. \quad (1.16)$$

Такая форма представления ПФ называется в MatLab Zero-Pole-Gain моделью или ZPK моделью.

Графическое изображение расположения нулей и полюсов ПФ в плоскости комплексной частоты $p = \sigma + j\omega$ называется *диграммой нулей и*

полюсов или полюсно-нулевой диаграммой (ПНД). При построении ПНД нули изображаются кружками, а полюсы – крестиками. Зная расположение нулей и полюсов ПФ системы в плоскости комплексной частоты p , можно получить полную информацию о свойствах системы, в частности с точностью до масштабного коэффициента найти реакцию системы на заданное воздействие.

Система с одним входом и одним выходом описывается одной передаточной функцией. Система МИМО (multiple-input / multiple -output) имеет несколько входов и выходов. В этом случае для описания системы используется термин *передаточная матрица*. Передаточная матрица $\mathbf{W}(p)$ связывает между собой вектор входных (управляющих) величин $\mathbf{u}(t)$ и вектор выходных (управляемых) величин $\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(p) \cdot \mathbf{u}(t) . \quad (1.17)$$

Если многомерная система имеет r входов и m выходов, то размер передаточной матрицы равен $[m \times r]$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{y_1(t)}{u_1(t)} & \frac{y_1(t)}{u_2(t)} & \dots & \frac{y_1(t)}{u_r(t)} \\ \frac{y_2(t)}{u_1(t)} & \frac{y_2(t)}{u_2(t)} & \dots & \frac{y_2(t)}{u_r(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_m(t)}{u_1(t)} & \frac{y_m(t)}{u_2(t)} & \dots & \frac{y_m(t)}{u_r(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) & \dots & W_{1r}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) & \dots & W_{2r}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{m1}(p) & W_{m2}(p) & \dots & W_{mr}(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (1.18)$$

Таким образом, элементами передаточной матрицы являются передаточные функции по отдельным каналам управления, причем первый индекс ПФ равен номеру выхода, а второй – номеру входа.

Установим в общем виде связь между передаточной матрицей и уравнениями состояния, для чего уравнения (1.4), (1.5) запишем в символической (операторной) форме:

$$p\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t); \quad (1.19)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t). \quad (1.20)$$

Сгруппируем все члены, содержащие $\mathbf{x}(t)$, в левой части уравнения:

$$p\mathbf{x}(t) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t). \quad (1.21)$$

Для того, чтобы выделить множитель $\mathbf{x}(t)$ в левой части уравнения, сначала представим член $p\mathbf{x}(t)$ как $p\mathbf{E}\cdot\mathbf{x}(t)$, где \mathbf{E} – единичная матрица размерности n . Тогда

$$p\mathbf{E}\cdot\mathbf{x}(t)-\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t)=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(t) \quad (1.22)$$

или

$$(p\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}(t)=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(t). \quad (1.23)$$

Этот дополнительный шаг понадобился потому, что вычитание матрицы \mathbf{A} из скалярной переменной p не определено: мы не можем выразить $\mathbf{x}(t)$ непосредственно из (1.21). Из уравнения (1.23) получим

$$\mathbf{x}(t)=(p\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(t). \quad (1.24)$$

Введем обозначение

$$\Phi(p)=(p\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}. \quad (1.25)$$

Эта матрица, обратная матрице $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})$, называется *резольвентой*. Оригинал этой матрицы $\Phi(t)$ называется *переходной матрицей состояния* или *фундаментальной матрицей*.

Иногда резольвенту удобно находить по формуле

$$\Phi(p)=\frac{(p\mathbf{E}-\mathbf{A})^+}{\det(p\mathbf{E}-\mathbf{A})}, \quad (1.26)$$

где $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})^+$ – присоединенная (союзная) матрица.

С учетом (1.26) получим решение операторных уравнений состояния:

$$\mathbf{x}(t)=\Phi(p)\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(t). \quad (1.27)$$

Определитель матрицы $p\mathbf{E}-\mathbf{A}$ является характеристическим полиномом системы, т.е.

$$\det(p\mathbf{E}-\mathbf{A})=A(p). \quad (1.28)$$

Собственные числа матрицы \mathbf{A} в точности совпадают с корнями характеристического уравнения (полюсами) системы: $\lambda_i\{\mathbf{A}\}=p_i$.

Подставляя $\mathbf{x}(t)$ согласно (1.24) в (1.20), получим уравнение выхода:

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\cdot\Phi(p)\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(t)+\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}(t)=[\mathbf{C}\cdot\Phi(p)\mathbf{B}+\mathbf{D}]\cdot\mathbf{u}(t),$$

откуда

$$\mathbf{W}(p)=\mathbf{C}\cdot\Phi(p)\mathbf{B}+\mathbf{D}=\frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E}-\mathbf{A})^+\mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E}-\mathbf{A})}+\mathbf{D}. \quad (1.29)$$

Итак, n уравнений состояния, дифференциальное уравнение n -го порядка или передаточная функция (для многомерной системы – передаточная матрица) являются различными математическими моделями одной и той же физической системы. Между этими моделями имеется прямая связь. По уравнениям состояния можно однозначно определить передаточную функцию или передаточную матрицу. Отметим, что обратное преобразование не является однозначным: одной и той же модели типа *вход-выход* можно поставить в соответствие множество моделей *вход-состояние-выход* (одно и то же внешнее поведение может иметь множество внутренних реализаций). Вид модели зависит от применяемого метода преобразования. Эти методы будут рассмотрены на следующем занятии.

Ниже приведены примеры, в которых определяются различные модели систем.

Пример 1.1. Математические модели заграждающего (режекторного) фильтра, Рис. 1.2. Параметры имеют значения:

$$R = 20 \text{ Ом}; \quad L = 0,1 \text{ Гн}; \quad C = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ Ф.}$$

Заграждающий фильтр подавляет сигналы в некотором диапазоне частот и пропускает сигналы остальных частот. Может использоваться в радио- и электротехнических устройствах для подавления помех.

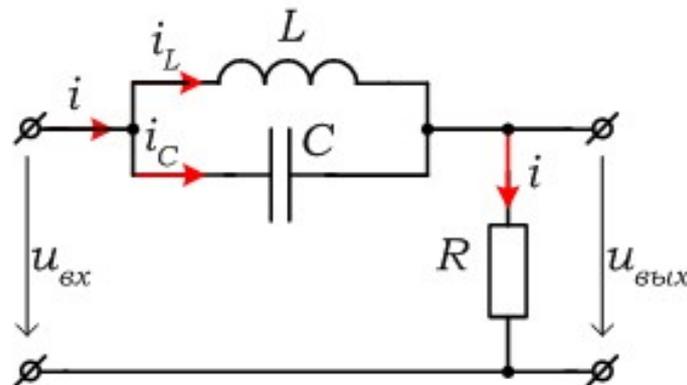


Рис. 1.2. Схема режекторного фильтра

Составим уравнения состояния. В качестве переменных состояния выберем напряжение на емкости и ток индуктивности. Запишем три уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений:

$$\begin{cases} i = i_C + i_L; & (1.30) \\ u_C + Ri = u_{\text{вх}}; & (1.31) \\ L \frac{di_L}{dt} = u_C. & (1.32) \end{cases}$$

Учитывая компонентное уравнение емкости в виде $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, запишем уравнение для входного тока в виде $i = C \frac{du_C}{dt} + i_L$ и подставим его в (1.30):

$$u_C + R \left(C \frac{du_C}{dt} + i_L \right) = u_{ex}.$$

Отсюда получаем первое уравнение состояния:

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC} u_C - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{RC} u_{ex}.$$

Второе уравнение получаем непосредственно из (1.32):

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} u_C.$$

Теперь запишем систему уравнений состояния со всеми переменными и входным напряжением в правой части:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC} u_C - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{RC} u_{ex}; \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} u_C + 0 \cdot i_L + 0 \cdot u_{ex}. \end{array} \right. \quad (1.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC} u_C - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{RC} u_{ex}; \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} u_C + 0 \cdot i_L + 0 \cdot u_{ex}. \end{array} \right. \quad (1.34)$$

Уравнения в расширенной матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_{ex}. \quad (1.35)$$

Уравнение для выходного напряжения:

$$u_{вых} = -u_C + u_{ex} \quad \text{или} \quad u_{вых} = -u_C + 0 \cdot i_L + u_{ex}.$$

Уравнение выхода в матричной форме:

$$u_{вых} = [-1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + 1 \cdot u_{ex}. \quad (1.36)$$

Запишем матрицы состояния и выхода:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [-1 \quad 0]; \quad \mathbf{D} = 1. \quad (1.37)$$

Для заданных значений имеем:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}} & -\frac{1}{0,5 \cdot 10^{-3}} \\ \frac{1}{0,1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & -2 \cdot 10^3 \\ 10 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [-1 \quad 0]; \quad \mathbf{D} = 1.$$

Получим передаточную функцию режекторного фильтра по формуле (1.29).

Составим вначале матрицу $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})$:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p + 100 & 2 \cdot 10^3 \\ -10 & p \end{bmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения полученной матрицы. Первая цифра индекса означает номер вычеркиваемой строки, вторая – номер вычеркиваемого столбца :

$$\Delta_{11} = p; \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}(-10) = 10; \quad \Delta_{21} = (-1)^{2+1}(2 \cdot 10^3) = -2 \cdot 10^3;$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}(p + 100) = p + 100.$$

Для получения союзной матрицы нужно заменить каждый элемент матрицы $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})$ его алгебраическим дополнением, а затем полученную матрицу транспонировать. В результате получим:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -2 \cdot 10^3 \\ 10 & p + 100 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} = [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} p & -2 \cdot 10^3 \\ 10 & p + 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = [-p \quad 2 \cdot 10^3] \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = -100p.$$

Определитель матрицы $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})$:

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p & -2 \cdot 10^3 \\ 10 & p + 100 \end{vmatrix} = p^2 + 100p + 20000.$$

Передаточная функция фильтра:

$$W(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{-100p}{p^2 + 100p + 20000} + 1 = \frac{p^2 + 20000}{p^2 + 100p + 20000}.$$

Составим также ДУ второго порядка для фильтра, используя другую систему уравнений для мгновенных значений:

$$\begin{cases} i_C + i_L = i; \\ \frac{1}{C} \int i_C dt + Ri = u_{ex}; \\ L \frac{di_L}{dt} + Ri = u_{ex}. \end{cases}$$

Дважды продифференцируем второе уравнение и исключим из него ток в емкости с помощью первого уравнения:

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \cdot \frac{di_L}{dt} + R \frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{d^2 u_{ex}}{dt^2}.$$

В это уравнение подставим выражение для производной тока индуктивности $\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u_{ex}$, найденное из третьего уравнения. В результате получим выражение:

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{R}{LC} \cdot i - \frac{1}{LC} u_{ex} + R \frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{d^2 u_{ex}}{dt^2}.$$

Применяя закон Ома в виде $u_{вых} = Ri$, сформируем ДУ второго порядка относительно выходного напряжения:

$$\frac{d^2 u_{вых}}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{du_{вых}}{dt} + \frac{1}{LC} u_{вых} = \frac{d^2 u_{ex}}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_{ex}. \quad (1.38)$$

Правая часть уравнения включает не только входное напряжение, но и его вторую производную по времени, т.е. ускорение изменения входного напряжения.

Запишем (1.38) в операторной форме:

$$p^2 U_{вых}(p) + \frac{1}{RC} \cdot p U_{вых}(p) + \frac{1}{LC} U_{вых}(p) = p^2 U_{ex}(p) + \frac{1}{LC} U_{ex}(p)$$

или

$$\left(p^2 + \frac{1}{RC} \cdot p + \frac{1}{LC} \right) U_{вых}(p) = \left(p^2 + \frac{1}{LC} \right) U_{ex}(p).$$

Найдем передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{ex}(p)} = \frac{p^2 + \frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{1}{RC} \cdot p + \frac{1}{LC}} = \frac{p^2 + 20000}{p^2 + 100p + 20000}. \quad (1.39)$$

В программе **MatLab** модель в пространстве состояний создается с помощью функции `ss`:

```
sys = ss(A,B,C,D),
```

которая создает объект `sys` класса `SS`, сохраняющий матрицы уравнений состояния.

Имеются два способа задания модели в виде передаточной функции (TF модели).

1). Первый способ – с помощью функции `tf`:

```
sys = tf(num,den).
```

Параметры `num` и `den` задают числитель и знаменатель (числители и знаменатели – для МИМО систем). Для СИСО систем `num` и `den` представляют собой векторы-строки коэффициентов полиномов числителя и знаменателя, расположенных в порядке убывания степеней оператора p . Для МИМО систем `num` и `den` – массивы ячеек, содержащие векторы-строки коэффициентов полиномов по всем каналам системы.

Результат `sys` является объектом класса TF.

Зададим модель режекторного фильтра:

```
num=[1 0 20000];den=[1 100 20000];  
W=tf(num,den)
```

В командном окне

```
Transfer function:  
s^2 + 20000  
-----  
s^2 + 100 s + 20000
```

2). Второй способ – определить переменную Лапласа s или p с помощью команды `s = tf('s')` или `p = tf('p')`, а затем ввести модель в привычном виде:

```
s=tf('s');  
W=(s^2+20000)/(s^2+100*s+20000)
```

В командном окне

```
Transfer function:  
s^2 + 20000  
-----  
s^2 + 100 s + 20000
```

или

```
p=tf('p');  
W=(p^2+20000)/(p^2+100*p+20000)
```

В командном окне

```
Transfer function:
  p^2 + 20000
-----
p^2 + 100 p + 20000
```

Аналогично имеются два способа получения ZPK модели.

1). Первый способ – с помощью функции `zpk`:

```
sys = zpk(Z, P, K).
```

Эта команда создает модель по ее заданным нулям и полюсам. Здесь Z и P – соответственно, векторы-строки нулей и полюсов ПФ, а K – обобщенный коэффициент усиления (масштабный коэффициент). Возвращаемая величина – модель объекта в `zpk`-форме. Например, программа

```
Z=[-141.42i, 141.42i]; P=[-50.00+132.29i, -50.00-132.29i]; K=1;
H=zpk(Z, P, K)
```

позволяет получить ZPK модель в виде следующей ПФ:

```
Zero/pole/gain:
  (s^2 + 2e004)
-----
  (s^2 + 100s + 2e004)
```

Из примера видно, что `MatLab` не раскладывает полином второй степени на множители первой степени, если его корни – комплексно-сопряженные.

2). Второй способ – определить переменную Лапласа s или p с помощью команды `s = zpk('s')` или `p = zpk('p')`, а затем записать модель в привычном виде.

```
p=zpk('p')
H1=(p^2+20000)/(p^2+100*p+20000)
```

В командном окне

```
Zero/pole/gain:
p
Zero/pole/gain:
  (p^2 + 2e004)
-----
  (p^2 + 100p + 2e004)
```

Полюсно-нулевая диаграмма в `MatLab` называется `the pole-zero map` (полюсно-нулевая карта) и строится с помощью команды

```
pzmap(sys)
```

Использование выходных аргументов

```
[p, z] = pzmap(sys)
```

позволяет получить полюса и нули системы без построения диаграммы.

Ниже приведена программа, которая создает модель режекторного фильтра в пространстве состояний, а потом, путем последовательных преобразований, его TF и ZPK модели.

```
%Матрицы уравнений состояния
A=[-100 -2000;10 0];B=[100;0];C=[-1 0];D=1;
Hss=ss(A,B,C,D); %SS модель
Wtf=tf(Hss) %Передаточная функция
Wzpk=zpk(Wtf) %ZPK модель
```

В командном окне

```
Transfer function:
s^2 - 1.082e-014 s + 20000
-----
      s^2 + 100 s + 2e004
Zero/pole/gain:
      (s^2  + 2e004)
-----
      (s^2  + 100s + 2e004)
```

Полином числителя первой ПФ содержит малую величину $1.082e-014$, которой можно пренебречь.

Пример 1.2. Математические модели двигателя постоянного тока с одним входом и одним выходом.

Двигатель постоянного тока (ДПТ) – это исполнительное устройство, преобразующее электрическую энергию постоянного тока в механическую энергию вращательного движения. Ряд положительных качеств ДПТ, а именно: высокий вращающий момент, возможность регулирования скорости в широком диапазоне, удобство применения в различных САУ позволяют применять их в роботах-манипуляторах, лентопротяжных механизмах, в исполнительных устройствах следящих систем. ДПТ имеет обмотку возбуждения (ОВ) с параметрами R_b и L_b , обмотку якоря (ОЯ) с параметрами R_a и L_a и может быть представлен схемой на Рис. 1.3.

Как правило, для управления угловой скоростью двигателя используют метод изменения напряжения, подводимого к якорной цепи (*якорное управление*), а ОВ двигателя постоянно подключена к неизменному напряжению, поэтому угловая скорость ω и направление вращения вала зависят только от значения и полярности напряжения u_a , подаваемого на якорь.

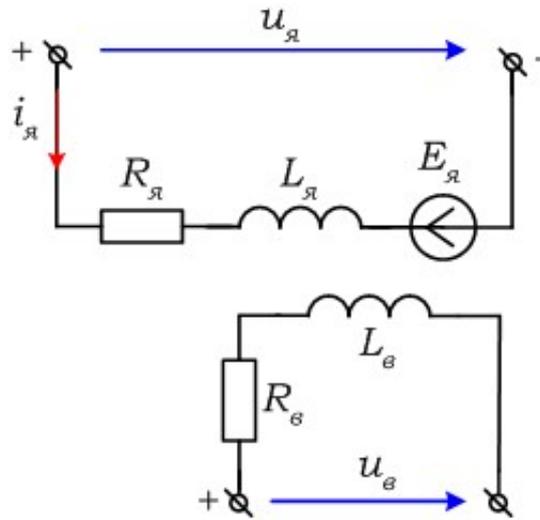


Рис. 1.3. Схема ДПТ независимого возбуждения

В общем случае момент сопротивления на валу двигателя M_c является функцией времени и может рассматриваться как входное воздействие. В частном случае он зависит от угловой скорости, например, пропорционален ей. Тогда двигатель является SISO системой, его входной величиной является напряжение якоря $u_я$, а выходной – угловая скорость ω вала двигателя. Составим модель в пространстве состояний.

В системах управления двигатель значительную часть времени работает в переходных режимах, поэтому для якорной цепи составляется ДУ

$$L_я \frac{di_я}{dt} + R_я i_я + e_я = u_я, \quad (1.40)$$

где $e_я$ – противо-ЭДС, возникающая в якоре при его вращении и направленная навстречу току. Если пренебречь влиянием реакции якоря (воздействие поля якоря на поле возбуждения), то можно считать, что противо-ЭДС пропорциональна угловой скорости вала

$$e_я = c_e \Phi \omega = k_e \omega, \quad (1.41)$$

где Φ – магнитный поток ОВ; c_e – конструктивный коэффициент двигателя.

С учетом (1.40) получим уравнение для цепи якоря:

$$L_я \frac{di_я}{dt} + R_я i_я + k_e \omega = u_я, \quad (1.42)$$

Дифференциальное уравнение движения вала двигателя имеет вид

$$M = M_c + J \frac{d\omega}{dt}, \quad (1.43)$$

где M – электромагнитный момент двигателя, J – момент инерции вращающихся частей, приведенный к валу двигателя, M_c – статический мо-

мент или момент сопротивления, который в общем случае равен сумме момента нагрузки и момента трения в подшипниках двигателя.

Вращающий момент двигателя пропорционален току якоря при постоянном потоке:

$$M = c_e \Phi i_a = k_e i_a. \quad (1.44)$$

Тогда из уравнения для моментов $k_e i_a = M_c + J \frac{d\omega}{dt}$ можно получить выражение для тока якоря:

$$i_a = \frac{M_c}{k_e} + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.45)$$

Будем считать, что статический момент (момент сопротивления) на валу двигателя пропорционален угловой скорости, что имеет место при нагрузке типа «сухое трение», т.е. $M_c = k_{cm} \omega$. В этом случае уравнение (1.45) принимает вид:

$$i_a = \frac{k_{cm} \omega}{k_e} + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.46)$$

Из этого уравнения получаем первое уравнение состояния:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{k_{cm}}{J} \omega + \frac{k_e}{J} i_a.$$

Второе уравнение получаем из (1.42):

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{k_e}{L_a} \omega - \frac{R_a}{L_a} i_a + \frac{1}{L_a} u_a.$$

Т.о., получена следующая модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{k_{cm}}{J} \omega + \frac{k_e}{J} i_a; \\ \frac{di_a}{dt} = -\frac{k_e}{L_a} \omega - \frac{R_a}{L_a} i_a + \frac{1}{L_a} u_a. \end{cases}$$

Уравнение выхода:

$$y = C \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + D = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + 0 = \omega.$$

Матрицы состояния и выхода:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{k_{cm}}{J} & \frac{k_e}{J} \\ -\frac{k_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]; \quad D = 0.$$

Получим передаточную функцию двигателя по матрицам уравнений состояния. Для этой цели воспользуемся формулой (1.28).

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p + \frac{k_{cm}}{J} & -\frac{k_e}{J} \\ \frac{k_e}{L_\gamma} & p + \frac{R_\gamma}{L_\gamma} \end{bmatrix}.$$

Алгебраические дополнения полученной матрицы имеют вид:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \left(p + \frac{R_\gamma}{L_\gamma} \right) = p + \frac{R_\gamma}{L_\gamma}; \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \left(\frac{k_e}{L_\gamma} \right) = -\frac{k_e}{L_\gamma};$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \left(-\frac{k_e}{J} \right) = \frac{k_e}{J}; \quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2} \left(p + \frac{k_{cm}}{J} \right) = p + \frac{k_{cm}}{J}.$$

Союзная матрица:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ L_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ L_\gamma \end{bmatrix} = \Delta_{21} \frac{1}{L_\gamma} = \frac{k_e}{L_\gamma J}.$$

Определитель матрицы $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$:

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p + \frac{k_{cm}}{J} & -\frac{k_e}{J} \\ \frac{k_e}{L_\gamma} & p + \frac{R_\gamma}{L_\gamma} \end{vmatrix} = p^2 + \left(\frac{R_\gamma J + L_\gamma k_{cm}}{L_\gamma J} \right) p + \left(\frac{R_\gamma k_{cm} + k_e^2}{L_\gamma J} \right).$$

Передаточная функция ДПТ:

$$\mathbf{W}(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{\frac{k_e}{L_\gamma J}}{p^2 + \left(\frac{R_\gamma J + L_\gamma k_{cm}}{L_\gamma J} \right) p + \left(\frac{R_\gamma k_{cm} + k_e^2}{L_\gamma J} \right)}.$$

В этом примере нам понадобилось только алгебраическое дополнение Δ_{21} , так как матрицы \mathbf{C} и \mathbf{B} содержат нулевые элементы. Поэтому не обязательно находить все алгебраические дополнения матрицы $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

Пусть параметры двигателя имеют следующие значения:

$$R_\gamma = 150 \text{ Ом}; \quad J = 0,018 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad L_\gamma = 0,1 \text{ Гн}; \quad k_e = 2,45; \quad k_{cm} = 0,05.$$

Для этих данных запишем ПФ:

$$W(p) = \frac{\frac{2,45}{0,1 \cdot 0,018}}{p^2 + \left(\frac{15 \cdot 0,018 + 0,1 \cdot 0,05}{0,1 \cdot 0,018} \right) p + \left(\frac{15 \cdot 0,05 + 2,45^2}{0,1 \cdot 0,018} \right)} = \frac{1361}{p^2 + 152,8 p + 3751}.$$

В качестве переменных состояния могут выбираться различные наборы физических величин, поэтому одной и той же модели в виде ОДУ n -го порядка может соответствовать множество моделей в пространстве состояний. И все они должны дать после преобразований одну и ту же ПФ. Убедимся в этом на примере ДПТ, составив для него ДУ второго порядка. Выходной величиной является угловая скорость вала.

Продифференцируем (1.46)

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{k_{\text{см}}}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2}, \quad (1.47)$$

и вместе с (1.46) используем в (1.42):

$$L_{\text{я}} \left(\frac{k_{\text{см}}}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} \right) + R_{\text{я}} \left(\frac{k_{\text{см}}\omega}{k_e} + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt} \right) + k_e \omega = u_{\text{я}}.$$

После несложных преобразований получим ДУ второго порядка относительно угловой скорости вала двигателя:

$$\frac{L_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} + \left(\frac{R_{\text{я}} J + L_{\text{я}} k_{\text{см}}}{k_e^2} \right) \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{R_{\text{я}} k_{\text{см}} + k_e^2}{k_e^2} \right) \omega = \frac{1}{k_e} u_{\text{я}}$$

или

$$\ddot{\omega} + \left(\frac{R_{\text{я}} J + L_{\text{я}} k_{\text{см}}}{L_{\text{я}} J} \right) \dot{\omega} + \left(\frac{R_{\text{я}} k_{\text{см}} + k_e^2}{L_{\text{я}} J} \right) \omega = \frac{k_e}{L_{\text{я}} J} u_{\text{я}}. \quad (1.48)$$

Для получения ПФ запишем ДУ в операторной форме:

$$p^2 \Omega(p) + \left(\frac{R_{\text{я}} J + L_{\text{я}} k_{\text{см}}}{L_{\text{я}} J} \right) p \Omega(p) + \left(\frac{R_{\text{я}} k_{\text{см}} + k_e^2}{L_{\text{я}} J} \right) \Omega(p) = \frac{k_e}{L_{\text{я}} J} U_{\text{я}}(p)$$

или

$$\left[p^2 + \left(\frac{R_{\text{я}} J + L_{\text{я}} k_{\text{см}}}{L_{\text{я}} J} \right) p + \left(\frac{R_{\text{я}} k_{\text{см}} + k_e^2}{L_{\text{я}} J} \right) \right] \Omega(p) = \frac{k_e}{L_{\text{я}} J} U_{\text{я}}(p).$$

Передаточная функция двигателя:

$$W(p) = \frac{\Omega(p)}{U_{\text{я}}(p)} = \frac{\frac{k_e}{L_{\text{я}}J}}{p^2 + \left(\frac{R_{\text{я}}J + L_{\text{я}}k_{\text{см}}}{L_{\text{я}}J}\right)p + \left(\frac{R_{\text{я}}k_{\text{см}} + k_e^2}{L_{\text{я}}J}\right)} = \frac{1361}{p^2 + 152,8p + 3751}.$$

Естественно, получилась та же ПФ, что и выше.

Сформируем по ДУ (1.48) модель в пространстве состояний. В качестве переменных состояния используем выходную величину (угловую скорость) и ее первую производную (угловое ускорение):

$$x_1 = \omega; \quad x_2 = \dot{\omega} = \dot{x}_1 \quad \text{и} \quad \dot{x}_2 = \ddot{\omega}.$$

Выходной величиной является угловая скорость:

$$y = \omega = x_1.$$

Подставим обозначения всех физических переменных в левую часть ДУ так, чтобы в ней была только первая производная второй переменной состояния:

$$\dot{x}_2 + \left(\frac{R_{\text{я}}J + L_{\text{я}}k_{\text{см}}}{L_{\text{я}}J}\right)x_2 + \left(\frac{R_{\text{я}}k_{\text{см}} + k_e^2}{L_{\text{я}}J}\right)x_1 = \frac{k_e}{L_{\text{я}}J}u_{\text{я}}.$$

Отсюда получим второе уравнение состояния, которое вместе с первым $\dot{x}_1 = x_2$ образует систему уравнений состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -\left(\frac{R_{\text{я}}k_{\text{см}} + k_e^2}{L_{\text{я}}J}\right)x_1 - \left(\frac{R_{\text{я}}J + L_{\text{я}}k_{\text{см}}}{L_{\text{я}}J}\right)x_2 + \frac{k_e}{L_{\text{я}}J}u_{\text{я}}. \end{cases} \quad (1.49)$$

Запишем эти уравнения в развернутой матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R_{\text{я}}k_{\text{см}} + k_e^2}{L_{\text{я}}J} & -\frac{R_{\text{я}}J + L_{\text{я}}k_{\text{см}}}{L_{\text{я}}J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_e}{L_{\text{я}}J} \end{bmatrix} u_{\text{я}}.$$

Уравнение выхода:

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1.$$

Запишем матрицы модели:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R_{\text{я}}k_{\text{см}} + k_e^2}{L_{\text{я}}J} & -\frac{R_{\text{я}}J + L_{\text{я}}k_{\text{см}}}{L_{\text{я}}J} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{15 \cdot 0,05 + 2,45^2}{0,1 \cdot 0,018} & -\frac{15 \cdot 0,018 + 2,45 \cdot 0,05}{0,1 \cdot 0,018} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3751 & -152,8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_e}{L_\text{я} J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2,45}{0,1 \cdot 0,018} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1361 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]; \quad D = 0.$$

Уравнения состояния и выхода:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -3751x_1 - 152,8x_2 + 1361u_\text{я}; \\ y = x_1. \end{cases}$$

Теперь получим передаточную функцию по новым уравнениям состояния, воспользовавшись формулой (1.28).

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ \frac{R_\text{я}k_{cm} + k_e^2}{L_\text{я}J} & p + \frac{R_\text{я}J + L_\text{я}k_{cm}}{L_\text{я}J} \end{bmatrix}.$$

Союзная матрица:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_e}{L_\text{я}J} \end{bmatrix} = [\Delta_{11} \quad \Delta_{21}] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_e}{L_\text{я}J} \end{bmatrix} = \Delta_{21} \frac{k_e}{L_\text{я}J}.$$

Найдем только одно алгебраические дополнение матрицы $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$:

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}(-1) = 1.$$

Определитель матрицы $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$:

$$\begin{aligned} \det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} p & -1 \\ \frac{R_\text{я}k_{cm} + k_e^2}{L_\text{я}J} & p + \frac{R_\text{я}J + L_\text{я}k_{cm}}{L_\text{я}J} \end{vmatrix} = \\ &= p^2 + \left(\frac{R_\text{я}J + L_\text{я}k_{cm}}{L_\text{я}J} \right) p + \left(\frac{R_\text{я}k_{cm} + k_e^2}{L_\text{я}J} \right). \end{aligned}$$

Передаточная функция ДПТ:

$$\mathbf{W}(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{\frac{k_e}{L_\text{я}J}}{p^2 + \left(\frac{R_\text{я}J + L_\text{я}k_{cm}}{L_\text{я}J}\right)p + \left(\frac{R_\text{я}k_{cm} + k_e^2}{L_\text{я}J}\right)}.$$

Естественно, выражение для ПФ, полученное по уравнениям состояния, полностью совпадает с выражением, полученным по ДУ.

Пример 1.3. Математическая модель в пространстве состояний двигателя постоянного тока с двумя входами и одним выходом.

В отличие от предыдущей модели, момент сопротивления на валу двигателя является независимой функцией времени, т.е. второй входной величиной модели.

Используя уравнения для цепи якоря и для моментов

$$L_\text{я} \frac{di_\text{я}}{dt} + R_\text{я}i_\text{я} + k_e\omega = u_\text{я}; \quad k_e i_\text{я} = M_c + J \frac{d\omega}{dt},$$

можно получить уравнения состояния ДПТ как ММО системы:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{k_e}{J}i_\text{я} - \frac{M_c}{J}; \\ \frac{di_\text{я}}{dt} = -\frac{k_e}{L_\text{я}}\omega - \frac{R_\text{я}}{L_\text{я}}i_\text{я} + \frac{1}{L_\text{я}}u_\text{я} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = 0 \cdot \omega + \frac{k_e}{J}i_\text{я} + 0 \cdot u_\text{я} - \frac{1}{J}M_c; \\ \frac{di_\text{я}}{dt} = -\frac{k_e}{L_\text{я}}\omega - \frac{R_\text{я}}{L_\text{я}}i_\text{я} + \frac{1}{L_\text{я}}u_\text{я} + 0 \cdot M_c. \end{cases} \quad (1.50)$$

В развернутой матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{di_\text{я}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_e}{J} \\ -\frac{k_e}{L_\text{я}} & -\frac{R_\text{я}}{L_\text{я}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i_\text{я} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_\text{я}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\text{я} \\ M_c \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

Уравнение выхода:

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i_\text{я} \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} u_\text{я} \\ M_c \end{bmatrix} = 1 \cdot \omega + 0 \cdot i_\text{я} + 0 \cdot u_\text{я} + 0 \cdot M_c = \omega.$$

Запишем матрицы состояния и выхода:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_e}{J} \\ -\frac{k_e}{L_\gamma} & -\frac{R_\gamma}{L_\gamma} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_\gamma} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]; \quad \mathbf{D} = [0 \quad 0]$$

Составим передаточную матрицу:

$$\mathbf{W}(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}.$$

$$p\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & -\frac{k_e}{J} \\ \frac{k_e}{L_\gamma} & p + \frac{R_\gamma}{L_\gamma} \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы:

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = p^2 + \frac{R_\gamma}{L_\gamma} p + \frac{k_e^2}{JL_\gamma}.$$

Присоединенную матрицу запишем в общем виде через алгебраические дополнения:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix}.$$

При $\mathbf{D} = [0 \quad 0]$ передаточная матрица находится по формуле:

$$W(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})}.$$

Числитель формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} &= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_\gamma} & 0 \end{bmatrix} = [\Delta_{11} \quad \Delta_{21}] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_\gamma} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{21}}{L_\gamma} & -\frac{\Delta_{11}}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_e}{JL_\gamma} & -\frac{1}{J} \left(p + \frac{R_\gamma}{L_\gamma} \right) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \left(p + \frac{R_\gamma}{L_\gamma} \right) = p + \frac{R_\gamma}{L_\gamma}; \quad \Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \left(-\frac{k_e}{J} \right) = \frac{k_e}{J}.$$

Следовательно, передаточная матрица принимает вид:

$$W(p) = \begin{bmatrix} \frac{k_e}{JL_{я}} & -\frac{1}{J} \left(p + \frac{R_{я}}{L_{я}} \right) \\ p^2 + \frac{R_{я}}{L_{я}} p + \frac{k_e^2}{JL_{я}} & p^2 + \frac{R_{я}}{L_{я}} p + \frac{k_e^2}{JL_{я}} \end{bmatrix} = [W_{11}(p) \quad W_{12}(p)]$$

или

$$W(p) = \begin{bmatrix} \frac{k_e}{JL_{я}p^2 + JR_{я}p + k_e^2} & \frac{-(L_{я}p + R_{я})}{JL_{я}p^2 + JR_{я}p + k_e^2} \end{bmatrix}.$$

Пусть двигатель характеризуется следующими параметрами:

$$R_{я} = 15 \text{ Ом}; \quad J = 0,018 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad L_{я} = 0,1 \text{ Гн}; \quad k_e = 2,45.$$

Запишем передаточные функции:

– передаточная функция с первого входа на выход

$$W_{11}(p) = \frac{\Omega(p)}{u_{я}(p)} = \frac{\frac{k_e}{L_{я}J}}{p^2 + \frac{R_{я}}{L_{я}} p + \frac{k_e^2}{L_{я}J}} = \frac{1361}{p^2 + 150p + 3335} = \frac{2,45}{1,8 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,27p + 6};$$

– передаточная функция со второго входа на выход

$$W_{12}(p) = \frac{\Omega(p)}{M_c(p)} = \frac{-\left(\frac{1}{J} \cdot p + \frac{R_{я}}{L_{я}J} \right)}{p^2 + \frac{R_{я}}{L_{я}} p + \frac{k_e^2}{L_{я}J}} = \frac{-55,56p - 8333}{p^2 + 150p + 3335} = \frac{-(0,1p + 15)}{1,8 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,27p + 6}.$$

Создадим передаточную матрицу в MatLab с помощью матриц уравнений состояния:

```
%Исходные данные
R=15;L=0.1;J=0.018;Ke=2.45;
%Матрицы уравнений состояния
A=[0 Ke/J;-Ke/L -R/L];B=[0 -1/J;1/L 0];
C=[1 0];D=[0 0];
%SS модель
Hss=ss(A,B,C,D);
%Передаточная матрица
Wtf=tf(Hss)
%ZPK модель
Wzpk=zpk(Wtf)
```

В командном окне:

Transfer function from input 1 to output:

 $s^2 + 150 s + 3335$

Transfer function from input 2 to output:

$-55.56 s - 8333$

$s^2 + 150 s + 3335$

Zero/pole/gain from input 1 to output:

1361.1111

$(s+122.9) (s+27.14)$

Zero/pole/gain from input 2 to output:

$-55.5556 (s+150)$

$(s+122.9) (s+27.14)$

Составим для двигателя ДУ второго порядка. Используя уравнение для тока якоря (1.45)

$$i_{\text{я}} = \frac{M_c}{k_e} + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt},$$

определим производную тока

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{1}{k_e} \frac{dM_c}{dt} + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение цепи якоря (1.40), получим:

$$\frac{L_{\text{я}}}{k_e} \cdot \frac{dM_c}{dt} + \frac{L_{\text{я}}J}{k_e} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{R_{\text{я}}}{k_e} M_c + \frac{R_{\text{я}}J}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt} + k_e \omega = u_{\text{я}}$$

Подчеркнем, что угловая скорость и статический момент на валу являются функциями времени:

$$\frac{L_{\text{я}}J}{k_e^2} \cdot \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{R_{\text{я}}J}{k_e^2} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{k_e} u_{\text{я}}(t) - \frac{R_{\text{я}}}{k_e^2} M_c(t) - \frac{L_{\text{я}}}{k_e^2} \cdot \frac{dM_c(t)}{dt} \quad (1.52)$$

или

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{k_e^2}{L_{\text{я}}J} \omega(t) = \frac{k_e}{L_{\text{я}}J} u_{\text{я}}(t) - \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}J} M_c(t) - \frac{1}{J} \cdot \frac{dM_c(t)}{dt}. \quad (1.53)$$

Запишем это ДУ в операторной форме:

$$p^2 \Omega(p) + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} p \Omega(p) + \frac{k_e^2}{L_{\text{я}}J} \Omega(p) = \frac{k_e}{L_{\text{я}}J} U_{\text{я}}(p) - \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}J} M_c(p) - \frac{1}{J} \cdot p M_c(p)$$

Первым входом будем считать напряжение якоря, вторым – момент сопротивления на валу двигателя. С учетом этого запишем матричное уравнение:

$$[\Omega(p)] = \begin{bmatrix} \frac{\Omega(p)}{U_{\text{я}}(p)} & \frac{\Omega(p)}{M_c(p)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{\text{я}}(p) \\ M_c(p) \end{bmatrix} = [W_{11}(p) \quad W_{12}(p)] \cdot \begin{bmatrix} U_{\text{я}}(p) \\ M_c(p) \end{bmatrix}.$$

Для нахождения передаточной функции с первого входа на выход нужно, согласно принципу суперпозиции, вторую входную величину принять равной нулю. Для нахождения передаточной функции с второго входа на выход нужно первую входную величину принять равной нулю.

В результате получим две ПФ:

– передаточная функция с первого входа на выход:

$$W_{11}(p) = \frac{\Omega(p)}{U_{\text{я}}(p)} = \frac{\frac{k_e}{L_{\text{я}}J}}{p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}}p + \frac{k_e^2}{L_{\text{я}}J}} = \frac{1361}{p^2 + 150p + 3335};$$

– передаточная функция со второго входа на выход:

$$W_{12}(p) = \frac{\Omega(p)}{M_c(t)} = \frac{-\left(\frac{1}{J} \cdot p + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}J}\right)}{p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}}p + \frac{k_e^2}{L_{\text{я}}J}} = \frac{-55,56p - 8333}{p^2 + 150p + 3335}.$$

Теперь эти передаточные функции можно записать в виде передаточной матрицы:

$$W(p) = [W_{11}(p) \quad W_{12}(p)] = \begin{bmatrix} \frac{1361}{p^2 + 150p + 3335} & \frac{-55,6 \cdot (p + 150)}{p^2 + 150p + 3335} \end{bmatrix}.$$

Домашнее задание. Дана схема линейной электрической цепи и параметры ее элементов (Таблица 1.1). Требуется найти передаточную функцию с помощью операторной схемы замещения при нулевых начальных условиях и по ней записать ДУ, связывающее входное u_1 и выходное u_2 напряжения. Создать в MatLab модели TF и ZPK и построить полюсно-нулевую диаграмму. Создать в MatLab каноническую SS модель и по ней вручную определить ПФ цепи (см. пример выполнения задания).

Таблица 1.1. Таблица параметров

Параметры	ВАРИАНТЫ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_1, \text{ Ом}$	5	12	10	20	18	12	8	14	10	12
$R_2, \text{ Ом}$	12	5	12,5	10	15	10	10	18	15	15
$R_3, \text{ Ом}$	15	20	5	12,5	12,5	20	15	15	20	10
$R_H, \text{ Ом}$	20	10	15	5	20	12	22	10	22	25
$L, \text{ Гн}$	0,08	0,1	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2	0,15	0,17	0,19
$C, \text{ мкФ}$	10	45	20	55	35	15	50	25	40	30

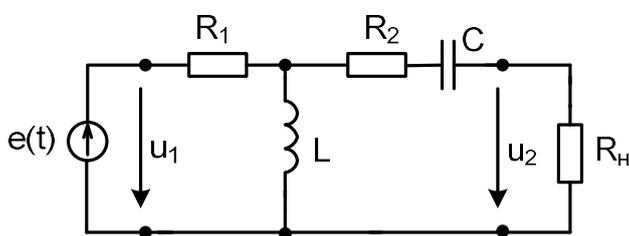


Схема 0

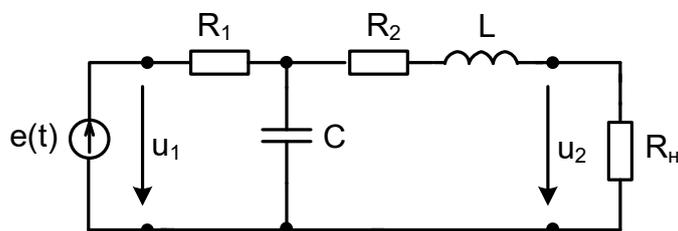


Схема 1

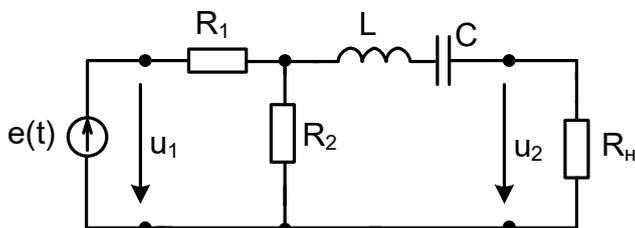


Схема 2

Рис. 1.4. Электрические схемы для выполнения домашнего задания

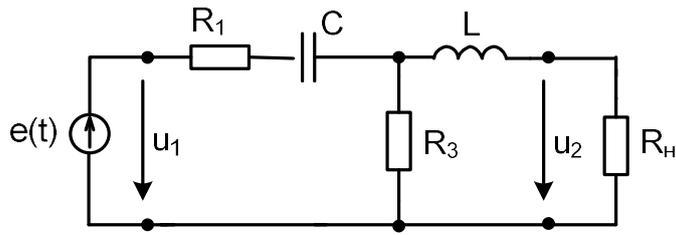


Схема 3

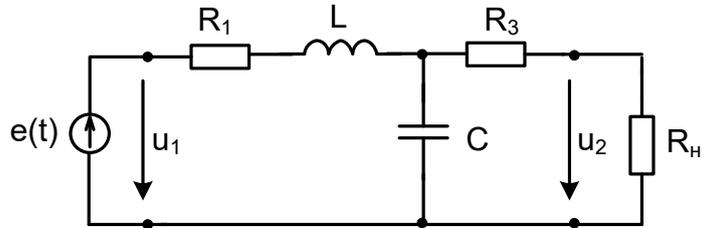


Схема 4

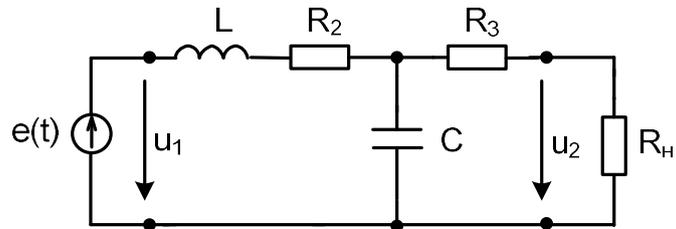


Схема 5

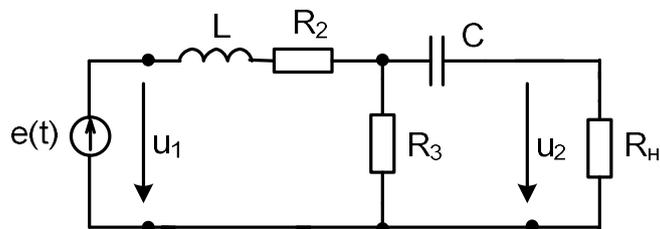


Схема 6

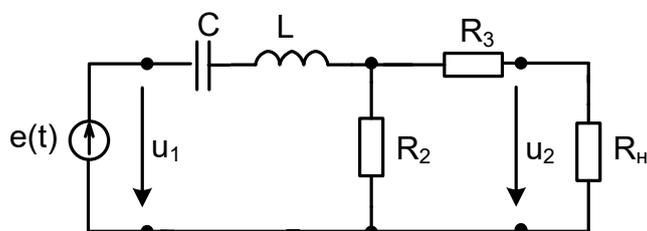


Схема 7

Рис. 1.5. Электрические схемы для выполнения домашнего задания (продолжение)

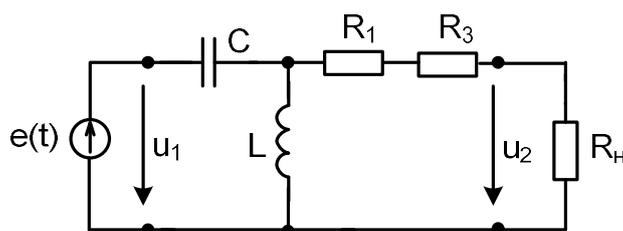


Схема 8

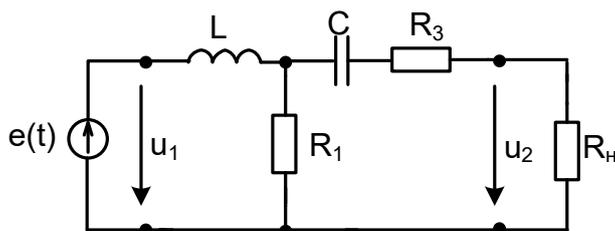


Схема 9

Рис. 1.6. Электрические схемы для выполнения домашнего задания (окончание)

Примечание. Номер варианта задается двузначным числом (две последние цифры номера зачетной книжки). Первая цифра этого числа – номер варианта в таблице параметров, вторая цифра – номер схемы.

Пример выполнения домашнего задания.

Задана электрическая схема (Рис. 1.7) и параметры элементов. Требуется найти передаточную функцию и по ней записать ДУ. Затем получить в MatLab модальную форму канонической модели и по ней расчетным путем ПФ. Входной величиной является напряжение на входе схемы, выходной – напряжение на сопротивлении.

Исходные данные: $R = 40 \text{ Ом}$; $R_n = 100 \text{ Ом}$; $C = 100 \cdot 10^{-6} = 10^{-4} \text{ Ф}$.

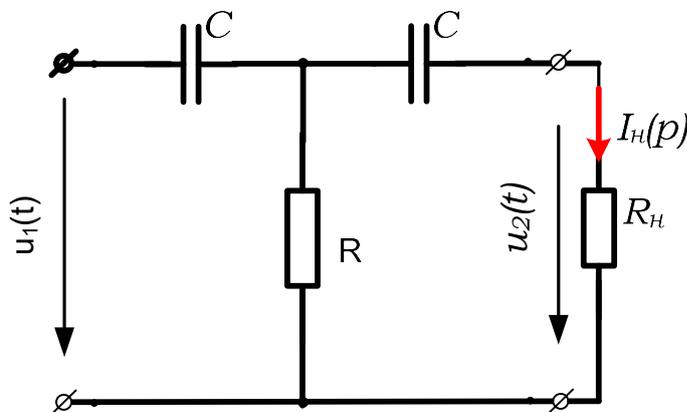


Рис. 1.7. Схема к примеру выполнения домашнего задания

Решение. Составим операторную схему замещения (Рис. 1.8) и для получения ПФ воспользуемся методом контурных токов.

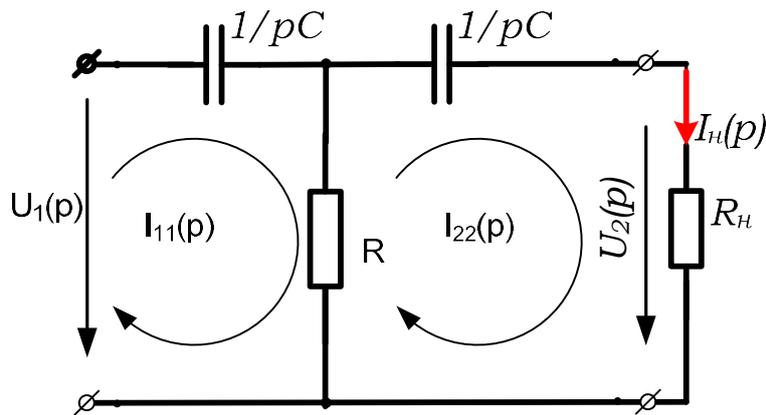


Рис. 1.8. Операторная схема замещения к примеру

Контурные сопротивления операторной схемы – собственные и общие и контурные ЭДС:

$$Z_{11}(p) = R + \frac{1}{pC} = \frac{Rp + \frac{1}{C}}{p} = \frac{40p + 10^4}{p}; \quad Z_{22}(p) = R + R_n + \frac{1}{pC} = \frac{140p + 10^4}{p};$$

$$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = -R = -40; \quad E_{11}(p) = U_1(p); \quad E_{22}(p) = 0.$$

Главный определитель контурных уравнений:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) \end{vmatrix} = Z_{11}(p)Z_{22}(p) - Z_{12}(p)Z_{21}(p) = \\ = \frac{(40p + 10^4)(140p + 10^4)}{p^2} - 40^2 = \frac{4000(p^2 + 450p + 2,5 \cdot 10^4)}{p^2}.$$

Второй вспомогательный определитель (первый не понадобится):

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} Z_{11}(p) & E_{11}(p) \\ Z_{21}(p) & E_{22}(p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11}(p) & U_1(p) \\ Z_{21}(p) & 0 \end{vmatrix} = -Z_{21}(p)U_1(p) = 40U_1(p).$$

Второй контурный ток и напряжение на выходе:

$$I_{22}(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{40p^2 U_1(p)}{4000(p^2 + 450p + 2,5 \cdot 10^4)};$$

$$U_2(p) = R_n I_{22}(p) = \frac{100 \cdot 40p^2 U_1(p)}{4000(p^2 + 450p + 2,5 \cdot 10^4)} = \frac{p^2 U_1(p)}{p^2 + 450p + 2,5 \cdot 10^4}$$

ПФ цепи:

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{p^2}{p^2 + 450p + 2,5 \cdot 10^4}.$$

Теперь по ПФ запишем операторное уравнение

$$p^2 U_2(p) + 450p U_2(p) + 2,5 \cdot 10^4 U_2(p) = p^2 U_1(p),$$

а затем восстановим ДУ:

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + 450 \cdot \frac{du_2}{dt} + 2,5 \cdot 10^4 u_2 = \frac{d^2 u_1}{dt^2}$$

или

$$\ddot{u}_2 + 450 \cdot \dot{u}_2 + 2,5 \cdot 10^4 u_2 = \ddot{u}_1.$$

Используя ПФ, составим с помощью MatLab каноническую модель в пространстве состояний в модальной форме:

```
%Передаточная функция
W=tf([1 0 0],[1 450 25000])
%Создание SS модели
Wcan=canon(W,'modal')
%Создание ZPK модели
Wz=zpk(Wcan)
```

В командном окне

```
Transfer function:
      s^2
-----
s^2 + 450 s + 25000
a =
      x1      x2
      x1  -385.1      0
      x2      0  -64.92
b =
      u1
      x1  -38.62
      x2  -7.234
c =
      x1      x2
      y1  11.99  -1.82
d =
      u1
      y1      1

Zero/pole/gain:
(s^2 + 1.41e-012)
-----
(s+385.1) (s+64.92)
```

Выпишем матрицы уравнений состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -385,1 & 0 \\ 0 & -64,9 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -38,62 \\ -7,23 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [12 \quad -1,82]; \quad \mathbf{D} = 1.$$

Сформируем ПФ.

Составим матрицу $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})$:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p + 385,1 & 0 \\ 0 & p + 64,9 \end{bmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения полученной матрицы:

$$\Delta_{11} = p + 64,9; \quad \Delta_{12} = 0; \quad \Delta_{21} = 0; \quad \Delta_{22} = p + 385,1.$$

Союзная матрица::

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + 64,9 & 0 \\ 0 & p + 385,1 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} &= [12 \quad -1,82] \begin{bmatrix} p + 64,9 & 0 \\ 0 & p + 385,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -38,62 \\ -7,23 \end{bmatrix} = \\ &= [12(p + 64,9) \quad -1,82(p + 385,1)] \begin{bmatrix} -38,62 \\ -7,23 \end{bmatrix} = -450p - 25000. \end{aligned}$$

Определитель матрицы $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})$:

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p + 385,1 & 0 \\ 0 & p + 64,9 \end{vmatrix} = p^2 + 450p + 25000.$$

Передаточная функция цепи:

$$\mathbf{W}(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{-450p - 25000}{p^2 + 450p + 25000} + 1 = \frac{p^2}{p^2 + 450p + 25000}.$$

Примечание.

Имеются две особые формы записи моделей в пространстве состояний, которые называются *каноническими*. Наличие TF, ZPK или SS моделей позволяет в MATLAB получить эти два типа канонической модели в пространстве состояний с помощью команды **canon** в следующей записи:

```
csys = canon(sys, 'type')
```

Команда **canon** поддерживает два типа канонических форм: Modal Form и Companion Form.

В *модальной форме* ('modal') действительные собственные числа матрицы \mathbf{A} (корни характеристического уравнения) появляются на главной диагонали матрицы коэффициентов, а в случае комплексных собст-

венных чисел матрицы действительные части располагаются на главной диагонали, а мнимые – справа и слева от них.

Модальная форма для ПФ рассматриваемого примера приведена выше. В канонической форме 'companion' коэффициенты приведенного характеристического полинома, взятые с обратным знаком, появляются в крайнем справа столбце матрицы, а на диагонали, которая располагается под главной, стоят единицы. Для системы с характеристическим полиномом

$$D(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0$$

соответствующая матрица имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Составим и эту модель.

```
%Исходные данные
R=40; Rn=100; C=1e-4;
%Передаточная функция
W=tf([1 0 0],[1 450 25000])
Hcan=canon(W, 'companion')
В командном окне
a =
      x1      x2
      x1      0  -2.5e+004
      x2      1    -450
b =
      u1
      x1      1
      x2      0
c =
      x1      x2
      y1      -450  1.775e+005
d =
      u1
      y1      1
```

Из этой модели, как и модальной, можно получить передаточную функцию (вручную или в MatLab).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2. СОСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ МЕТОДАМИ ПРЯМОГО, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО И ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ранее было показано, как можно получить ПФ системы, используя дифференциальное уравнение или модель в пространстве состояний (SS модель). Теперь рассмотрим методы получения уравнений состояния по ПФ системы. Эти методы основаны на использовании схем моделирования, т.е. структурных схем.

Элементами таких схем являются:

- буквенные обозначения сигналов $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ и т.д.;
- буквенные обозначения операторов, например $W(p)$;
- графические обозначения – линии связи и стрелки, указывающие направления действия сигналов (Рис. 2.1, а);
- узлы, соответствующие разветвлениям сигналов (Рис. 2.1, б);
- блоки с указанием операторов преобразования, входных и выходных сигналов (Рис. 2.1, в).

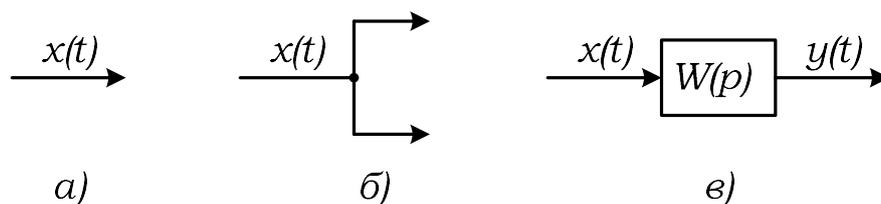


Рис. 2.1. Элементы структурных схем

Блок, для которого установлены причинно-следственным отношением входные и выходные сигналы, называется *кибернетическим блоком*. Выходной сигнал блока несет информацию о внутреннем процессе, причиной которого является входной сигнал.

К простейшим блокам, используемым в структурных схемах, относятся, в частности:

- блок сравнения (Рис. 2.2, а);
- алгебраический сумматор (Рис. 2.2, б);
- пропорциональное звено $y(t)=kx(t)$ (Рис. 2.2, в);
- интегратор (Рис. 2.2, г).

Основным элементом схем моделирования является интегратор. Этот блок осуществляет интегрирование по времени входного сигнала, т.е. характеризуется уравнением

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

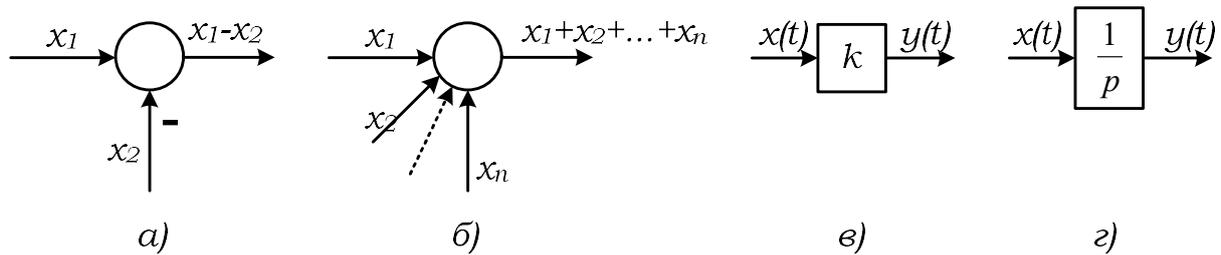


Рис. 2.2. Простейшие блоки структурных схем

которое в операторной форме принимает вид:

$$Y(p) = \frac{1}{p} X(p). \quad (2.2)$$

Следовательно, ПФ блока, выполняющего операцию интегрирования, имеет вид:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p}. \quad (2.3)$$

Если на выходе интегратора действует сигнал $y(t)$, то на его входе – производная этого сигнала $\frac{dy}{dt}$. Если последовательно соединить два интегратора, то на входе соединения будет вторая производная выходного сигнала, Рис. 2.3:

$$\ddot{y}(t) = \frac{d^2 y}{dt^2}. \quad (2.4)$$

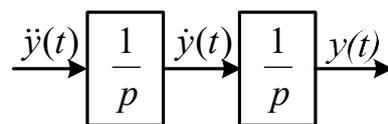


Рис. 2.3. Цепочка из двух интеграторов

Такую цепочку из двух интеграторов можно, например, использовать для построения схем моделирования систем 2-го порядка.

Рассмотрим несколько примеров построения схем моделирования, располагая различными моделями: в пространстве состояний, передаточной функцией и дифференциальным уравнением n -го порядка.

Пример 2.1. Задана модель в пространстве состояний двигателя постоянного тока (см. пример 1.2):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -3751x_1 - 152,8x_2 + 1361u_a; \\ y = x_1. \end{cases}$$

Требуется составить схему моделирования.

В приведенной модели в качестве переменных состояния выбраны выходная величина (угловая скорость двигателя) и ее первая производная, т.е. скорость изменения выходной величины. Такие величины называют *переменными состояния нормальной формы*. В схеме моделирования два интегратора включены последовательно, причем на выходе правого интегратора действует переменная состояния x_1 , на выходе левого – переменная состояния x_2 . Согласно второму УС, на вход левого интегратора подается взвешенная сумма переменных состояния и управляющего воздействия.

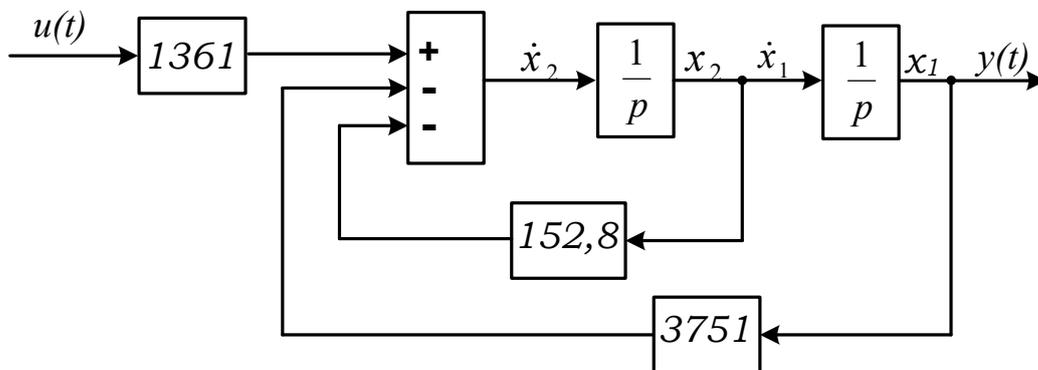


Рис. 2.4. Схема моделирования к примеру 2.1

Пример 2.2. Требуется составить схему моделирования звена первого порядка, заданного в виде ПФ

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} \quad \text{или} \quad W(p) = \frac{k/T}{p + 1/T}.$$

ПФ звена можно представить в виде произведения двух ПФ:

$$W(p) = \frac{1}{p + 1/T} \cdot k/T = W_1(p)W_2(p)$$

Составим структурную схему с последовательным соединением звеньев:

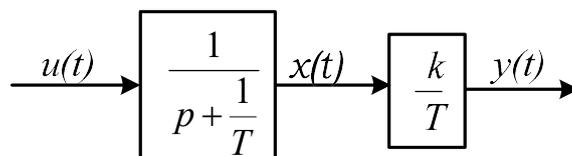


Рис. 2.5. Структурная схема к примеру 2.2

Обозначим сигнал на выходе первого (левого) звена переменной состояния $x(t)$. Так как $W_1(p) = \frac{1}{p + 1/T} = \frac{X(p)}{U(p)}$, можно записать операторное уравнение для первого звена

$$pX(p) + \frac{1}{T}X(p) = U(p) \text{ или } pX(p) = U(p) - \frac{1}{T}X(p).$$

Система уравнений для соединения в целом:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{T}x + u; \\ y = \frac{k}{T}x. \end{cases}$$

Схема моделирования представлена на рис. 2.2.

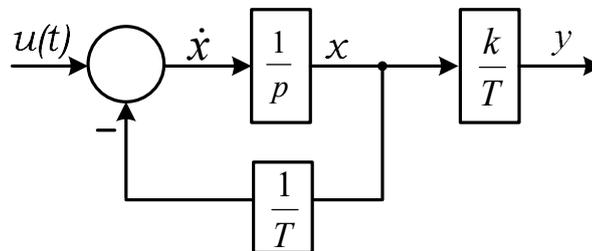


Рис. 2.6. Схема моделирования к примеру 2.2

Пример 2.3. Составить схему моделирования системы, описываемой ДУ второго порядка:

$$\ddot{y} + 100\dot{y} + 20000y = \ddot{u} + 20000u.$$

Выразим старшую производную выходного сигнала:

$$\ddot{y} = \ddot{u} + 20000u - 100\dot{y} - 20000y.$$

Перейдем от дифференциальной формы описания к интегральной. Для этого дважды проинтегрируем это ДУ. После первого интегрирования получим:

$$\dot{y} = \dot{u} + 20000 \int_0^t u(\tau) d\tau - 100y - 20000 \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Отсутствие в правой части выражения постоянной интегрирования $C = \dot{y}(0)$ объясняется тем, что нас интересует не решение уравнения, а структурная схема, которая будет реализовывать нужное поведение. В структурной схеме начальные условия для выходной величины и ее производных будут задаваться начальными значениями переменных состояния на выходах интеграторов.

Результат второго интегрирования:

$$y = u - 100 \int_0^t y d\tau - 20000 \int_0^t \int_0^\tau y d\tau_1 d\tau + 20000 \int_0^t \int_0^\tau u d\tau_1 d\tau =$$

$$= u + \int_0^t \left[-100y + \int_0^\tau (-20000y + 20000u) d\tau_1 \right] d\tau$$

Учитывая, что переменные состояния действуют на выходах интеграторов, обозначим

$$x_2 = \int_0^\tau (-20000y + 20000u) d\tau_1,$$

$$x_1 = \int_0^t \left[-100y + \int_0^\tau (-20000y + 20000u) d\tau_1 \right] d\tau = \int_0^t (-100y + x_2) d\tau.$$

Тогда

$$y = u + x_1$$

и, следовательно,

$$x_1 = \int_0^t (-100x_1 + x_2 - 100u) d\tau,$$

$$x_2 = \int_0^\tau -20000x_1 d\tau_1,$$

Записав уравнения состояний в дифференциальном виде, окончательно получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -100x_1 + x_2 - 100u; \\ \dot{x}_2 = -20000x_1; \\ y = x_1 + u. \end{cases}$$

Запишем матрицы модели:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 1 \\ -20000 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]; \quad D = 1.$$

Проверим правильность результата с помощью определения ПФ в Matlab:

```
A = [-100 1; -20000 0]; B = [-100; 0]; C = [1 0]; D = 1;
Hs = ss(A, B, C, D)
W = tf(Hs)
```

В командном окне

Transfer function:

$$s^2 - 4.045e-015 s + 20000$$

$$s^2 + 100 s + 2e004$$

По модели составим схему моделирования:

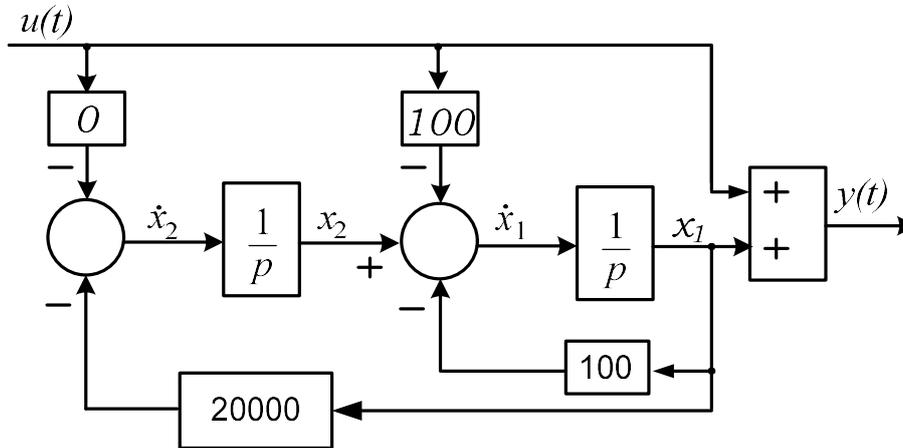


Рис. 2.7. Схема моделирования к примеру 2.3

Схемы моделирования систем управления полезны с двух точек зрения. Во-первых, наличие схем моделирования позволяет составлять и исследовать модели в пространстве состояний. Во-вторых, с помощью этих схем можно осуществлять визуальное моделирование систем в специальных средах визуального моделирования, в частности в среде SIMULINK.

Составим в среде SIMULINK схему моделирования для примера 2.1 и подадим на нее единичное ступенчатое воздействие. Так как для этой модели переменные состояния являются фазовыми переменными (выходная величина и ее скорость изменения), то помимо графиков изменения переменных состояния имеет смысл построить и *фазовую траекторию* переходного процесса, т.е. зависимость $x_2(x_1)$. Для этого воспользуемся блоком **XY Graph** из библиотеки **Sinks**. Кроме него в схеме используем два осциллографа (Scope) для получения графиков изменения переменных состояния.

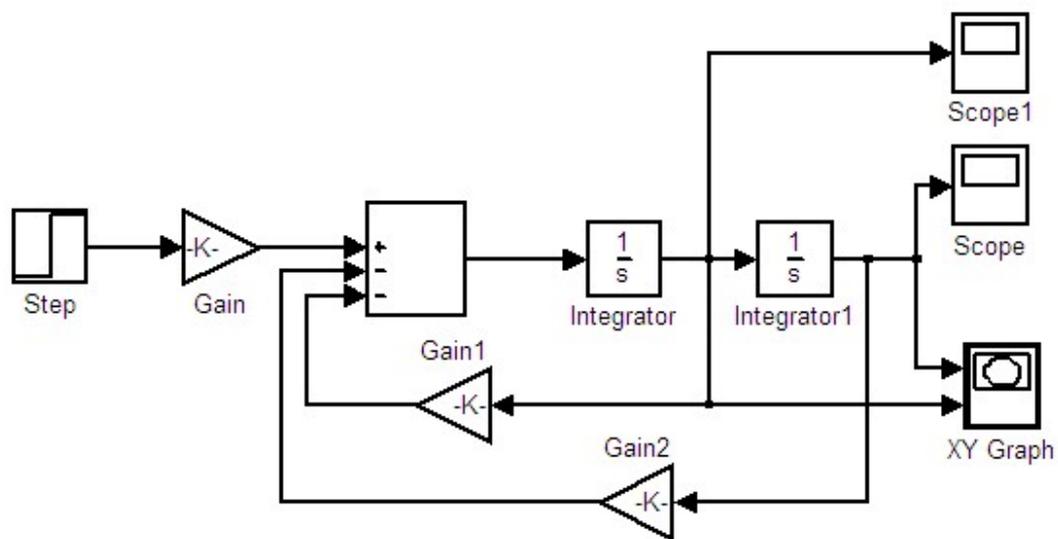


Рис. 2.8. Схема моделирования в SIMULINK к примеру 2.1

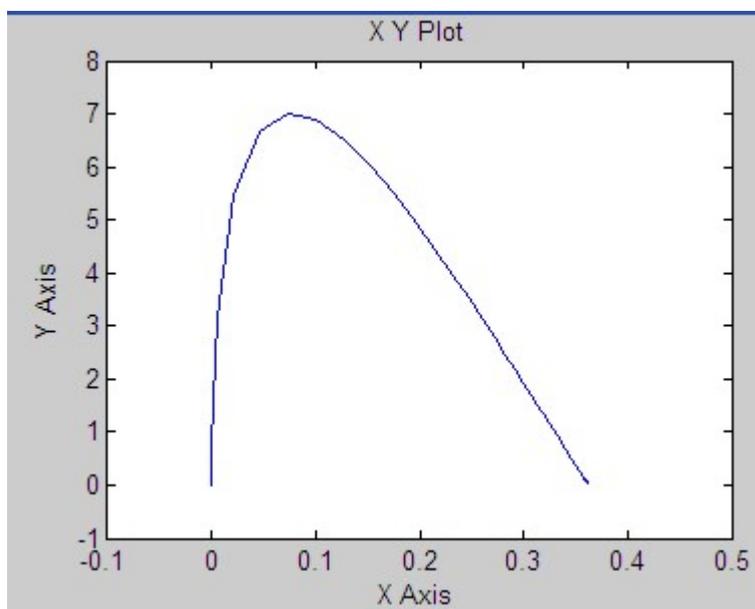


Рис. 2.9. Фазовая траектория переходного процесса

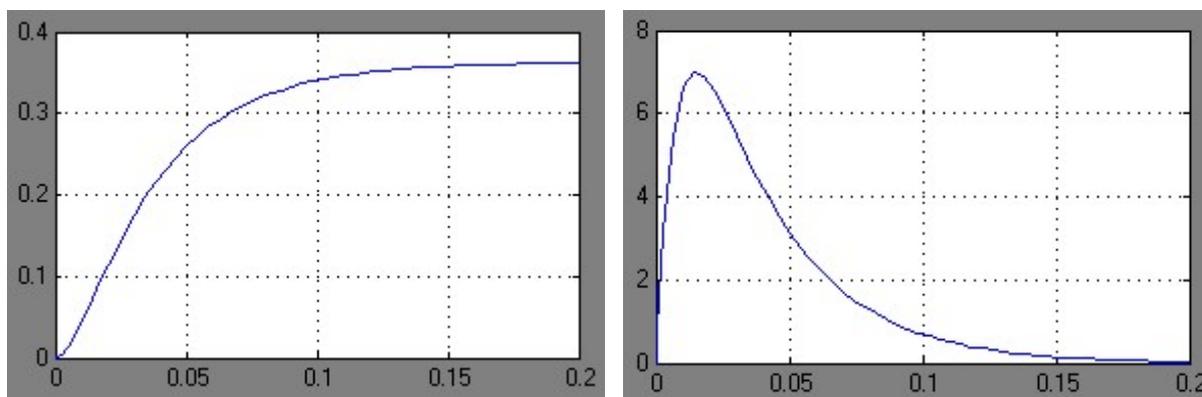


Рис. 2.10. Графики изменения переменных состояния

Составим в среде SIMULINK схему моделирования для примера 2.3, подадим на нее единичное ступенчатое воздействие и построим график изменения выходной переменной.

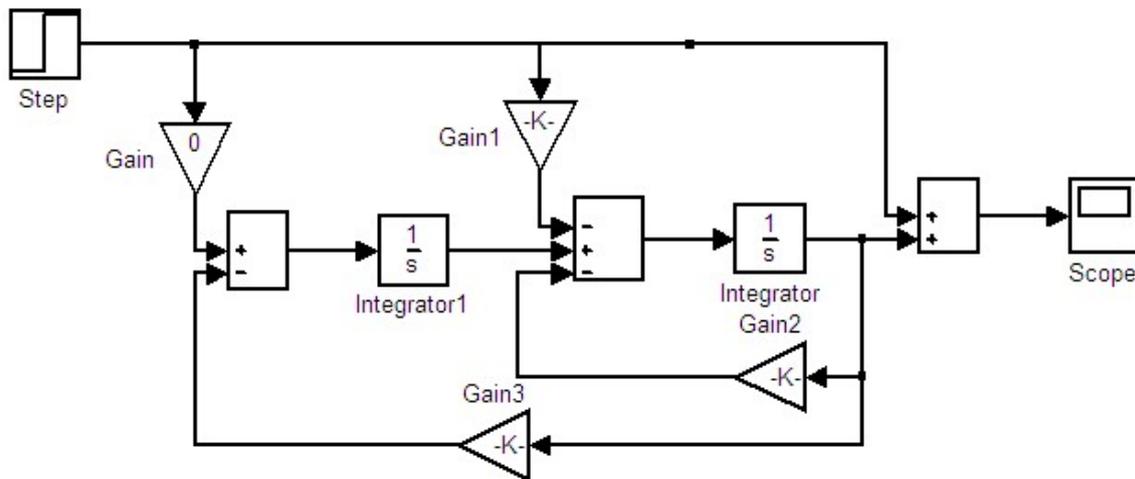


Рис. 2.11. Схема моделирования в SIMULINK к примеру 2.3

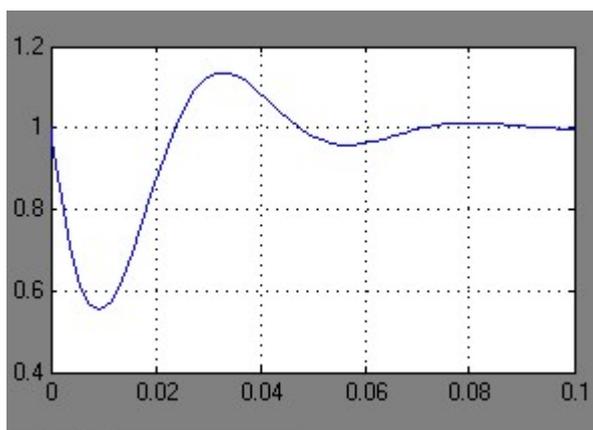


Рис. 2.12. Графики изменения выходной величины в примере 2.3

При составлении схем моделирования нужно учитывать следующее: если схема моделирования строится на основе ДУ системы в переменных состояния, то решение является однозначным. Если же используется ПФ, то схема моделирования может иметь различную конфигурацию, т.е. решение уже не будет однозначным. Для одной ПФ можно построить множество структурных схем и таким образом получить множество моделей в пространстве состояний. Вид модели зависит от метода преобразования. Существует несколько таких методов (в примере 2.3. рассмотрен один из них, другие будут рассмотрены ниже). Все методы применимы для физически реализуемых передаточных функций.

Передаточная функция является физически реализуемой, если порядок ее числителя не больше порядка знаменателя. В таком случае структурную схему системы можно построить, используя лишь блоки интегри-

рования, масштабирования и суммирования/вычитания, описанные выше. Само понятие физической реализуемости связано с тем, что до появления цифровых компьютеров моделирование систем управления проводилось на аналоговых вычислительных машинах, где перечисленные выше блоки были реализованы в виде электронных схем на базе операционных усилителей.

Если порядок числителя передаточной функции больше порядка знаменателя, то представление системы в виде структурной схемы будет обязательно содержать блоки дифференцирования. *Дифференцирование сигнала в реальном времени является физически нереализуемой операцией*, поскольку для вычисления производной необходимо знать не только текущее и предыдущие его значения, но и будущие, а это в реальном времени невозможно. Действительно, определяя производную функции по ее графику в определенной точке, мы строим касательную в данной точке и находим ее угловой коэффициент. Для того чтобы построить касательную, очевидно, нужно «видеть» график функции как слева, так и справа от точки определения производной.

Однако операция дифференцирования все же применяется и в реальных системах управления, и в системах имитационного моделирования. Выполняется она всегда не точно, а приближенно. С одной стороны, приближенность реализации носит вынужденный характер. Так, например, в цифровой реализации производная часто вычисляется как отношение разности между текущим и предыдущим отсчетами сигнала к величине шага по времени. Очевидно при этом, что чем меньше шаг, тем точнее реализация. Однако это справедливо только для моделей, в которых действуют «чистые», не зашумленные сигналы. В реальных системах приближенность вносится искусственно, например, введением предварительной фильтрации сигнала, т.е. «сглаживания» его фильтром низкой частоты для исключения высокочастотных шумов. Если сигнал не фильтровать, дифференцирование будет усиливать помехи, которые всегда есть в полезном сигнале, и, тем самым, устройство будет большей частью реагировать на шум, а не на полезный сигнал.

2.1. Метод прямого программирования

Довольно удобной моделью системы являются уравнения состояния в фазовом пространстве, в которых переменные состояния связаны операциями дифференцирования/интегрирования. Схема моделирования, составленная по такой модели, называется *канонической схемой управляемости*. Для получения такой схемы применяется метод прямого программирования.

Метод прямого программирования применим для систем, ПФ которых может иметь как вещественные, так и комплексно сопряженные нули и полюса.

Рассмотрим данный метод на примере системы третьего порядка с передаточной функцией

$$T(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Разделим числитель и знаменатель на максимальную степень оператора p полинома знаменателя:

$$T(p) = \frac{b_2 p^{-1} + b_1 p^{-2} + b_0 p^{-3}}{1 + a_2 p^{-1} + a_1 p^{-2} + a_0 p^{-3}} = \frac{N(p)}{D(p)}. \quad (2.5)$$

Введем вспомогательную функцию $E(p)$. Она представляет собой произведение

$$E(p) = \frac{1}{D(p)} \times U(p).$$

Из (2.5) получим:

$$\begin{aligned} U(p) &= E(p)D(p) = E(p)(1 + a_2 p^{-1} + a_1 p^{-2} + a_0 p^{-3}) = \\ &= E(p) + a_2 p^{-1} E(p) + a_1 p^{-2} E(p) + a_0 p^{-3} E(p) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) получим выражение для $E(p)$:

$$E(p) = U(p) - a_2 p^{-1} E(p) - a_1 p^{-2} E(p) - a_0 p^{-3} E(p). \quad (2.7)$$

Теперь можно составить фрагмент схемы моделирования, относящийся к входу схемы. Для этого понадобится сумматор, на выходе которого присутствует переменная $E(p)$, и три интегратора для получения трех последних слагаемых правой части (2.7), которые и подадим на сумматор с отрицательными знаками согласно (2.7):

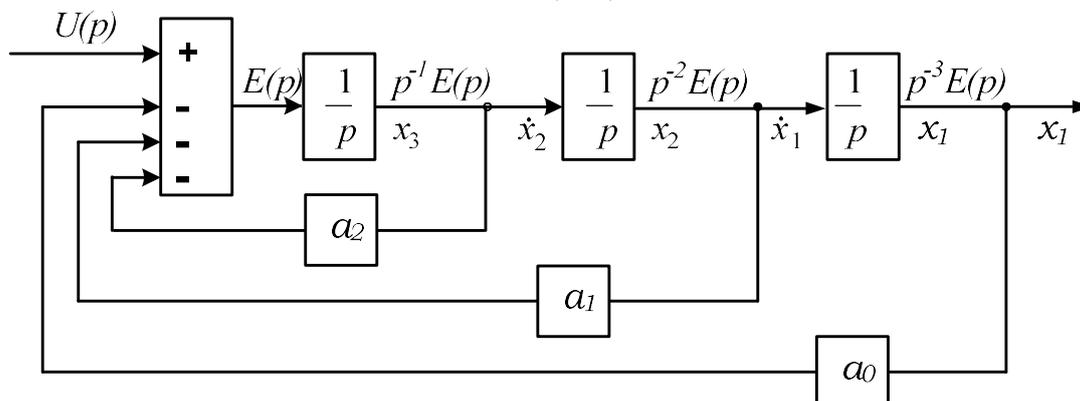


Рис. 2.13. Фрагмент схемы для системы третьего порядка

В такой схеме первая переменная состояния $x_1(t)$ присутствует на выходе последнего интегратора, вторая переменная состояния $x_2(t)$ – на выходе предпоследнего интегратора и т.д. Нанесем переменные состояния на схему моделирования. Для такой схемы можно сразу записать уравнения состояния. Они имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - a_2x_3(t) + u(t). \end{cases}$$

Другой способ составления уравнений состояния – без использования фрагмента схемы моделирования. Рассмотрим и этот способ.

Введем в рассмотрение переменные состояния, изображения которых зададим следующим образом:

$$X_3(p) = p^{-1}E(p);$$

$$X_2(p) = p^{-2}E(p) = p^{-1}X_3(p) = \frac{1}{p}X_3(p);$$

$$X_1(p) = p^{-3}E(p) = p^{-1}X_2(p) = \frac{1}{p}X_2(p).$$

Уравнение для $X_3(p)$ с учетом (2.7) запишем в виде:

$$\begin{aligned} X_3(p) &= p^{-1}E(p) = p^{-1}[U(p) - a_2p^{-1}E(p) - a_1p^{-2}E(p) - a_0p^{-3}E(p)] = \\ &= \frac{1}{p} \cdot [U(p) - a_2p^{-1}E(p) - a_1p^{-2}E(p) - a_0p^{-3}E(p)] = \\ &= \frac{1}{p} \cdot [U(p) - a_2X_3(p) - a_1X_2(p) - a_0X_1] = \\ &= \frac{1}{p} \cdot [-a_0X_1(p) - a_1X_2(p) - a_2X_3 + U(p)]. \end{aligned}$$

Полученные уравнения запишем в виде:

$$\begin{cases} pX_1(p) = X_2(p); \\ pX_2(p) = X_3(p); \\ pX_3(p) = -a_0X_1(p) - a_1X_2(p) - a_2X_3 + U(p) \end{cases} \quad (2.8)$$

Записав полученные операторные уравнения (2.8) для оригиналов при нулевых начальных условиях, получим уравнения состояния нормальной формы Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - a_2x_3(t) + u(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

Отметим, что в прямом программировании вид уравнений состояния определяется только знаменателем ПФ, поэтому УС могут быть записаны сразу же по знаменателю передаточной функции.

Запишем уравнения состояния в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.10)$$

Выпишем матрицы состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Правила формирования матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} :

1) в последней строке матрицы \mathbf{A} находятся коэффициенты характеристического уравнения системы, начиная со свободного члена, взятые со знаком минус;

2) остальные элементы матрицы \mathbf{A} равны нулю, кроме элементов, расположенных над главной диагональю – они равны единице.

3) матрица \mathbf{B} представляет собой столбец, последний элемент которого равен единице, остальные элементы – нулевые.

Если система имеет матрицу состояния \mathbf{A} вида (2.11), то ее характеристическое уравнение

$$p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0. \quad (2.12)$$

Если структура УС для фазовых переменных определяется только полиномом знаменателя ПФ, то уравнение выхода зависит от числителя ПФ. Для получения этого уравнения представим изображение *выходного* сигнала в виде произведения вспомогательной функции $E(p)$ на числитель передаточной функции $T(p)$:

$$Y(p) = E(p)N(p) = b_2p^{-1}E(p) + b_1p^{-2}E(p) + b_0p^{-3}E(p)$$

Будем рассматривать правую часть этого выражения как сумму изображений переменных состояния с соответствующими коэффициентами передач:

$$Y(p) = b_2 p^{-1} E(p) + b_1 p^{-2} E(p) + b_0 p^{-3} E(p) =$$

$$= b_2 X_3(p) + b_1 X_2(p) + b_0 X_1(p) = b_0 X_1(p) + b_1 X_2(p) + b_2 X_3(p).$$

Уравнение выхода:

$$y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + b_2 x_3(t). \quad (2.13)$$

и

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Т.о., матрицы уравнений состояния имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = 0. \quad (2.14)$$

Выходной сигнал определяется суммированием переменных состояния с масштабными множителями согласно (2.13). Поэтому для получения полной схемы моделирования нужно дополнить ее фрагмент сумматором и коэффициентами передачи. В результате получаем схему моделирования для переменных состояния нормальной формы, Рис. 2.14.

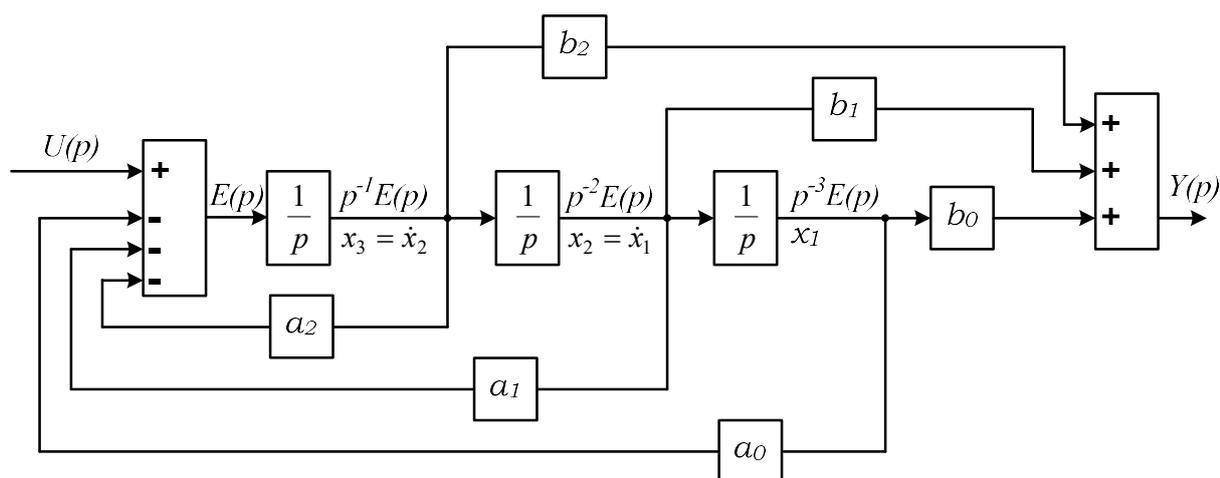


Рис. 2.14. Схема канонической формы управляемости

Домашнее задание. Для передаточной функции, полученной в работе 1, выполнить следующее.

1. Методом прямого программирования определить УС.

2. Прodelать обратную операцию для проверки.
3. Определить ПФ по УС в MatLab.
4. Построить структурную схему системы и модель в Simulink и показать идентичность поведения.

Пример выполнения домашнего задания. Задана передаточная функция SISO системы второго порядка:

$$W(p) = \frac{p^2 + 20000}{p^2 + 100p + 20000}.$$

Необходимо выполнить все пункты, указанные в задании.

Определение УС методом прямого программирования

Разделим числитель и знаменатель ПФ на слагаемое в знаменателе с максимальной степенью оператора p (на p^2), т.е. представим ПФ через интегрирующие звенья:

$$W(p) = \frac{1 + 20000p^{-2}}{1 + 100p^{-1} + 20000p^{-2}} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

Изображение входного сигнала:

$$\begin{aligned} U(p) &= E(p)D(p) = E(p)(1 + 100p^{-1} + 20000p^{-2}) = \\ &= E(p) + 100p^{-1}E(p) + 20000p^{-2}E(p). \end{aligned}$$

Из этого уравнения получим выражение для $E(p)$:

$$E(p) = U(p) - 100p^{-1}E(p) - 20000p^{-2}E(p). \quad (2.15)$$

Далее введем в рассмотрение переменные состояния, изображения которых зададим следующим образом:

$$X_2(p) = p^{-1}E(p);$$

$$X_1(p) = p^{-2}E(p) = p^{-1}X_2(p) = \frac{1}{p}X_2(p).$$

Уравнение для $X_2(p)$ запишем в виде:

$$\begin{aligned} X_2(p) &= p^{-1}E(p) = p^{-1}[U(p) - 100p^{-1}E(p) - 20000p^{-2}E(p)] = \\ &= \frac{1}{p} \cdot [U(p) - 100p^{-1}E(p) - 20000p^{-2}E(p)] = \\ &= \frac{1}{p} \cdot [U(p) - 100X_2(p) - 20000X_1(p)] = \\ &= \frac{1}{p} \cdot [-20000X_1(p) - 100X_2(p) + U(p)]. \end{aligned}$$

Полученные уравнения запишем в виде:

$$\begin{cases} pX_1(p) = X_2(p); \\ pX_2(p) = -20000X_1(p) - 100X_2(p) + U(p) \end{cases} \quad (2.16)$$

Уравнения состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = -20000x_1(t) - 100x_2(t) + u(t). \end{cases}$$

Изображение выхода:

$$\begin{aligned} Y(p) &= E(p)N(p) = E(p)(1 + 20000p^{-2}) = E(p) + 20000p^{-2}E(p) = \\ &= U(p) - 100p^{-1}E(p) - 20000p^{-2}E(p) + 20000p^{-2}E(p) = U(p) - 100p^{-1}E(p) = \\ &= U(p) - 100X_2(p). \end{aligned}$$

Уравнение выхода:

$$y(t) = -100x_2(t) + u(t).$$

или

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u = \begin{bmatrix} 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [1]u(t).$$

Матрицы уравнений состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20000 & -100 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad -100]; \quad \mathbf{D} = 1.$$

Определение ПФ по УС

Для нахождения ПФ воспользуемся формулой

$$\mathbf{W}(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}. \quad (2.17)$$

Составим вначале матрицу $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$, для чего изменим знаки перед элементами матрицы \mathbf{A} , а затем оператор p прибавим к элементам главной диагонали:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 20000 & p + 100 \end{bmatrix}.$$

Запишем союзную матрицу в общем виде:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} = [0 \quad -100] \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0 \quad -100] \begin{bmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{22} \end{bmatrix} = -100\Delta_{22}.$$

Найдем нужное алгебраическое дополнение матрицы $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})$:

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} p = p.$$

Определитель матрицы $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})$:

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 20000 & p + 100 \end{vmatrix} = p^2 + 100p + 20000.$$

Передаточная функция фильтра:

$$W(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{-100p}{p^2 + 100p + 20000} + 1 = \frac{p^2 + 20000}{p^2 + 100p + 20000}.$$

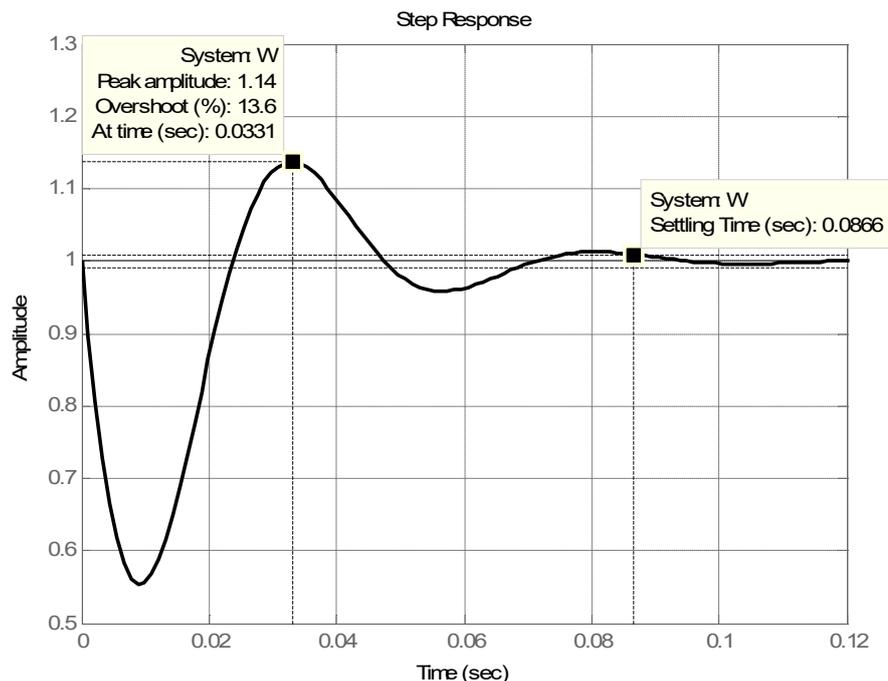
Получение УС и ПФ в MatLab

Проверим полученный результат в MatLab, построив также переходную характеристику:

```
A=[0 1;-20000 -100];B=[0;1];C=[0 -100];D=1;
Wss=ss(A,B,C,D);
W=tf(Wss)
```

В командном окне

```
Transfer function:
s^2 - 7.695e-015 s + 20000
-----
s^2 + 100 s + 2e004
step(W),grid
```



Построение структурной схемы системы и модели в Simulink и получение переходной характеристики

Составим схему моделирования (Рис. 2.15) по уравнениям:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = -20000x_1(t) - 100x_2(t) + u(t); \\ y(t) = 0 \cdot x_1(t) - 100x_2(t) + u(t). \end{cases}$$

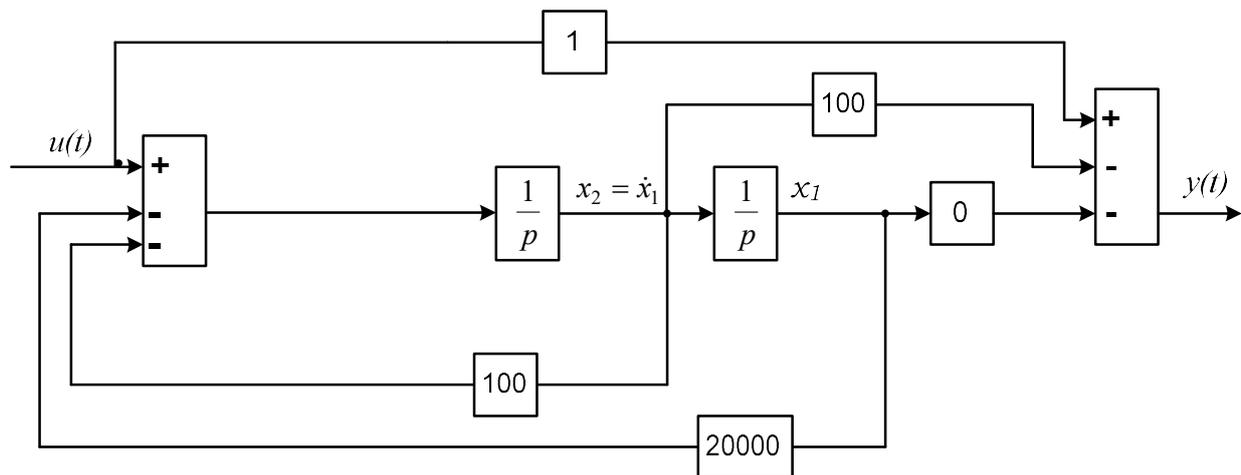


Рис. 2.15. Схема моделирования

Модель системы в программе SIMULINK показана на Рис. 2.16. Переходная характеристика, рассчитанная в программе, приведена на Рис. 2.17.

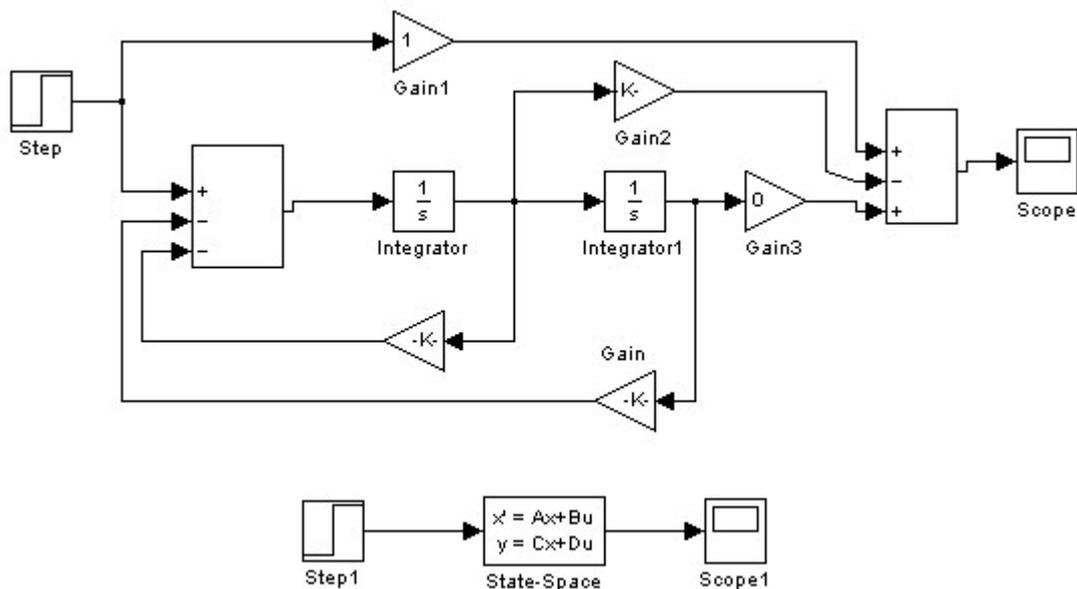


Рис. 2.16. Схема моделирования в SIMULINK

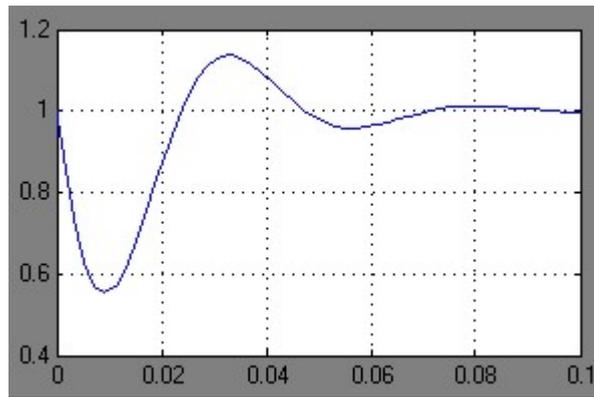


Рис. 2.17. Осциллограмма переходного процесса в SIMULINK

Для проверки правильности составления УС можно воспользоваться блоком State-Space, который находится в разделе Continuous библиотеки Simulink. После двойного щелчка левой кнопки мыши раскрывается окно параметров, в котором вводятся все матрицы так же, как и в MatLab, а также начальные условия.

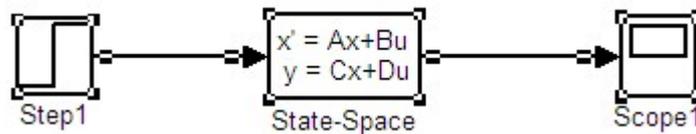


Рис. 2.18. Схема моделирования в SIMULINK с блоком State-Space

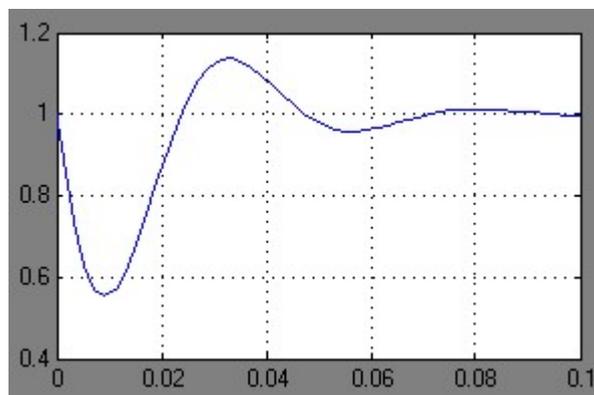


Рис. 2.19. Осциллограмма переходного процесса по схеме рис. 2.15

Полная идентичность переходных характеристик, полученных в MatLab и Simulink, свидетельствует об адекватности схемы моделирования математической модели.

2.2. Метод последовательного программирования.

Этот метод применим для передаточных функций, не имеющих комплексно-сопряженных полюсов. Для получения представления об этом

методе рассмотрим ПФ системы второго порядка с полиномами одинаковой степени:

$$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{b_2 \left(p^2 + \frac{b_1}{b_2} p + \frac{b_0}{b_2} \right)}{p^2 + a_1 p + a_0} = K \frac{p + c_1}{p + d_1} \cdot \frac{p + c_2}{p + d_2}.$$

Структурную схему представим в виде последовательного соединения двух звеньев, Рис. 2.20.

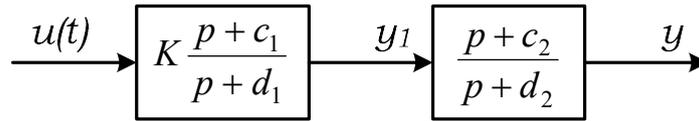


Рис. 2.20. Схема моделирования для произведения передаточных функций

Построим модель первого звена. На входе действует переменная $u(t)$. Обозначим выходную переменную через y_1 . Тогда

$$y_1(p) = K \frac{p + c_1}{p + d_1} u(p) = (p + c_1) \frac{Ku(p)}{p + d_1}. \quad (2.18)$$

Обозначив через $x_1(p) = \frac{Ku(p)}{p + d_1}$, получим

$$px_1(p) = -d_1 x_1(p) + Ku(p), \quad (2.19)$$

$$y_1(p) = (p + c_1) \frac{u(p)}{p + d_1} = (p + c_1) x_1(p) = px_1(p) + c_1 x_1(p) \quad (2.20)$$

или

$$\dot{x}_1 = -d_1 x_1 + Ku, \quad (2.21)$$

$$y_1 = \dot{x}_1 + c_1 x_1 = -d_1 x_1 + Ku + c_1 x_1 = (c_1 - d_1) x_1 + Ku. \quad (2.22)$$

Аналогично поступая со вторым звеном, получим:

$$y(p) = \frac{p + c_2}{p + d_2} y_1(p) = (p + c_2) \frac{y_1(p)}{p + d_2}. \quad (2.23)$$

Обозначив через $x_2(p) = \frac{y_1(p)}{p + d_2}$, получим

$$px_2(p) = -d_2 x_2(p) + y_1(p);$$

$$y(p) = (p + c_2) \frac{y_1(p)}{p + d_2} = (p + c_2) x_2(p) \quad (2.24)$$

ИЛИ

$$\dot{x}_2 = -d_2 x_2 + y_1 = -d_2 x_2 + (c_1 - d_1)x_1 + Ku;$$

$$y = \dot{x}_2 + c_2 x_2 = -d_2 x_2 + (c_1 - d_1)x_1 + c_2 x_2 + Ku = (c_1 - d_1)x_1 + (c_2 - d_2)x_2 + Ku.$$

Запишем модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -d_1 x_1 + Ku; \\ \dot{x}_2 = (c_1 - d_1)x_1 - d_2 x_2 + Ku; \end{cases}$$

$$y = (c_1 - d_1)x_1 + (c_2 - d_2)x_2 + Ku. \quad (2.25)$$

Матрицы описания системы, таким образом, будут иметь вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -d_1 & 0 \\ c_1 - d_1 & -d_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} K \\ K \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (c_1 - d_1 \quad c_2 - d_2), \quad \mathbf{D} = K.$$

На главной диагонали матрицы \mathbf{A} находятся ее собственные числа.

Применим полученные выражения для следующей ПФ:

$$W(p) = \frac{p^2}{p^2 + 450p + 2,5 \cdot 10^4} = \frac{p+0}{p+385,1} \cdot \frac{p+0}{p+64,92} = K \frac{p+c_1}{p+d_1} \cdot \frac{p+c_2}{p+d_2}.$$

Следовательно, имеем значения для K , c_i и d_i :

$$K = 1; \quad c_1 = c_2 = 0; \quad d_1 = 385,1; \quad d_2 = 64,92.$$

Матрицы описания системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -385,1 & 0 \\ -385,1 & -64,92 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (-385,1 \quad -64,92), \quad \mathbf{D} = 0.$$

Создадим в MatLab SS модель и получим ПФ:

```
%Коэффициент, нули и полюса ПФ
K=1;c1=0;c2=0;d1=385.1;d2=64.92;
%Матрицы описания системы
A=[-d1 0;c1-d1 -d2];B=[K;K];C=[c1-d1 c2-d2];D=1;
%SS модель
Ws=ss(A,B,C,D)
%Передаточная функция
Wtf=tf(Q)
```

В командном окне

```
Transfer function:
s^2 + 5.139e-014 s + 4.686e-012
-----
s^2 + 450 s + 25025
```

Практически заданная и полученная ПФ совпадают.

Разберем применение этого метода непосредственно на конкретных примерах систем третьего порядка.

Пример 2.4. Рассмотрим передаточную функцию объекта, в числителе которой находится только коэффициент усиления, а знаменатель представляет собой произведение полиномов первого порядка:

$$W(p) = \frac{5}{(p+1)(p+2)(p+4)} = 5 \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p+2} \cdot \frac{1}{p+4}.$$

При этом структурную схему объекта можно представить в виде последовательного соединения звеньев с указанием переменных состояния на выходе каждого звена, как это показано на Рис. 2.21:

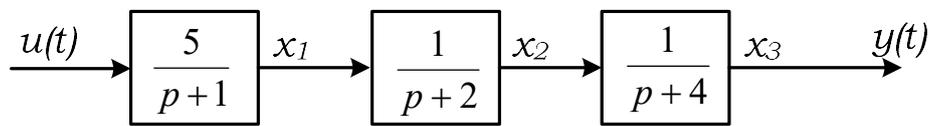


Рис. 2.21. Структурная схема к примеру 2.4

Тогда для изображения первой переменной состояния можно записать выражение

$$X_1(p) = \frac{5}{p+1} \cdot U(p) \quad \text{или} \quad pX_1(p) = -X_1(p) + 5U(p),$$

а затем получить первое уравнение состояния:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 5u.$$

Изображение второй переменной состояния

$$X_2(p) = \frac{1}{p+2} \cdot X_1(p) \quad \text{или} \quad pX_2(p) = -2X_2(p) + X_1(p)$$

и второе уравнение состояния:

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2.$$

Изображение третьей переменной состояния

$$X_3(p) = \frac{1}{p+4} \cdot X_2(p) \quad \text{или} \quad pX_3(p) = -4X_3(p) + X_2(p)$$

и третье уравнение состояния:

$$\dot{x}_3 = x_2 - 4x_3.$$

Уравнение выхода:

$$y = x_3.$$

Запишем уравнения в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 5u; \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2; \\ \dot{x}_3 = x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

Уравнение выхода:

$$y = x_3.$$

Матрицы уравнений состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (0 \ 0 \ 1), \quad \mathbf{D} = 0.$$

В главной диагонали матрицы \mathbf{A} расположены корни характеристического уравнения (собственные числа матрицы), а под ней – единичная диагональ. При изменении порядка возрастания индексов у переменных состояния на схеме единичная диагональ расположится под главной диагональю.

По уравнениям состояния построим структурную схему системы (Рис. 2.22)

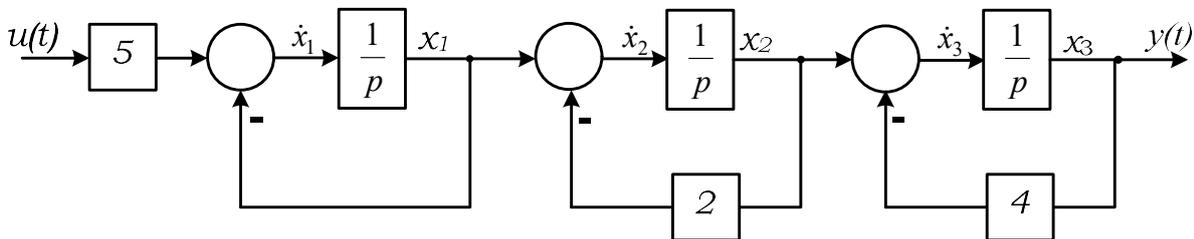


Рис. 2.22. Структурная схема моделирования к примеру 2.4

Пример 2.5. Построим модель системы в пространстве состояний методом последовательного программирования для передаточной функции, в числителе которой полином второго порядка. Определив нули и полюса ПФ, представим исходную передаточную функцию в виде произведения элементарных множителей:

$$W(p) = \frac{p^2 + 5p + 4}{2p^3 + 10p^2 + 12p} = \frac{0,5}{p} \cdot \frac{p+1}{p+2} \cdot \frac{p+4}{p+3}. \quad (2.26)$$

Далее строим последовательно соединенную цепочку моделей.

Первое звено представляет собой соединение масштабного коэффициента и интегратора. Обозначим

$$x_1(p) = \frac{0,5}{p} u(p), \quad (2.27)$$

тогда

$$px_1(p) = 0,5u(p), \quad (2.28)$$

или

$$\dot{x}_1 = 0,5u. \quad (2.29)$$

Построим модель второго звена. На входе его действует переменная x_1 . Обозначим выходную величину звена как y_2 , т.е.:

$$\frac{y_2(p)}{x_1(p)} = \frac{p+1}{p+2}. \quad (2.30)$$

Обозначив $x_2(p) = \frac{x_1(p)}{p+2}$, получим

$$px_2(p) = x_1(p) - 2x_2(p), \quad (2.31)$$

$$y_2(p) = px_2(p) + x_2(p), \quad (2.32)$$

или

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2, \quad (2.33)$$

$$y_2 = \dot{x}_2 + x_2. \quad (2.34)$$

Аналогично поступая с третьим звеном, получим

$$\dot{x}_3 = y_2 - 3x_3 = \dot{x}_2 + x_2 - 3x_3, \quad (2.35)$$

$$y = \dot{x}_3 + 4x_3. \quad (2.36)$$

По уравнениям (2.28, 2.32-2.35) построим структурную схему системы (Рис. 2.23)

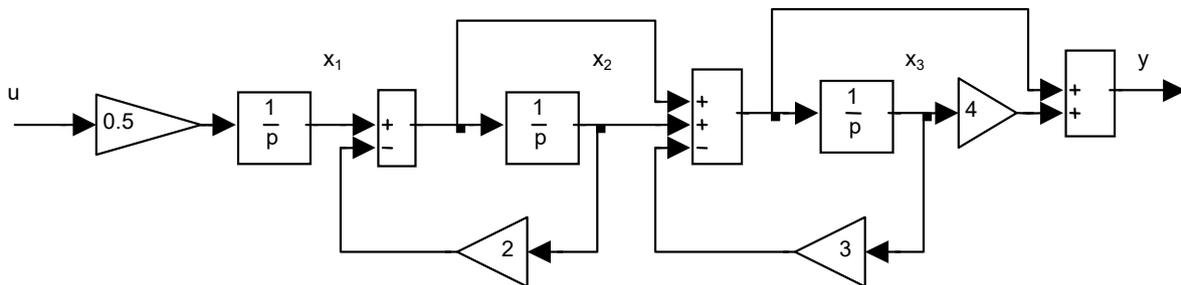


Рис. 2.23. Структурная схема модели к примеру 2.5

Запишем уравнения в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,5u; \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2; \\ \dot{x}_3 = \dot{x}_2 + x_2 - 3x_3 = x_1 - x_2 - 3x_3. \end{cases}$$

$$y = \dot{x}_3 + 4x_3 = x_1 - x_2 + x_3.$$

Матрицы описания системы, таким образом, будут иметь вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \quad -1 \quad 1), \quad \mathbf{D} = 0.$$

Метод последовательного программирования называют переменными состояния в форме простых множителей.

2.3. Метод параллельного программирования.

В методе параллельного программирования («канонические переменные состояния») исходную передаточную функцию представляют в виде суммы элементарных дробей-слагаемых с числителями, подлежащими определению, а структурную схему – в виде параллельного соединения звеньев.

Пример 2.6. Построим модель системы в пространстве состояний методом параллельного программирования для передаточной функции, в числителе которой полином второго порядка:

$$W(p) = \frac{p^2 + 5p + 4}{2p^3 + 10p^2 + 12p} = \frac{A_1}{2p} + \frac{A_2}{p+2} + \frac{A_3}{p+3}. \quad (2.37)$$

Определяя коэффициенты A_1, A_2, A_3 , получим

$$\begin{aligned} A_1(p+2)(p+3) + 2A_2p(p+3) + 2A_3p(p+2) = \\ = p^2(A_1 + 2A_2 + 2A_3) + p(5A_1 + 6A_2 + 4A_3) + 6A_1 = p^2 + 5p + 4. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов составим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 1; \\ 5A_1 + 6A_2 + 4A_3 = 5; \\ 6A_1 = 4, \end{cases} \quad (2.39)$$

решая которую определим: $A_1=2/3, A_2=1/2, A_3=-1/3$.

Таким образом, ПФ можно записать в виде суммы дробей:

$$W(p) = \frac{p^2 + 5p + 4}{2p^3 + 10p^2 + 12p} = \frac{1/3}{p} + \frac{1/2}{p+2} + \frac{-1/3}{p+3}.$$

Разложение на простые дроби можно осуществить с помощью MatLab. Команда

$$[R, P, K] = \text{RESIDUE}(B, A)$$

определяет числители отдельных дробей, полюсы и свободный член разложения на частичные дроби отношения двух полиномов $B(p)/A(p)$. Английское слово RESIDUE переводится как остаток или вычет.

Если кратные корни отсутствуют, то разложение записывается в виде

$$\frac{B(p)}{A(p)} = \frac{R_1}{p-p_1} + \frac{R_2}{p-p_2} + \dots + \frac{R_n}{p-p_n} + K(p).$$

Векторы $B(p)$ и $A(p)$ определяют коэффициенты числителя и знаменателя полиномов в порядке убывания степеней p . Ввод вектора-строки осуществляется в квадратных скобках, элементы которого разделяются пробелами или запятыми. Число элементов вектора, т.е. число коэффициентов полинома, всегда на единицу больше его степени, нулевые коэффициенты должны содержаться в векторе. Числители дробей возвращаются в векторе-столбце R , полюсы – в векторе-столбце P и свободный член – в векторе-строке K . Вектор этого коэффициента оказывается пустым, если степень числителя ПФ меньше степени знаменателя. Каждому полюсу соответствует свой коэффициент.

```
%Ввод полиномов числителя и знаменателя
B1=[1 5 4]; A1=[2 10 12 0];
%Разложение на простые дроби
[R, P, K]=residue(B1, A1)
```

В командном окне

```
R = -0.3333
      0.5000
      0.3333
P = -3.0000
      -2.0000
      0
```

```
K = []
```

Запишем ПФ в виде:

$$W(p) = \frac{B_1(p)}{A_1(p)} = \frac{R_1}{p-p_1} + \frac{R_2}{p-p_2} + \frac{R_3}{p-p_3} + K(p) = \frac{-0,3333}{p+3} + \frac{0,5}{p+2} + \frac{0,3333}{p}$$

или

$$W(p) = \frac{1/3}{p} + \frac{1/2}{p+2} + \frac{-1/3}{p+3}.$$

Обозначим

$$x_1(p) = \frac{A_1}{2p} u(p) = \frac{1}{3} \frac{u(p)}{p}, \quad (2.40)$$

$$x_2(p) = \frac{A_2}{p+2} u(p) = \frac{1}{2} \frac{u(p)}{p+2}, \quad (2.41)$$

$$x_3(p) = \frac{A_3}{p+3} u(p) = -\frac{1}{3} \frac{u(p)}{p+3}. \quad (2.42)$$

Из (2.40-2.42) получим

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{3} u, \quad (2.43)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} u - 2x_2, \quad (2.44)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{3} u - 3x_3. \quad (2.45)$$

$$y = x_1 + x_2 + x_3. \quad (2.46)$$

По уравнениям (2.43-2.46) построим структурную схему (Рис. 2.24)
Матрицы описания системы будут иметь вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 1 \ 1), \quad \mathbf{D} = 0.$$

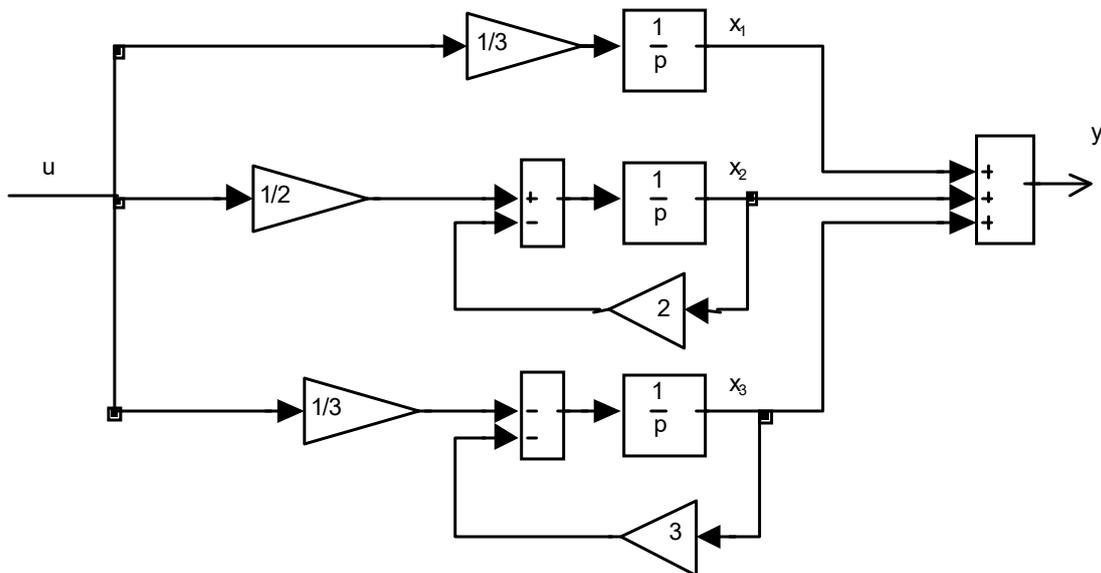


Рис. 2.24. Структурная схема модели при параллельном программировании

Имеются и другие формы представления систем, заданных передаточными функциями в пространстве состояний.

Домашнее задание. Задана передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Значения коэффициентов полиномов приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Таблица коэффициентов полиномов

№ Варианта	b_1	b_0	a_2	a_1	a_0
1	2	3	4	5	6
1	2	4	1	20	36
2				22	57
3				24	80
4				26	105
5				28	132
6				30	161
7				32	192
8				34	225
9				36	260
10				38	297
11	4	16	1	40	175
12				42	216
13				44	259
14				46	304
15				48	400
16				50	451
17				52	504
18				54	559
19				56	587
20				58	613
21	1	10	1	60	500
22				62	561
23				64	624
24				66	756
25				68	798
26				70	825
27				72	896
28				74	969
29				76	1044
30				78	1121

Требуется построить схемы моделирования методами последовательного и параллельного программирования. Получить с помощью Matlab и SIMULINK переходную характеристику системы.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПОЛУЧЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЫ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ.

Все реальные системы управления и их элементы являются нелинейными. Однако во многих случаях линейные модели достаточно точно отражают их свойства. Получение линейных моделей по исходным нелинейным уравнениям называется линеаризацией.

Характеристики нелинейных элементов часто удается линеаризовать при условии малых отклонений сигналов от их стационарных значений.

Известно, что для любой функции $f(x)$, непрерывной вместе со своими производными в окрестности точки x_0 , имеет место соотношение, называемое формулой Тейлора или рядом Тейлора:

$$f(x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^n.$$

Линеаризация гладкой функции в окрестности рабочей точки (x_0, y_0) выполняется по этой формуле путем отбрасывания нелинейных членов:

$$y \approx y_0 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) = y_0 + f'(x_0)\Delta x.$$

Полученное выражение – это уравнение касательной к кривой $f(x)$ в точке (x_0, y_0) , Рис. 3.1.

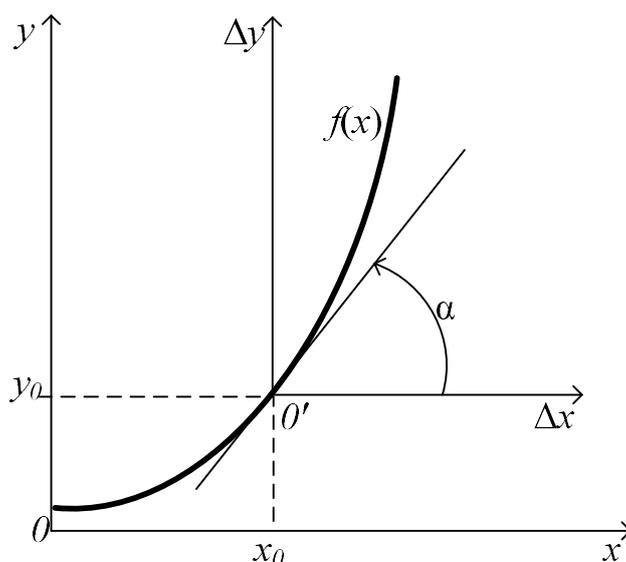


Рис. 3.1. Линеаризация характеристики нелинейного элемента
Введя понятие отклонения от номинального режима

$$\Delta y = y - y_0, \quad \Delta x = x - x_0, \quad (3.1)$$

получим линеаризованное уравнение в отклонениях (приращениях)

$$\Delta y = k \Delta x \quad (3.2)$$

с коэффициентом наклона касательной

$$k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.3)$$

Малые отклонения переменных от их значений в равновесном режиме называются вариациями переменных, а линеаризованное уравнение для малых отклонений – уравнением в вариациях.

К нелинейной функции нескольких переменных

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.4)$$

также можно применить разложение в ряд Тейлора в окрестности рабочей точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$.

Пусть

$$y = f(x_1, x_2, x_3). \quad (3.5)$$

Пренебрегая членами высшего порядка малости, линейную аппроксимацию можно представить в виде

$$y = f(x_{10}, x_{20}, x_{30}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_0} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_0} (x_2 - x_{20}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_3} \right|_{x_0} (x_3 - x_{30}), \quad (3.6)$$

где $\mathbf{x}_0 = [x_{10}, x_{20}, x_{30}]$ – рабочая точка нелинейной системы.

Уравнения в приращениях:

$$\begin{aligned} \Delta y = y - f(x_{10}, x_{20}, x_{30}) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_0} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_0} (x_2 - x_{20}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_3} \right|_{x_0} (x_3 - x_{30}) = \\ &= k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + k_3 \Delta x_3. \end{aligned}$$

Важным вопросом в теории управления является линеаризация дифференциальных уравнений.

Приведем некоторые примеры нелинейных ДУ, полагая $u(t)$ входной величиной, а $y(t)$ – выходной:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y^2(t) = u(t); \quad \frac{dy(t)}{dt} + \sin[y(t)] = u(t);$$

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} y(t) = u(t).$$

Первое из этих уравнений является нелинейным, потому что содержит переменную $y(t)$ в квадрате, второе – потому, что содержит функцию

(синус) выходной переменной, в третье уравнение входит произведение переменной $y(t)$ и ее производной.

Ввиду того, что математический аппарат, который позволил бы достаточно просто исследовать нелинейные дифференциальные уравнения, отсутствует, в теории автоматического управления нелинейные уравнения обычно линеаризуют. В основе линеаризации лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом режиме переменные системы изменяются так, что их отклонения от равновесных (установившихся) значений остаются все время малыми. Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений производится путем их разложения в ряд Тейлора в окрестности рабочей точки и отбрасывания членов разложения порядка малости выше первого.

Естественно, *результаты, получаемые на основе линеаризованных уравнений, имеют смысл лишь при малых отклонениях исследуемой системы от рабочей точки.*

Пусть, например, имеется ДУ второго порядка, связывающее вход и выход системы. В левой части могут быть слагаемые, содержащие выходную величину, ее первую и вторую производные, а также входную величину и ее первую производную. Все названные величины являются функциями времени, т.е. левая часть зависит от пяти переменных:

$$F\left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \frac{dy(t)}{dt}, y(t), \frac{du(t)}{dt}, u(t)\right) = 0.$$

В рабочей точке x_0 известны значения выходной и входной величин, а также их производных. В этом случае ряд Тейлора с линейными членами имеет вид:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)}\right|_0 \cdot \frac{d^2 \Delta y}{dt^2} + \left.\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}\right|_0 \cdot \frac{d\Delta y}{dt} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 \cdot \Delta y + \left.\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{du}{dt}\right)}\right|_0 \cdot \frac{d\Delta u}{dt} + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_0 \cdot \Delta u = 0.$$

Здесь индексом «0» обозначены значения производных в рабочей точке.

Пример 3.1. Рассмотрим процедуру линеаризации ДУ на примере нелинейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} u(t) + 3 \frac{du(t)}{dt} y(t) = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{y} + 2\dot{y}u + 3\dot{u}y = 0$$

в окрестности точки: $y_0 = -1$; $u_0 = 1$; $\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)_0 = -1$; $\left(\frac{du(t)}{dt}\right)_0 = 1$.

Левая часть уравнения представляет собой функцию многих (пяти) переменных и может быть записана в виде

$$f(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{u}, u) = 0.$$

Для записи уравнения в виде ряда Тейлора находим частные производные функции по всем переменным:

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 2u; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3 \frac{du}{dt}; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} = 3y; \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 2 \frac{dy}{dt}.$$

Определим значения производных в рабочей точке:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right)_0 &= 1; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)_0 = 2u_0 = 2 \cdot 1 = 2; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 3 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = 3 \cdot 1 = 3; \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right)_0 &= 3y_0 = 3 \cdot (-1) = -3; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 = 2 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0 = 2 \cdot (-1) = -2. \end{aligned}$$

В результате разложения в ряд получим ДУ для приращений:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)_0 \frac{d \Delta y(t)}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right)_0 \frac{d \Delta u(t)}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 \Delta u(t) = 0$$

или

$$\frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} + 2 \frac{d \Delta y(t)}{dt} + 3 \Delta y(t) = 3 \frac{d \Delta u(t)}{dt} + 2 \Delta u(t).$$

Алгебраизируем полученное линейное уравнение:

$$(p^2 + 2p + 3) \Delta y(t) = (3p + 2) \Delta u(t)$$

или

$$\Delta y(t) = \frac{3p + 2}{p^2 + 2p + 3} \Delta u(t)$$

Таким образом, передаточная функция линеаризованной системы

$$W(p) = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} = \frac{3p + 2}{p^2 + 2p + 3}.$$

Важным вопросом в теории управления является также линеаризация систем нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

В общем случае правые части уравнений состояния являются функциями всех переменных состояния и входных воздействий, поэтому уравнения состояния для системы второго порядка можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Пусть $\mathbf{x}_0 = [x_{10}, x_{20}]^T$ – рабочая точка системы, а u_0 – постоянное значение входного сигнала, соответствующее этой точке (в общем случае это также вектор $\mathbf{u}_0 = [u_{10}, u_{20}, \dots]^T$). Выполним для каждого уравнения состояния разложение в ряд Тейлора, ограничиваясь только линейными членами:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_{10}, x_{20}, u_0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)_0 \Delta u, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_{10}, x_{20}, u_0) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)_0 \Delta u.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Значения производных в рабочей точке:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{10} &= f_1(x_{10}, x_{20}, u_0), \\ \dot{x}_{20} &= f_2(x_{10}, x_{20}, u_0).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Пусть переменные состояния и вход получили соответствующие приращения, т.е. отклонения от их значений в состоянии равновесия:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{10} + \Delta x_1, \\ x_2 &= x_{20} + \Delta x_2, \\ u &= u_0 + \Delta u.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 - f_1(x_{10}, x_{20}, u_0) &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{10} = \Delta \dot{x}_1, \\ \dot{x}_2 - f_2(x_{10}, x_{20}, u_0) &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{20} = \Delta \dot{x}_2,\end{aligned}$$

получим уравнения состояния для приращений:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)_0 \Delta u, \\ \Delta \dot{x}_2 &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)_0 \Delta u.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Уравнения в развернутой матричной форме

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_0 \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_0 \cdot \Delta u$$

и векторно-матричной форме:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \Delta u,$$

где матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_0$$

называются *якобианами*.

Линейная модель уравнений состояния теперь имеет стандартную форму.

При наличии нелинейного уравнения для одного выхода, правая часть которого тоже является функций всех переменных состояния и входа, т.е.

$$y(t) = f_3(x_1, x_2, u),$$

также производится разложение правой части в ряд Тейлора с отбрасыванием нелинейных членов:

$$\Delta y = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial u} \right)_0 \Delta u.$$

Пример 3.2. Рассмотрим получение линейной модели для уравнений состояния. Пусть дано нелинейное ДУ второго порядка

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = u,$$

где все переменные являются функциями времени. Сначала составим модель системы в пространстве состояний. Пусть переменные состояния таковы:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1, \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}.$$

Выражение производной второй переменной состояния находят из самого ДУ:

$$\ddot{y} = -y\dot{y} - \dot{y} + u \quad \text{или} \quad \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_2 + u.$$

Тогда нелинейная система уравнений состояния принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2 - x_2 + u. \end{aligned}$$

Переменные состояния и входное воздействие в рабочей точке имеют значения:

$$x_{10} = 1, \quad x_{20} = 0, \quad u_0 = 0.$$

Так как $f_1(x_1, x_2, u) = x_2$ и $f_2(x_1, x_2, u) = -x_1x_2 - x_2 + u$, то частные производные принимают значения:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 = 1; \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)_0 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 = -x_{20} = 0; \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 = -x_{10} - 1 = -2; \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)_0 = 1.$$

Запишем якобианы уравнений состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнения в развернутой матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_0 \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_0 \cdot \Delta u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_0 \cdot \Delta u.$$

Линеаризованные уравнения состояния:

$$\Delta \dot{x}_1 = 0 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 + 0 \cdot \Delta u = \Delta x_2,$$

$$\Delta \dot{x}_2 = 0 \cdot \Delta x_1 - 2 \cdot \Delta x_2 + 1 \cdot \Delta u = -2\Delta x_2 + \Delta u.$$

Сравнение полученных уравнений с исходными уравнениями состояния показывает, что линейные члены, входящие в нелинейные уравнения, без всяких изменений появляются в линеаризованных уравнениях. В этом можно убедиться, если использовать описанный метод для линеаризации системы линейных уравнений: следует ожидать получения тех же самых линейных уравнений.

Пример 3.3. Линеаризация нелинейных уравнений состояния.

Линеаризовать систему нелинейных уравнений состояния и уравнение выхода

$$\dot{x}_1 = -2x_1x_2 + u = f_1(x_1, x_2, u),$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_1u = f_2(x_1, x_2, u),$$

$$y = x_1 + x_2^2 = f_3(x_1, x_2, u)$$

в окрестности рабочей точки $x_{10}=1, x_{20}=2, u_0 = -1$.

Решение. Находим частные производные по всем переменным в рабочей точке:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 = (-2x_2)_0 = -2x_{20} = -2 \cdot 2 = -4;$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 = (-2x_1)_0 = -2x_{10} = -2 \cdot 1 = -2;$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)_0 = 1;$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 = (u)_0 = u_0 = -1; \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 = -2, \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)_0 = (x_1)_0 = x_{10} = 1;$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)_0 = 1; \quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)_0 = (2x_2)_0 = 2x_{20} = 2 \cdot 2 = 4; \quad \left(\frac{df_3}{du}\right)_0 = 0.$$

Составим якобианы уравнений:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем УС в матричной форме и уравнение выхода:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \Delta u;$$

$$\Delta y = \left(\frac{df_3}{dx_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{df_3}{dx_2}\right)_0 \Delta x_2 + \left(\frac{df_3}{du}\right)_0 \Delta u = \Delta x_1 + 4\Delta x_2.$$

Линеаризованные уравнения состояния:

$$\Delta \dot{x}_1 = -4\Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta u;$$

$$\Delta \dot{x}_2 = -\Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta u.$$

Левые части уравнений обычно записывают в виде производных приращений по времени, тогда уравнения принимают вид:

$$\frac{d\Delta x_1}{dt} = -4\Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta u;$$

$$\frac{d\Delta x_2}{dt} = -\Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta u;$$

$$\Delta y = \Delta x_1 + 4\Delta x_2.$$

Матрицы уравнения выхода:

$$\mathbf{C} = [1 \quad 4], \quad \mathbf{D} = 0.$$

Получим передаточную функцию с помощью матриц линеаризованной системы.

Составим вначале матрицу $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$, для чего изменим знаки перед элементами матрицы \mathbf{A} и прибавим оператор p к элементам главной диагонали:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p+4 & 2 \\ 1 & p+2 \end{bmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения полученной матрицы:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1}(p+2) = p+2; & \Delta_{12} &= (-1)^{1+2}(1) = -1; \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1}(2) = -2; & \Delta_{22} &= (-1)^{2+2}(p+4) = p+4. \end{aligned}$$

Для получения союзной матрицы заменим каждый элемент матрицы $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ его алгебраическим дополнением, а затем полученную матрицу транспонируем. В результате получим:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+2 & -2 \\ -1 & p+4 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе (1.29):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} &= [1 \quad 4] \begin{bmatrix} p+2 & -2 \\ -1 & p+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [p-2 \quad 4p+14] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5p+12. \end{aligned}$$

Определитель матрицы $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$:

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p+4 & 2 \\ 1 & p+2 \end{vmatrix} = p^2 + 6p + 6.$$

Передаточная функция:

$$\mathbf{W}(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + \mathbf{D} = \frac{5p+12}{p^2 + 6p + 6}.$$

Когда линеаризации подлежит система нелинейных уравнений, то обычно для удобства знак приращения Δ опускают. Тогда линеаризованное матричное уравнение записывают как

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t),$$

где под $\mathbf{x}(t)$ подразумевают отклонения переменных состояния от их равновесных значений, а $\mathbf{u}(t)$ соответствует отклонениям входных воздействий.

Домашнее задание. 1. Линеаризировать нелинейное уравнение, полученное из линейного, выведенного в первом занятии, путем возведения в квадрат выходной переменной в окрестности рабочей точки

$$y_0=1; u_0=1; \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)_0=0; \left(\frac{du(t)}{dt}\right)_0=0.$$

2. Линеаризировать систему нелинейных уравнений, полученных их системы линейных, взятых из метода прямого программирования, путем возведения в квадрат переменной состояния x_1 в правых частях уравнений состояния.

Пример выполнения домашнего задания.

В первом занятии было получено ДУ электрической цепи:

$$\ddot{u}_2 + 450 \cdot \dot{u}_2 + 2,5 \cdot 10^4 u_2 = \ddot{u}_1.$$

Возведем выходное напряжение в квадрат, заменим u_2 на y , u_1 на u и линеаризуем полученное нелинейное ДУ

$$\ddot{y} + 450\dot{y} + 2,5 \cdot 10^4 y^2 - \ddot{u} = 0$$

в окрестности рабочей точки $y_0=1; u_0=1; \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)_0=0; \left(\frac{du(t)}{dt}\right)_0=0.$

Левая часть уравнения представляет собой функцию четырех переменных:

$$f(\ddot{y}, \dot{y}, y, \ddot{u}) = 0.$$

Для записи уравнения в виде ряда Тейлора находим частные производные функции по всем переменным:

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 450; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5 \cdot 10^4 y; \quad \frac{\partial f}{\partial \ddot{u}} = -1.$$

Частные производные для номинального (равновесного) режима:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right)_0 = 1; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)_0 = 450; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 5 \cdot 10^4 y_0 = 5 \cdot 10^4; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{u}}\right)_0 = -1.$$

Дифференциальное уравнение для приращений:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)_0 \frac{d \Delta y(t)}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{u}}\right)_0 \frac{d^2 \Delta u(t)}{dt^2} = 0$$

ИЛИ

$$\frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} + 450 \frac{d\Delta y(t)}{dt} + 5 \cdot 10^4 \Delta y(t) = \frac{d^2 \Delta u(t)}{dt^2}.$$

Уравнение в символической форме:

$$(p^2 + 450p + 5 \cdot 10^4) \Delta y(t) = p^2 \Delta u(t)$$

ИЛИ

$$\Delta y(t) = \frac{p^2}{p^2 + 450p + 5 \cdot 10^4} \Delta u(t).$$

Передаточная функция линеаризованной системы:

$$W(p) = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} = \frac{p^2}{p^2 + 450p + 5 \cdot 10^4}.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ВСЕМ КАНАЛАМ УПРАВЛЕНИЯ

Правила структурных преобразований позволяют получить передаточные функции САР по передаточным функциям ее звеньев, а также представить структуру системы в удобном для анализа и синтеза виде. Формулы преобразований выводятся путем сопоставления передаточных функций структур до и после преобразований. Рассмотрим способы преобразования структурных схем при различных видах соединения блоков.

4.1. Последовательное (series) соединение блоков

При последовательном соединении выходная величина каждого из звеньев (Рис. 4.1), кроме последнего, служит входной величиной последующего звена.

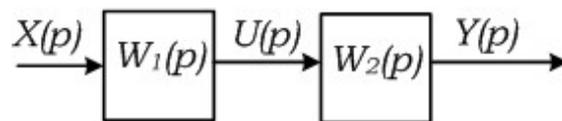


Рис. 4.1. Последовательное соединение блоков

Такая система описывается операторными уравнениями:

$$Y(p) = W_2(p)U(p); \quad U(p) = W_1(p)X(p).$$

Выразим выходную величину через входную:

$$Y(p) = W_2(p)W_1(p)X(p) = W(p)X(p).$$

ПФ системы из n последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев:

$$W_{ser}(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

При этом возможны случаи, когда отдельные звенья представлены разными моделями (TF, SS или ZPK). Тогда нужно вначале получить TF-модель для каждого звена, а затем воспользоваться приведенным выше правилом.

В программе MATLAB произведение LTI моделей можно производить двумя способами: с помощью знака умножения «*» и с помощью команды *series*. При этом системы могут быть заданы разными моделями (ZPK, SS или TF). Для определения типа результирующей модели исполь-

зуется правило предпочтения: **SS** > **ZPK** > **TF**. Убедимся в этом на следующем примере.

Пример 4.1.

1. Системы заданы их ПФ (TF моделями):

$$W_1(p) = \frac{1}{p+10} \quad \text{и} \quad W_2(p) = \frac{p+14}{p^3+3p^2+3p+1}.$$

ПФ схемы с последовательным соединением:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{1}{p+10} \cdot \frac{p+14}{p^3+3p^2+3p+1} = \frac{p+14}{p^4+13p^3+33p^2+31p+10}.$$

Проверка в MATLAB:

```
% ПФ отдельных звеньев
W1=tf(1,[1 10]);W2=tf([1 14],[1 3 3 1]);
% ПФ системы при последовательном соединении
W=W1*W2
Transfer function:
          s + 14
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10

% Другой способ определения ПФ
W=series(W1,W2)
Transfer function:
          s + 14
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10
```

2. Первая система задана TF моделью, а вторая – SS моделью (полученной в MATLAB):

$$W_1(p) = \frac{1}{p+10};$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1,5 & -0,25 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = [0 \quad 0,25 \quad 1,75], \quad \mathbf{D}_2 = [0].$$

Теперь нужно перемножить две разные модели. Какую модель мы получим в результате?

```
% Модели заданных систем
W1=tf(1,[1 10])% в виде ПФ
A=[-3 -1.5 -0.25;2 0 0;0 2 0];
B=[2;0;0];C=[0 0.25 1.75];D=0;
sys_2=ss(A,B,C,D);% в виде SS модели
```

```

sys=W1*sys_2; % произведение разных моделей
sys_tf=tf(sys) % переход к ПФ (TF модели)
>>
a =
    x1    x2    x3    x4
    x1   -10     0   0.25   1.75
    x2     0    -3  -1.5  -0.25
    x3     0     2     0     0
    x4     0     0     2     0
b =
    u1
    x1   0
    x2   2
    x3   0
    x4   0
c =
    x1  x2  x3  x4
    y1   1   0   0   0
d =
    u1
    y1   0
Continuous-time model.
Transfer function:
          s + 14
-----

```

```

s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10

```

В результате перемножения систем с разными моделями получена более старшая модель, а именно SS модель (согласно правилу предпочтения). Ну а затем можно получить и младшие модели.

3. Первая система по-прежнему задана TF моделью, а вторая – ZPK моделью (полученной в MATLAB):

$$W_1(p) = \frac{1}{p+10}; W_2(p) = \frac{p+14}{(p+1)^3}.$$

ZPK модель старше TF модели, поэтому получим вначале ZPK, а затем можно получить и ПФ (если нужно).

```

%Модели заданных систем
W1=tf(1,[1 10]);%TF модель
W2_zpk=zpk(-14,[-1 -1 -1],1);%ZPK модель
sys=series(W1,W2_zpk)%произведение разных моделей
sys_tf=tf(sys)%переход к ПФ (TF модели)
>>
Zero/pole/gain:
      (s+14)
-----
      (s+1)^3 (s+10)
Transfer function:
          s + 14

```

$$s^4 + 13s^3 + 33s^2 + 31s + 10$$

Представляет интерес следующий случай, когда перемножаются системы с одинаковыми SS моделями.

4. Первая и вторая системы заданы SS моделями (полученными в MATLAB):

$$\mathbf{A}_1 = [-10], \quad \mathbf{B}_1 = [1], \quad \mathbf{C}_1 = [1], \quad \mathbf{D}_1 = [0];$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1,5 & -0,25 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = [0 \quad 0,25 \quad 1,75], \quad \mathbf{D}_2 = [0].$$

В результате должны получиться следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2], \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2.$$

Проверим это в MATLAB:

```
% SS модели заданных систем
A1=-10;B1=1;C1=1;D1=0;
sys_1=ss(A1,B1,C1,D1);
A2=[-3 -1.5 -0.25;2 0 0;0 2 0];
B2=[2;0;0];C2=[0 0.25 1.75];D2=0;
sys_2=ss(A2,B2,C2,D2); % в виде SS модели
sys=series(sys_2,sys_1) % произведение моделей
W=tf(sys) % переход к ПФ (TF модели)
>>
a =
      x1      x2      x3      x4
      x1     -10      0     0.25     1.75
      x2      0      -3    -1.5    -0.25
      x3      0      2      0      0
      x4      0      0      2      0
b =
      u1
      x1      0
      x2      2
      x3      0
      x4      0
c =
      x1  x2  x3  x4
      y1  1  0  0  0
d =
      u1
      y1  0
Continuous-time model.
Transfer function:
          s + 14
```

 $s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10$

Предлагается проверить правильность полученного результата.

5. Первая и вторая системы заданы ZPK моделями (полученными в MATLAB):

```
% ZPK модели заданных систем
W1_zpk=zpk([],-10,1);
W2_zpk=zpk(-14,[-1 -1 -1],1);
sys=series(W1_zpk,W2_zpk)
W=tf(sys)
Zero/pole/gain:
```

 (s+14)

(s+1)^3 (s+10)

Transfer function:
 $s + 14$

 $s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10$

Приведенные случаи свидетельствуют о том, что при объединении систем путем их перемножения можно использовать их различные модели, но результат подчиняется правилу предпочтения.

4.2. Параллельное (parallel) соединение блоков

При параллельном соединении все звенья имеют одну и ту же входную величину, а их выходные величины суммируются (Рис. 4.2):

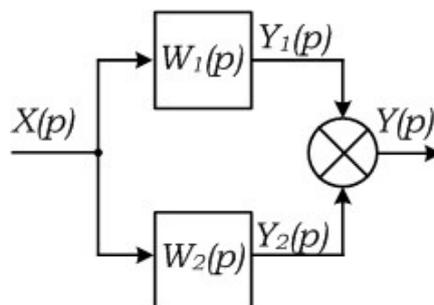


Рис. 4.2. Параллельное соединение блоков

Такая система описывается операторными уравнениями:

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p); \quad Y_1(p) = W_1(p)X(p); \quad Y_2(p) = W_2(p)X(p).$$

Требуется найти уравнение связи выходного и входного сигналов. После соответствующих подстановок получим:

$$Y(p) = [W_1(p) + W_2(p)]X(p) = W(p)X(p).$$

Т.о., ПФ системы из n параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций всех звеньев:

$$W_{par}(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

В программе MATLAB суммирование LTI моделей можно производить двумя способами: с помощью знака сложения + и с помощью команды *parallel*.

Здесь тоже можно рассмотреть все случаи, приведенные в предыдущем разделе при последовательном соединении систем, и результат будет подчиняться правилу предпочтения. Но мы рассмотрим только два случая, когда системы заданы либо их SS моделями, либо их ZPK моделями.

1. Первая и вторая системы заданы SS моделями:

$$\mathbf{A}_1 = [-10], \quad \mathbf{B}_1 = [1], \quad \mathbf{C}_1 = [1], \quad \mathbf{D}_1 = [0];$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1,5 & -0,25 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = [0 \quad 0,25 \quad 1,75], \quad \mathbf{D}_2 = [0].$$

В результате должны получиться следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2], \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2.$$

Проверим это в MATLAB:

```
% SS модели заданных систем
A1=-10;B1=1;C1=1;D1=0;
sys_1=ss(A1,B1,C1,D1); % в виде SS модели
A2=[-3 -1.5 -0.25;2 0 0;0 2 0];
B2=[2;0;0];C2=[0 0.25 1.75];D2=0;
sys_2=ss(A2,B2,C2,D2); % в виде SS модели
sys=parallel(sys_1,sys_2) % сумма моделей
W=tf(sys) % переход к ПФ (TF модели)
>>
a =
      x1      x2      x3      x4
      x1     -10      0      0      0
      x2      0      -3     -1.5    -0.25
      x3      0      2      0      0
      x4      0      0      2      0
b =
      u1
      x1      1
      x2      2
      x3      0
      x4      0
c =
      x1      x2      x3      x4
      y1      1      0     0.25     1.75
d =
      u1
      y1      0
```

Continuous-time model.

Transfer function:

$$\frac{s^3 + 4s^2 + 27s + 141}{s^4 + 13s^3 + 33s^2 + 31s + 10}$$

$$s^4 + 13s^3 + 33s^2 + 31s + 10$$

ИЛИ

```
sys=sys_1+sys_2 % сумма моделей
a =      x1      x2      x3      x4
  x1    -10      0      0      0
  x2      0     -3    -1.5  -0.25
  x3      0      2      0      0
  x4      0      0      2      0
b =      u1
  x1      1
  x2      2
  x3      0
  x4      0
c =      x1      x2      x3      x4
  y1      1      0    0.25    1.75
d =      u1
  y1      0
```

2. Первая и вторая системы заданы ZPK моделями:

```
% ZPK модели заданных систем
W1_zpk=zpk([],-10,1);
W2_zpk=zpk(-14,[-1 -1 -1],1);
sys=parallel(W1_zpk,W2_zpk) % ZPK модель
W=tf(sys) % TF модель
Z=zero(sys) % нули ПФ
P=pole(sys) % полюса ПФ
>>
Zero/pole/gain:
(s+4.675) (s^2 - 0.6754s + 30.16)
-----
          (s+10) (s+1)^3
Transfer function:
          s^3 + 4 s^2 + 27 s + 141
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10
Z =
    0.3377 + 5.4812i
    0.3377 - 5.4812i
   -4.6754
P =
   -10
    -1
```

-1
-1

или

```
SyS=W1_zpk+W2_zpk % ZPK модель
Zero/pole/gain:
(s+4.675) (s^2 - 0.6754s + 30.16)
-----
(s+10) (s+1)^3
W1=tf(SyS) % переход к ПФ (TF модели)
Transfer function:
s^3 + 4 s^2 + 27 s + 141
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10
```

Если же используются системы с TF моделями, то при параллельном соединении получается также TF модель объединенной системы.

4.3. Соединение с обратной связью (feedback)

В системах автоматического регулирования часто используется соединение в виде обратной связи (ОС). Так, например, большинство систем являются замкнутыми. В замкнутой системе производится измерение регулируемой переменной (с помощью измерительного преобразователя) и результат измерения в виде сигнала ОС сравнивается с входным сигналом, несущем информацию о заданном значении этой переменной. Сигнал разности между заданным и фактическим значениями (ошибка регулирования) используется как базовый для формирования управляющего воздействия на объект. Это пример *общей* обратной связи. Она всегда является *отрицательной* в том смысле, что вычисляется разность сигналов. Между тем в САР используются и *местные* или *локальные* ОС, охватывающие части системы. Местные ОС могут быть как отрицательными, так и положительными.

Соединение с ОС называют также встречно-параллельным соединением. Рассмотрим структурную схему соединения (Рис. 4.3) с отрицательной обратной связью (ООС). Для обозначения ООС можно использовать зачерненный сектор элемента сравнения или знак минус возле стрелки:

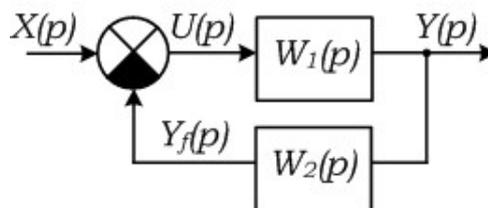


Рис. 4.3. Соединение с ООС

Такая система описывается операторным уравнением:

$$Y(p) = W_1(p)U(p) = W_1(p) \cdot [X(p) - W_2(p)Y(p)] = W_1(p)X(p) - W_1(p)W_2(p)Y(p).$$

При записи этого уравнения учтено, что входным сигналом звена в цепи обратной связи с передаточной функцией $W_2(p)$ является выходной сигнал структурной схемы.

Элементарные преобразования записанного выше уравнения позволяют получить ПФ участка структурной схемы с ООС:

$$W_{оос}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_{раз}(p)}. \quad (4.1)$$

ПФ участка с ООС представляет собой дробь, в числителе которой находится ПФ прямого пути передачи сигнала, а в знаменателе – увеличенная на единицу ПФ разомкнутой системы.

В выражении (4.1) через $W_{раз}(p)$ обозначена ПФ разомкнутой системы, ее передаточная функция

$$W_{раз}(p) = \frac{Y_f(p)}{U(p)}$$

есть отношение изображения $Y_f(p)$ сигнала обратной связи $y_f(t)$ к изображению $U(p)$ входного сигнала $u(t)$. При этом контур регулирования предполагают разомкнутым около элемента сравнения. В этом случае блоки оказываются включенными последовательно, и ПФ разомкнутой системы находится как произведение ПФ звена в цепи прямой передачи и звена в цепи обратной связи:

$$W_{раз}(p) = W_1(p)W_2(p).$$

Естественно, формула, полученная для ПФ участка с ООС, применима и к замкнутой системе управления в целом:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{np}(p)}{1 + W_{раз}(p)}. \quad (4.2)$$

где $W_{np}(p)$ – передаточная функция прямого канала системы.

Проведя преобразования, аналогичные изложенным выше, нетрудно получить, что в случае использования положительной ОС

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{np}(p)}{1 - W_{раз}(p)}. \quad (4.3)$$

В Matlab результат соединения с обратной связью двух ЛТИ моделей выполняется с помощью команды `feedback` (`feed` – давать, поставлять и `back` – в обратном направлении).

Syntax (синтаксис):

`sys = feedback(sys1, sys2)`

Описание:

`sys = feedback(sys1, sys2)` возвращает ЛТИ модель системы (sys) при соединении с отрицательной ОС.

При определении типа результирующей модели также действует правило предпочтения.

По умолчанию, команда `feedback(sys1, sys2)` предполагает ООС и эквивалента команде `feedback(sys1, sys2, -1)`.

При ПОС (положительная обратная связь) используется команда:

`sys = feedback(sys1, sys2, +1)`.

В частном случае одна из функций, $W_1(p)$ или $W_2(p)$, может равняться единице. В этом случае вместо соответствующей функции в нужном месте нужно поставить единицу.

1). При $W_1(p) = G(p)$ и $W_2(p) = 1$:

$$W_{nf}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

`sys = feedback(G, 1)`.

2). При $W_1(p) = 1$ и $W_2(p) = G(p)$:

$$W_{nf}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{1}{1 + G(p)}$$

`sys = feedback(1, G)`.

Пример 4.2.

1. Системы заданы их ПФ (TF моделями):

$$W_1(p) = \frac{p + 14}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1} \text{ и } W_2(p) = \frac{1}{p + 10}.$$

ПФ системы с ООС:

$$\begin{aligned} W_{nf}(p) &= \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{\frac{p + 14}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}}{1 + \frac{p + 14}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1} \cdot \frac{1}{p + 10}} = \\ &= \frac{p^2 + 24p + 140}{p^4 + 13p^3 + 33p^2 + 32p + 24}. \end{aligned}$$

В MATLAB:

`%Исходные данные`

`W1=tf([1 14],[1 3 3 1]);W2=tf(1,[1 10]);`

```
W_nf=feedback(W1,W2)
>>
Transfer function:
      s^2 + 24 s + 140
```

```
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 32 s + 24
```

2. Система прямой передачи сигнала задана ZPK моделью, а звено в цепи ОС – передаточной функцией:

$$W_1(p) = \frac{p+14}{(p+1)^3} \text{ и } W_2(p) = \frac{1}{p+10}.$$

```
% Исходные данные
W1=zpk(-14, [-1 -1 -1], 1);
W2=tf(1, [1 10]);
W_zpk=feedback(W1,W2)
W_tf=tf(W_zpk)
>>
Zero/pole/gain:
```

```
      (s+14) (s+10)
```

```
-----
(s+9.994) (s+2.147) (s^2 + 0.8584s + 1.118)
Transfer function:
      s^2 + 24 s + 140
```

```
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 32 s + 24
```

Единичная ООС

```
% Исходные данные
G=tf([1 14], [1 3 3 1]);
sys=feedback(G,1)
>>
```

```
Transfer function:
      s + 14
```

```
-----
s^3 + 3 s^2 + 4 s + 15
```

```
% Исходные данные
G=tf([1 14], [1 3 3 1])
sys=feedback(1,G)
```

```
Transfer function:
      s^3 + 3 s^2 + 3 s + 1
```

```
-----
s^3 + 3 s^2 + 4 s + 15
```

```
% Исходные данные
G=zpk(-14, [-1 -1 -1], 1)
sys=feedback(G,1)
>>
```

Zero/pole/gain:
 (s+14)

 (s+3.21) (s^2 - 0.2098s + 4.673)

Как указано выше, имея одну какую-либо ЛТИ модель, полученную для системы с встречно-параллельным соединением, можно получить остальные модели, что является очень удобным свойством MATLAB.

4.4. Перенос сумматора

1) Перенос сумматора с выхода звена на его вход (Рис. 4.4).

Внешнее воздействие $F(p)$, приложенное к выходу звена с передаточной функцией $W_1(p)$, можно перевести на его вход, поместив между воздействием и сумматором дополнительное звено с передаточной функцией $1/W_1(p)$:

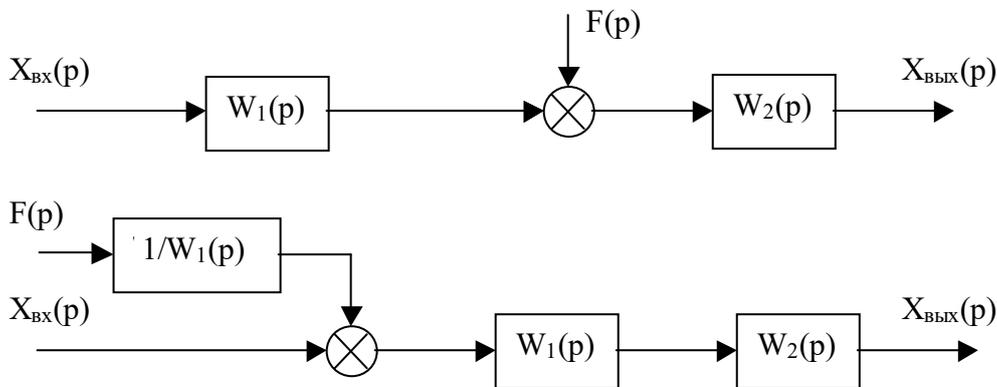


Рис. 4.4. Перенос сумматора с выхода на вход звена.

Для доказательства этого правила запишем выражение для выходной величины в виде:

$$X_{\text{вых}}(p) = W_2(p) [F(p) + W_1(p) X_{\text{вых}}(p)].$$

Передаточные функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$ на структурной схеме должны быть включены последовательно, поэтому необходимо $W_1(p)$ вынести за скобки:

$$X_{\text{вых}}(p) = W_2(p) W_1(p) \left[\frac{1}{W_1(p)} F(p) + X_{\text{вых}}(p) \right].$$

Таким образом, сумматор оказался перенесенным через звено $W_1(p)$, а между воздействием и сумматором находится звено с ПФ, обратной той, через которую перенесен сумматор:

2) Перенос сумматора с входа звена на его выход (Рис. 4.5).

Внешнее воздействие $F(p)$, приложенное к входу звена с передаточной функцией $W_1(p)$, можно перевести на его выход, поместив между воз-

действием и сумматором дополнительное звено с передаточной функцией $W_1(p)$.

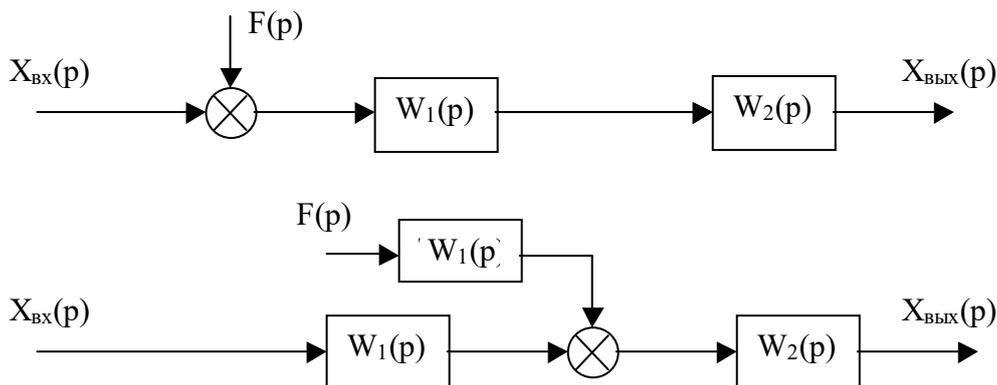


Рис. 4.5. Перенос сумматора с входа на выход звена.

Воспользуемся тем же приемом. До переноса имеем уравнение:

$$X_{\text{вых}}(p) = W_2(p) W_1(p) [F(p) + X_{\text{вх}}(p)].$$

Внесем $W_1(p)$ в скобки:

$$X_{\text{вых}}(p) = W_2(p) [W_1(p)F(p) + W_1(p)X_{\text{вх}}(p)].$$

Теперь сумматор оказался перенесенным в направлении передачи сигнала.

4.5. Переносы линии связи

а) Перенос линии связи с выхода звена на его вход (Рис. 4.6).

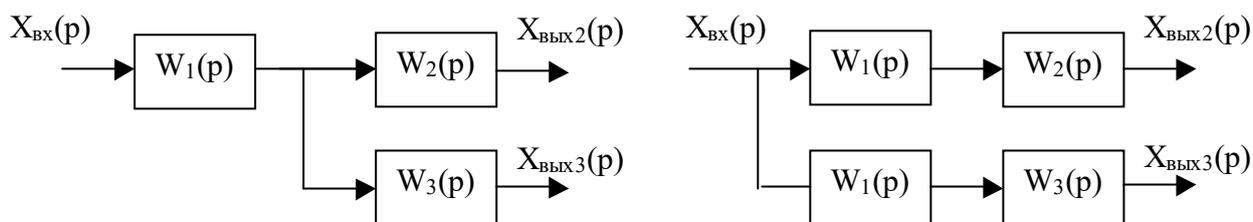


Рис. 4.6. Перенос линии связи с выхода звена на вход.

Точку присоединения любой структурной связи к выходу звена, имеющего передаточную функцию $W_1(p)$, можно перенести на его вход, включив в эту связь дополнительное звено с той же передаточной функцией $W_1(p)$.

б) Перенос линии связи с входа звена на его выход (Рис. 4.7).

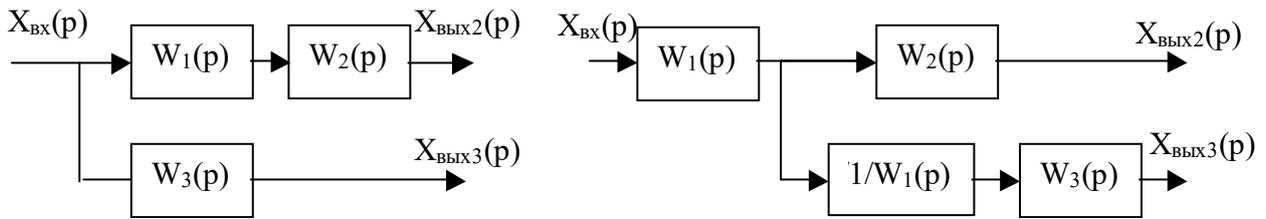


Рис. 4.7. Перенос линии связи с входа звена на выход.

Точку присоединения любой структурной связи к входу звена, имеющего передаточную функцию $W_1(p)$, можно перенести на его выход, включив в эту связь дополнительное звено с той же передаточной функцией $1/W_1(p)$.

Правила, связанные с переносом, линий, очевидны и не требуют доказательств.

Пример 4.3. По структурной схеме системы (Рис. 4.8) определить ее передаточную функцию.

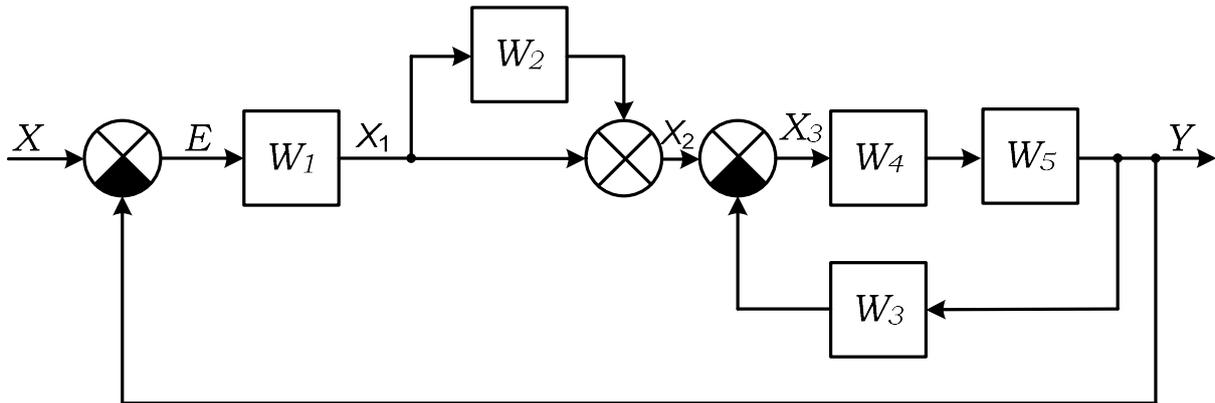


Рис. 4.8. Схема системы

ПФ отдельных звеньев имеют вид:

$$W_1(p) = \frac{1}{p+10}; \quad W_2(p) = \frac{1}{p+1}; \quad W_3(p) = 2;$$

$$W_4(p) = \frac{p^2+1}{p^2+4p+4}; \quad W_5(p) = \frac{1}{p}.$$

Воспользуемся функциями MATLAB для получения ПФ разомкнутой и замкнутой систем.

```
% Вводим все ПФ
W1=tf(1,[1 10]); W2=tf(1,[1 1]); W3=2;
W4=tf([1 0 1],[1 4 4]); W5=tf(1,[1 0]);
% Находим ПФ участка с ООС Wo
W45=series(W4,W5); Wo=feedback(W45,W3);
```

```

%Находим ПФ между двумя сумматорами при параллельном
и последовательном соединении звеньев
W22=parallel(W2,1); W12=series(W1,W22);
% ПФ разомкнутой системы
W=series(W12,Wo)
% ПФ замкнутой системы
T=feedback(W,[1])
>>W=

```

```

Transfer function:
          s^3 + 2 s^2 + s + 2
-----
s^5 + 17 s^4 + 80 s^3 + 106 s^2 + 62 s + 20

```

```

>>T=
Transfer function:
          s^3 + 2 s^2 + s + 2
-----
s^5 + 17 s^4 + 81 s^3 + 108 s^2 + 63 s + 22

```

Передаточную функцию относительно задающего воздействия можно получить аналитическим способом, составив уравнения относительно переменных системы и решив их в символьном виде с помощью Matlab.

```

syms x1 x2 x3 E y x
f1=sym('y=x3*W4*W5');
f2=sym('x3=x2-y*W3');
f3=sym('x2=x1+x1*W2');
f4=sym('x1=E*W1');
f5=sym('E=x-y');
s=solve(f1, f2, f3, f4, f5, x1, x2, x3, E, y);
W=s.y/x;
pretty(W)
>>

```

```

W1 (1 + W2) W4 W5
-----
1 + W4 W5 W1 + W4 W5 W2 W1 + W4 W5 W3

```

Зададимся передаточными функциями:

```

W1=tf(1,[1 10]); W2=tf(1,[1 1]); W3=2;
W4=tf([1 0 1],[1 4 4]); W5=tf(1,[1 0]);
T=W1*(1+W2)*W4*W5/(1+W4*W5*W1+W4*W5*W1*W2+W4*W5*W3);
disp('T=')
T=minreal(T)

```

```

T=
          s^3 + 2 s^2 + s + 2
-----
s^5 + 17 s^4 + 81 s^3 + 108 s^2 + 63 s + 22

```

Заключительная процедура в упрощении структурной схемы с помощью MatLab состоит в удалении одинаковых сомножителей из числителя и знаменателя ПФ. Для этого используется функция `minreal`.

Пример 4.4. Определить передаточные функции и статические характеристики системы (Рис. 4.9) по задающему воздействию и возмущению.

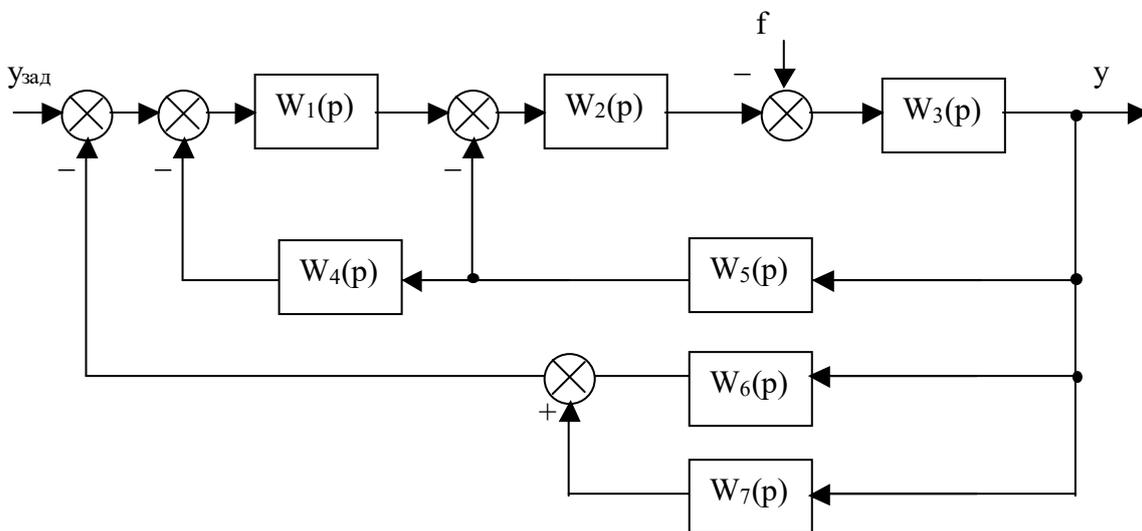


Рис. 4.9. Исходная структурная схема системы

Передаточные функции звеньев:

$$W_1(p) = \frac{10(0,1p + 1)}{0,01p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{2}{0,5p + 1}, \quad W_3(p) = \frac{1}{3p}, \quad W_4(p) = 4,$$

$$W_5(p) = \frac{1}{0,2p + 1}, \quad W_6(p) = \frac{2p}{0,05p + 1}, \quad W_7(p) = 1,5$$

Осуществим ряд преобразований исходной схемы в соответствии с выше приведенными правилами.

Шаг 1:

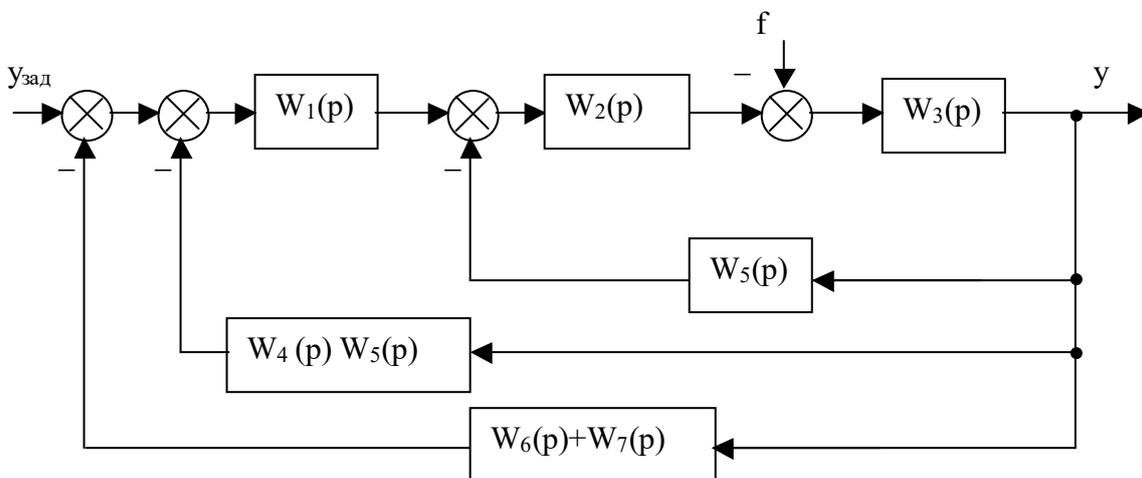


Рис. 4.10. Структурная схема системы (шаг 1)

Шаг 2:

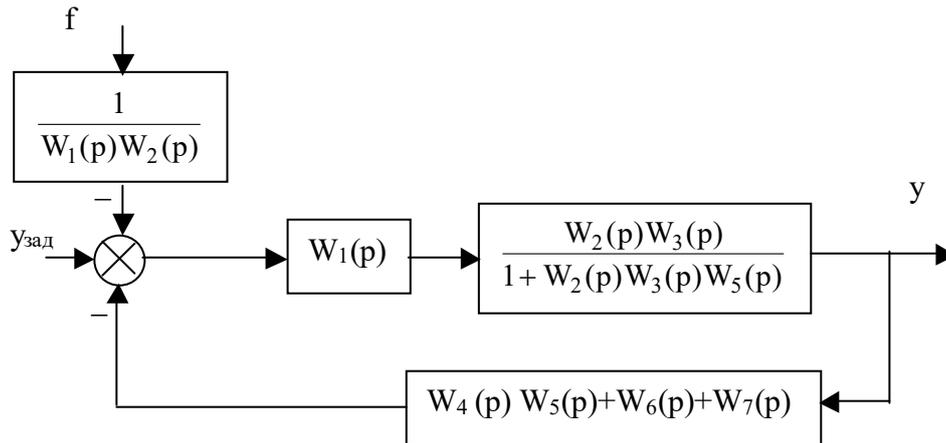


Рис. 4.11. Структурная схема системы (шаг 2)

Шаг 3:

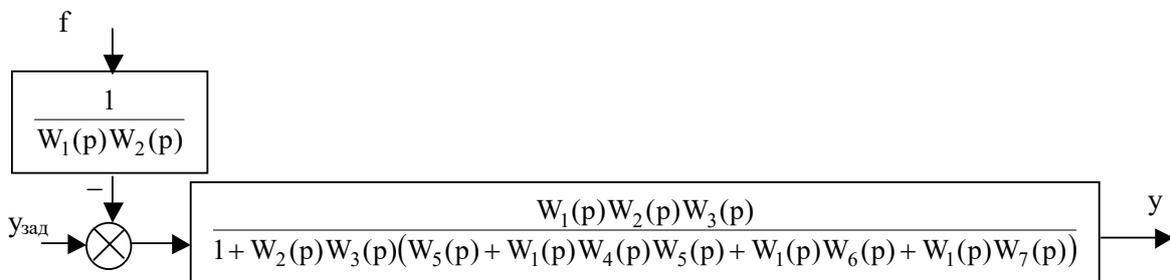


Рис. 4.12. Структурная схема системы (шаг 3)

Шаг 4:

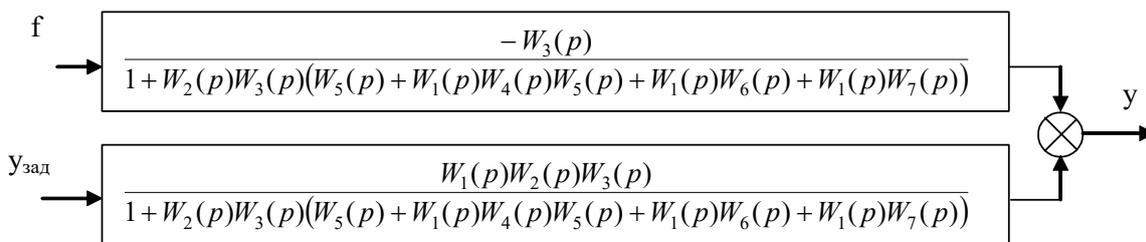


Рис. 4.13. Структурная схема системы (шаг 4)

Определим статические характеристики по каналам. Для этого в передаточных функциях положим $p=0$. Получим:

$$W_{y_{зад} \rightarrow y}(0) = \frac{W_1(0)W_2(0)W_3(0)}{1 + W_2(0)W_3(0)(W_5(0) + W_1(0)W_4(0)W_5(0) + W_1(0)W_6(0) + W_1(0)W_7(0))} =$$

$$= \frac{10 \cdot 2 \cdot \infty}{1 + 2\infty(1 + 10 \cdot 4 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 10 \cdot 1,5)} = \frac{20 \cdot \infty}{1 + 112\infty} = \frac{20}{112} \approx 0,1786.$$

$$W_{f \rightarrow y}(0) = \frac{-W_3(0)}{1 + W_2(0)W_3(0)(W_5(0) + W_1(0)W_4(0)W_5(0) + W_1(0)W_6(0) + W_1(0)W_7(0))} =$$

$$= \frac{-\infty}{1 + 2\infty(1 + 10 \cdot 4 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 10 \cdot 1,5)} = \frac{-\infty}{1 + 112\infty} = -\frac{1}{112} \approx -0,0089.$$

Таким образом «общая» статическая характеристика системы:
 $y = 0,1786y_{зад} - 0,0089f$.

Домашнее задание. Определить передаточные функции и статические характеристики системы по задающему воздействию и возмущению, а также ПФ по ошибке управления и возмущения. Исходными данными при выполнении задания являются: структурная схема системы и передаточные функции всех звеньев.

Исходные данные выдаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5. РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКИМ И ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДАМИ

При анализе системы управления часто требуется определить ее реакцию на входные воздействия (задающее и возмущающие). Для этого требуется решить дифференциальные уравнения, связывающие выходную величину с этими воздействиями. Согласно принципу суперпозиции, справедливому для линейных систем, реакция системы на совокупность воздействий равна сумме реакций на эти воздействия в отдельности. Реакция системы $y(t)$ на некоторое входное воздействие $u(t)$ может быть определена путем решения дифференциального уравнения общего вида, связывающее эти функции времени:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u. \quad (5.1)$$

Поскольку функция $u(t)$ известна и, следовательно, могут быть вычислены все ее производные, то правая часть уравнения может быть представлена некоторой известной функцией времени:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = F_n(t). \quad (5.2)$$

Однако неверно было бы считать, что устройство, описываемое уравнением (5.1), действительно производит дифференцирование входного сигнала. На самом деле во всех физических объектах имеет место не процесс дифференцирования, а процесс интегрирования, связанный с накоплением в элементах объекта вещества или энергии и их возвратом. В связи с этим при переходе от (5.1) к (5.2) возникает некоторая проблема.

Для решения (5.2.), как известно, необходимо знать начальные условия: $y(0)$, $\frac{dy}{dt}(0)$, $\frac{d^2 y}{dt^2}(0)$, ..., $\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0)$. Очевидно, что эти условия определяются начальным состоянием объекта и начальными значениями входного сигнала и его производных. Если известно описание объекта в пространстве состояний, начальные условия можно определить, используя уравнение выхода:

$$\begin{cases} y(0) = CX(0) + Du(0); \\ \frac{dy}{dt}(0) = C\dot{X}(0) + D\dot{u}(0) = CAX(0) + CBu(0) + D\dot{u}(0); \\ \frac{d^2 y}{dt^2}(0) = CA\dot{X}(0) + CB\dot{u}(0) + D\ddot{u}(0) = CA^2 X(0) + CABu(0) + CB\dot{u}(0) + D\ddot{u}(0); \\ \text{и т.д.} \end{cases}$$

Если уравнения состояний и выхода, а также вектор $X(0)$ неизвестны, в общем случае необходимо, чтобы начальные условия были заданы явно.

Существует практически очень важный частный случай, когда движение объекта под действием входного сигнала начинается из *состояния покоя при отсутствии внешнего воздействия*. Совершенно неверно при этом считать начальные условия нулевыми. Нулевыми на самом деле являются начальные значения переменных состояния, а выходная величина и ее производные в нулевой момент времени могут быть отличны от нуля и легко определяются.

Рассмотрим, например, объект, описываемый дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = \frac{d^2 u}{dt^2} + 3 \frac{du}{dt} + 2u,$$

находящийся в состоянии покоя при $u = 0$.

В начальный момент времени на объект подан постоянный входной сигнал $u = 1$.

Уравнения объекта в пространстве состояний, полученные методом прямого программирования, имеют вид (проверьте!):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u; \\ y = x_1 + x_2 + u. \end{cases}$$

Определим начальные условия:

$$y(0) = x_1(0) + x_2(0) + u(0) = u(0) = 1,$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) + \dot{u}(0) = x_1(0) - x_2(0) + u(0) + \dot{u}(0) = u(0) = 1.$$

Далее, для определения $y(t)$ необходимо решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 2,$$

используя полученные начальные условия.

Для решения ДУ используются два метода: классический и операторный.

I. Классический метод решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Как известно, решение неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сумму *общего решения* $y_0(t)$ соответствующего однородного дифференциального уравнения (с нулевой правой частью) и *частного решения* $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения:

$$y(t) = y_0(t) + \tilde{y}(t). \quad (5.3)$$

Вид общего решения зависит от корней характеристического уравнения, составленного для однородного ДУ. Каждый действительный корень p_i дает экспоненциальную составляющую $y_{0i}(t) = C_{0i} e^{p_i t}$, где C_{0i} – постоянная интегрирования. Для пары комплексно-сопряженных корней $p_{i,i+1} = \alpha \pm j\beta$ свободная составляющая записывается в виде

$$y(t) = (C_i \cos \beta t + C_{i+1} \sin \beta t) e^{\alpha t}. \quad (5.4)$$

Рассмотрим несколько правил записи частного решения неоднородного ДУ при некоторых видах его правой части (на примере ДУ второго порядка).

Правило I. Частное решение \tilde{y} уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_0$$

надо искать в виде

$$\tilde{y} = \begin{cases} Q_n(t), & \text{если } a_0 \neq 0, \\ t Q_n(t), & \text{если } a_0 = 0, a_1 \neq 0, \\ t^2 Q_n(t), & \text{если } a_0 = 0, a_1 = 0. \end{cases}$$

Во всех случаях за $Q_n(t)$ берется многочлен с неизвестными коэффициентами, значения которых находятся после подстановки \tilde{y} в уравнение:

$$Q_n(t) = B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \dots + B_0.$$

Правило II. Частное решение \tilde{y} уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = e^{\alpha t} (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_0)$$

надо искать в виде

$$\tilde{y} = \begin{cases} e^{\alpha t} Q_n(t), & \text{если } \alpha \text{ не корень характеристического уравнения,} \\ e^{\alpha t} t Q_n(t), & \text{если } \alpha \text{ простой корень этого уравнения,} \\ e^{\alpha t} t^2 Q_n(t), & \text{если } \alpha \text{ двойной корень этого уравнения.} \end{cases}$$

Правило III. Частное решение \tilde{y} уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

надо искать в виде

$$\tilde{y} = \begin{cases} a \cos \omega t + b \sin \omega t, & \text{если } j\omega \text{ не корень хар - го уравнения,} \\ t(a \cos \omega t + b \sin \omega t), & \text{если } j\omega \text{ корень хар - го уравнения.} \end{cases}$$

Коэффициенты a и b определяются после подстановки \tilde{y} исходное неоднородное ДУ.

Иногда для записи частного решения приходится пользоваться *принципом наложения (суперпозиции)*.

Принцип наложения

Теорема. Если $y_1(t)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f_1(t),$$

а $y_2(t)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f_2(t),$$

имеющего ту же левую часть, что и первое уравнение, то сумма $y_1(t) + y_2(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f_1(t) + f_2(t),$$

имеющего ту же левую часть, что и два предыдущих уравнения, а правая часть которого равна сумме правых частей этих уравнений.

Отметим, что общий метод нахождения решения неоднородных линейных ДУ разработан Лагранжем и применяется всякий раз, когда известно решение сопровождающего однородного ДУ. Этот метод называется *методом вариации произвольных постоянных*.

Пример 5.1. Определить реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$2 \frac{dy}{dt} + y = x(t),$$

на входной сигнал $x(t) = 1 + 2t$ при нулевом начальном условии $y(0) = 0$.

ДУ имеет вид

$$2 \frac{dy}{dt} + y = 1 + 2t.$$

Однородное дифференциальное уравнение:

$$2 \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Его общее решение определяется корнем характеристического уравнения $2p+1=0$:

$$y_0(t) = C_0 e^{-0,5t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения, согласно правилу I, будем искать в виде

$$\tilde{y}(t) = C_1 + C_2 t.$$

Подставим \tilde{y} в исходное ДУ:

$$2 \frac{d(C_1 + C_2 t)}{dt} + C_1 + C_2 t = 1 + 2t$$

или

$$2C_2 + C_1 + C_2 t = 1 + 2t.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t :

$$2C_2 + C_1 = 1; C_2 = 2.$$

Отсюда получаем: $C_1 = -3, C_2 = 2$.

Теперь решение заданного ДУ содержит одну постоянную интегрирования

$$y(t) = y_0(t) + \tilde{y}(t) = C_0 e^{-0,5t} - 3 + 2t,$$

которую найдем с помощью начального условия:

$$y(0) = C_0 - 3 = 0,$$

откуда $C = 3$.

Окончательно запишем

$$y(t) = 3(e^{-0,5t} - 1) + 2t.$$

Временные диаграммы входного и выходного сигналов построены в MATLAB и приведены на рис. 5.1.

Графики построены с помощью следующей программы:

```
t=0:0.01:6;  
x=1+2*t;  
y=3*(exp(-0.5*t)-1)+2*t;  
plot(t,x,'k-',t,y,'k--'),grid  
legend('x','y')
```

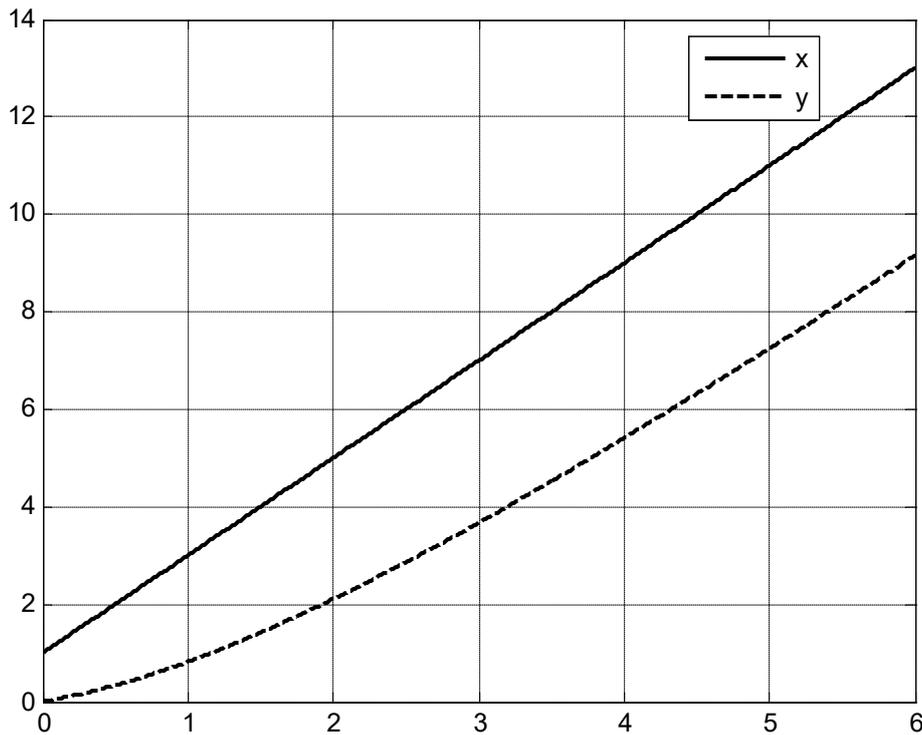


Рис. 5.1. Результаты расчетов по примеру 5.1

Пример 5.2. Определить частное решение неоднородного ДУ второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10x(t)$$

на входной сигнал $x(t) = e^{-3t}$ при нулевых начальных условиях, т.е. при $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$.

ДУ имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10e^{-3t}.$$

Составляем характеристическое уравнение и определяем его корни:

$$p^2 + 6p + 8 = 0; p_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 8} = -3 \pm 1; p_1 = -2; p_2 = -4.$$

Общее решение однородного уравнения записывается в виде суммы двух экспонент и содержит две постоянные интегрирования:

$$y_0 = B_1 e^{-2t} + B_2 e^{-4t}.$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся **Правилом II**:

$$\tilde{y} = C_1 e^{-3t}.$$

Дважды дифференцируем \tilde{y} и полученные выражения подставляем в исходное неоднородное ДУ, сокращая на e^{-3t} :

$$\tilde{y}' = -3C_1 e^{-3t} \text{ и } \tilde{y}'' = 9C_1 e^{-3t};$$

$$9C_1 - 6 \cdot 3C_1 + 8C_1 = 10.$$

Отсюда получаем значение постоянной интегрирования: $C_1 = -10$.

Таким образом, решение неоднородного ДУ равно:

$$y = -10e^{-3t} + B_1 e^{-2t} + B_2 e^{-4t}.$$

Первая производная решения:

$$y' = 30e^{-3t} - 2B_1 e^{-2t} - 4B_2 e^{-4t}.$$

В два последних выражения подставляем начальные условия:

$$\begin{cases} 0 = -10 + B_1 + B_2; \\ 0 = 30 - 2B_1 - 4B_2. \end{cases}$$

В результате решения системы уравнений получаем: $B_1 = B_2 = 5$.

Решение заданного неоднородного уравнения принимает вид:

$$y = -10e^{-3t} + 5e^{-2t} + 5e^{-4t}.$$

На рис. 5.2. приведен график решения, построенный в Matlab.

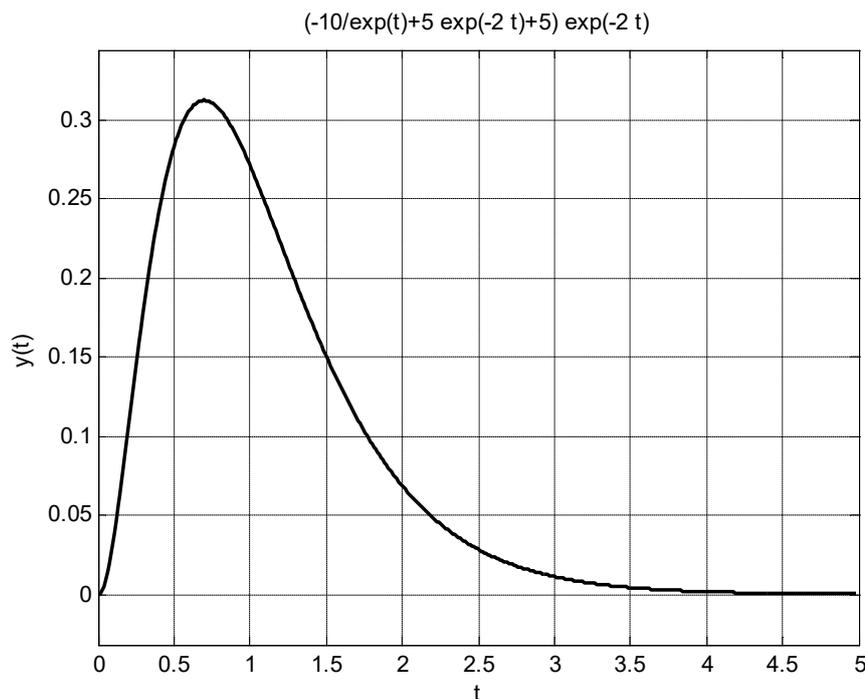


Рис. 5.2. Результаты расчетов по примеру 5.2

Пример 5.3. Определить реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = x(t)$$

на входной сигнал $x(t) = t + \sin t$ при нулевых начальных условиях:

$$dy/dt(0)=y(0) = 0.$$

ДУ имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = t + \sin t .$$

Однородное ДУ:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0 .$$

Его характеристическое уравнение $p^2 + p + 1 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

поэтому решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y_0(t) = e^{-0,5t} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right),$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Правая часть ДУ представляет собой сумму двух функций различного вида – укороченного полинома t и гармонической функции $\sin t$. Частные решения для каждой из функций записываются по разному. Поэтому нужно воспользоваться принципом суперпозиции и решить два уравнения:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = t, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = \sin t .$$

Частное решение первого уравнения согласно правилу I:

$$y_1(t) = B_1 t + B_0 .$$

Для записи частного решения второго уравнения воспользуемся правилом III, учитывая, что в правой части уравнения $\omega = 1$:

$$y_2(t) = a \cos t + b \sin t .$$

Частное решение исходного неоднородного уравнения:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = B_1 t + B_0 + a \cos t + b \sin t.$$

Для нахождения коэффициентов B_1 , B_0 , a , b подставим частное решение в исходное ДУ, взяв предварительно первую и вторую производные от частного решения:

$$-a \cos t - b \sin t + B_1 - a \sin t + b \cos t + \\ + B_1 t + B_0 + a \cos t + b \sin t = t + \sin t.$$

Приравнивая коэффициенты при t и $\sin(t)$, находим постоянные:

$$B_1 = 1, B_0 = -1, b = 0, a = -1.$$

Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y(t) = e^{-0,5t} \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) + t - 1 - \cos t.$$

Первая производная от решения:

$$\frac{dy}{dt} = -0,5e^{-0,5t} \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) + \\ + e^{-0,5t} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) + 1 + \sin t.$$

Определим C_1 и C_2 из начальных условий:

$$y(0) = C_2 - 2 = 0, \quad C_2 = 2;$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -0,5C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_1 + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} C_1 = 0, \quad C_1 = 0.$$

Таким образом, заданное ДУ имеет решение

$$y = 2e^{-0,5t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cos t + t - 1.$$

На рис. 5.3. приведен график решения, построенный в Matlab.

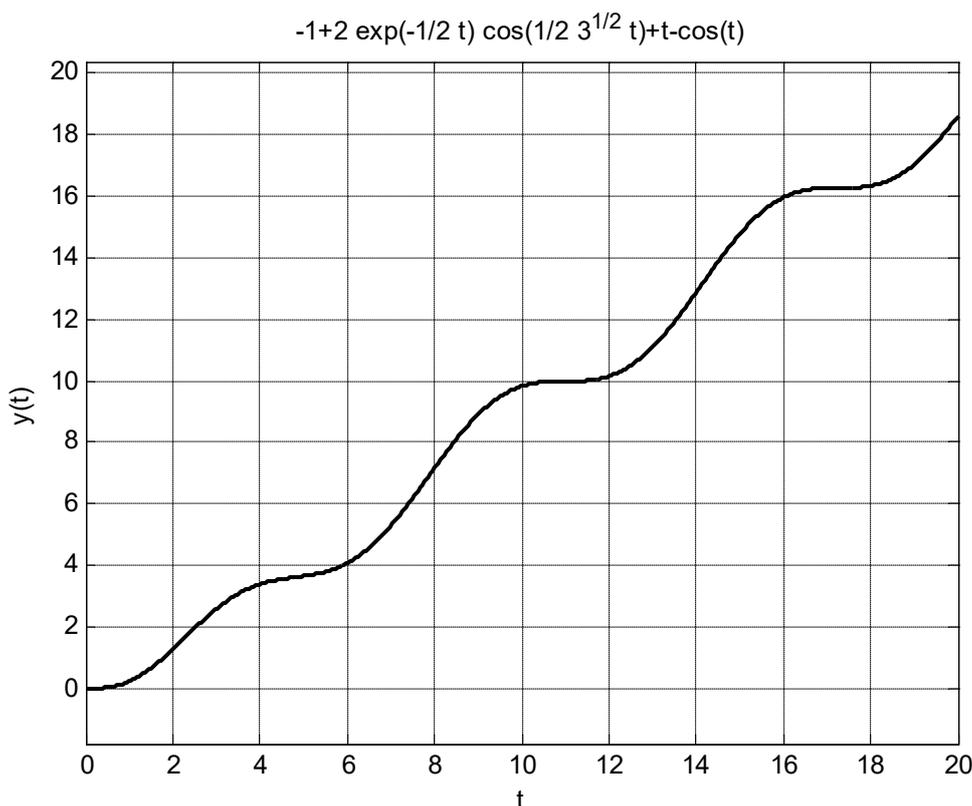


Рис. 5.3. Результаты расчетов по примеру 5.3

II. Операторный метод решения ОДУ

Операторный метод относится к символическим методам, в которых операции над функциями времени (оригиналами) заменяются операциями над их символами (изображениями). Взаимное соответствие между изображением функции времени $F(p)$ и самой функцией $f(t)$ указывается знаком соответствия « \Leftrightarrow »:

$$F(p) \Leftrightarrow f(t) \text{ или } F(p) = L[f(t)]. \quad (5.5)$$

Преобразование Лапласа – это математический метод, в котором осуществляется переход из области вещественного переменного t в область комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$. Комплексное число p называется *оператором Лапласа* или *комплексной частотой*.

Функция комплексной частоты $F(p)$ называется операторным изображением, L -изображением или изображением по Лапласу функции $f(t)$. Сама исходная функция времени $f(t)$ является оригиналом по отношению к своему изображению.

Связь между изображением $F(p)$ и оригиналом $f(t)$, который равен нулю при $t < 0$, устанавливается с помощью интеграла Лапласа (прямое преобразование Лапласа):

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (5.6)$$

При этом функция $f(t)$ должна удовлетворять определенным условиям. Во-первых, она должна удовлетворять условиям Дирихле, т.е. за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Во-вторых, модуль функции $f(t)$ должен возрастать медленнее, чем $Ke^{\alpha t}$, при этом $\sigma > \alpha$.

Применение преобразования Лапласа к системе линейных дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений позволяет получить систему алгебраических уравнений, составленных относительно операторных изображений. В результате решения этой системы получают изображения искомых величин. Их оригиналы (конечная цель расчета) определяются с помощью обратного преобразования Лапласа – по таблицам оригиналов и изображений, методом разложения на простые дроби или по теореме разложения. Напомним некоторые свойства и теоремы преобразования Лапласа.

1. Изображение постоянной величины K равно этой величине, деленной на оператор Лапласа:

$$K \Leftrightarrow \int_0^{\infty} Ke^{-pt} dt = -\frac{K}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{K}{p}.$$

2. Изображения некоторых выражений с затухающими экспонентами:

$$e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p + \alpha} \quad \text{или} \quad e^{-\frac{t}{\tau}} \Leftrightarrow \frac{\tau}{\tau p + 1};$$

$$1 - e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} \quad \text{или} \quad 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \Leftrightarrow \frac{1}{p(\tau p + 1)}.$$

3. Изображения гармонических функций:

$$\sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2};$$

$$\cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}.$$

4. Изображения затухающих гармонических функций:

$$e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{(p + \beta) \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{(p + \beta)^2 + \omega^2};$$

$$e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{(p + \beta) \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{(p + \beta)^2 + \omega^2}.$$

5. Изображение функций вида $g(t) = A t^n$:

$$G(s) = A \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

6. Изображение производных функции времени.

Дифференцированию функции $f(t)$ соответствует умножение изображения этой функции на p минус начальное значение этой функции:

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pF(p) - f(0).$$

Повторным применением можно получить выражение для производной второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) \Leftrightarrow p[pF(p) - f(0)] - \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= p^2 F(p) - p \cdot f(0_+) - \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Для производной n порядка изображение имеет вид:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Leftrightarrow p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} \left. \frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}} \right|_{t=0}.$$

Если $f(0)=0$, то дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения функции на p :

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pF(p)$$

При $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$

имеет место формула

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Leftrightarrow p^n F(p).$$

7. Изображение интеграла от функции времени.

Интегрированию функции времени от 0 до t соответствует деление изображения этой функции на p :

$$\int_0^t f(t) dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

8. Теорема запаздывания.

Смещению функции времени $f(t)$ на t_0 соответствует умножение изображения на e^{-pt_0} :

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-pt_0} F(p).$$

9. Теорема о конечном значении.

Для получения конечного значения оригинала необходимо его изображение умножить на оператор Лапласа и в полученном выражении устремить к нулю этот оператор:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p),$$

если предел левой части существует. Теорема о конечном значении неприменима к функциям, которые не имеют конечного значения.

10. Теорема о начальном значении.

Для получения начального значения оригинала необходимо его изображение умножить на оператор Лапласа и в полученном выражении устремить к бесконечности этот оператор:

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p),$$

если этот предел существует.

11. Теорема разложения.

Пусть изображение по Лапласу искомой функции времени представляет собой дробно-рациональную функцию общего вида

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \quad m < n,$$

где через $N(p)$ обозначен полином в числителе, а через $D(p)$ – полином в знаменателе этой функции, причем коэффициент при старшей степени полинома знаменателя равен единице. К такому виду всегда можно свести знаменатель изображения. Для применения теоремы разложения нужно определить корни знаменателя p_1, p_2, \dots, p_n , т. е. корни уравнения $D(p)=0$, которые называются полюсами функции $F(p)$. И если среди корней (полюсов) нет кратных, то $F(p)$ можно записать в виде:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)}. \quad (5.7)$$

Оригинал можно найти по следующей формуле:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{D'(p_2)} e^{p_2 t} + \dots + \frac{N(p_n)}{D'(p_n)} e^{p_n t}. \quad (5.8)$$

Здесь $D'(p_k) = \left. \frac{dD}{dp} \right|_{p=p_k}$ – производная знаменателя по p , в выражение

которой подставлено значение k -го корня.

Часто встречается другая форма разложения, которая применяется в том случае, когда в составе знаменателя есть множитель p , т.е. знаменатель имеет один нулевой корень. В этом случае необходимо найти оригинал изображения

$$F(p) = \frac{N(p)}{pD(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)},$$

где в составе $D(p)$ уже нет множителя p . Предполагая, что уравнение $D(p)=0$ имеет n различных и не равных нулю корней p_k ($k = 1, 2, \dots, n$), получаем другую форму записи теоремы разложения:

$$f(t) = \frac{N(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{p_k \cdot D'(p_k)} e^{p_k t}.$$

12. Разложение изображения на простые дроби.

Если дробно-рациональная функция общего вида

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \quad m < n,$$

не имеет кратных полюсов (все корни знаменателя разные), то функцию $F(p)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = \\ &= \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{p - p_2} + \dots + \frac{r_n}{p - p_n}. \end{aligned}$$

Допустим, нужно определить коэффициент r_2 . Сначала умножим все члены $F(p)$ на $(p - p_2)$:

$$\frac{(p - p_2)N(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = \frac{r_1(p - p_2)}{p - p_1} + r_2 + \dots + \frac{r_n(p - p_2)}{p - p_n}.$$

Если теперь принять $p = p_2$, то все члены, кроме r_2 , обратятся в нуль. Тогда

$$r_2 = \left. \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_3) \dots (p - p_n)} \right|_{p = p_2} = \frac{(p_2 - z_1)(p_2 - z_2) \dots (p_2 - z_m)}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3) \dots (p_2 - p_n)}.$$

Рассмотренный подход определения коэффициентов разложения вручную применим и в случае комплексно-сопряженных корней (полюсов).

Пусть $F(p)$ имеет пару комплексно-сопряженных полюсов, которые обозначим как $p_1 = a - jb$ и $p_2 = a + jb$. Тогда изображение можно записать в виде:

$$F(p) = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{p - p_2} = \frac{r_1}{p - a + jb} + \frac{r_2}{p - a - jb}.$$

Коэффициенты разложения будут комплексными. Найдем их:

$$r_1 = (p - a + jb)F(p) \Big|_{p=a-jb} = R e^{j\theta};$$

$$r_2 = (p - a - jb)F(p) \Big|_{p=a+jb} = R e^{-j\theta} = r_1^*,$$

где звездочка является признаком комплексно-сопряженного числа.

Далее запишем:

$$F(p) = \frac{r_1}{p - a + jb} + \frac{r_2}{p - a - jb} = \frac{R e^{j\theta}}{p + (-a + jb)} + \frac{R e^{-j\theta}}{p + (-a - jb)}.$$

Используя преобразование $e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p + \alpha}$, получим оригинал:

$$\begin{aligned} f(t) &= R e^{j\theta} \cdot e^{-(a-jb)t} + R e^{-j\theta} \cdot e^{-(a+ jb)t} = R e^{j\theta} \cdot e^{at} e^{-jbt} + R e^{-j\theta} \cdot e^{at} e^{jbt} = \\ &= R e^{at} [e^{j(bt-\theta)} + e^{-j(bt-\theta)}] = \\ &= R e^{at} [\cos(bt - \theta) + j \sin(bt - \theta) + \cos(bt - \theta) - j \sin(bt - \theta)] = \\ &= 2R e^{at} \cdot \cos(bt - \theta) = 2R e^{at} \cdot \sin(bt - \theta + \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Иногда встречаются изображения с кратными полюсами, т.е. полином в знаменателе функции $A(p)$ имеет кратные корни.

Пусть

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2)^q} = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_{21}}{(p - p_2)^1} + \frac{r_{22}}{(p - p_2)^2} \dots + \frac{r_{2q}}{(p - p_2)^q},$$

откуда видно, что корню кратности q в разложении на простые дроби соответствуют q слагаемых. Коэффициенты первого r_1 и последнего r_{2q} слагаемых находятся как обычно. Остальные коэффициенты, r_{2j} , где $j = 1, 2, \dots, q-1$ вычисляются по формуле:

$$r_{2j} = \frac{1}{(q-j)!} \cdot \frac{d^{q-j}}{dp^{q-j}} \left[(p-p_2)^q \cdot F(p) \right] \Big|_{p=p_2}. \quad (5.9)$$

Здесь используется производная по p порядка $(q-j)$ функции, стоящей в квадратных скобках.

Второй способ разложения на простые дроби выражения

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{r_1}{p-p_1} + \frac{r_2}{p-p_2} + \dots + \frac{r_n}{p-p_n}$$

состоит из следующих операций:

1) приводим обе части равенства к общему знаменателю и отбрасываем его;

2) составляем систему уравнений, приравнивая коэффициенты при *равных* степенях p левой и правой части равенства;

3) решаем систему уравнений, определяя коэффициенты разложения. При наличии кратных корней можно комбинировать оба способа.

Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений включает в себя несколько этапов:

1) переход от дифференциальных уравнений для оригиналов к алгебраическим уравнениям для изображений (прямое преобразование Лапласа);

2) решение операторных уравнений относительно изображений искомых величин;

3) нахождение оригиналов (обратное преобразование Лапласа).

Решим операторным методом те ДУ, которые были решены выше классическим методом.

Пример 5.4. Определить решение неоднородного ДУ первого порядка

$$2 \frac{dy}{dt} + y = 1 + 2t$$

с начальным условием $y(0) = 0$.

Запишем уравнение для изображений:

$$2pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2}$$

и найдем изображение искомой функции:

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2}}{2p+1} = \frac{p+2}{p^2(2p+1)}.$$

Найдем оригинал $y(t)$. Для этого представим изображение в виде суммы элементарных дробей:

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2(2p+1)} = \frac{r_1}{p^2} + \frac{r_2}{p} + \frac{r_3}{2p+1}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и отбросим знаменатели обеих частей:

$$p+2 = r_1(2p+1) + r_2p(2p+1) + r_3p^2$$

или

$$p+2 = p^2(2r_2+r_3) + p(2r_1+r_2) + r_1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях оператора p :

$$2r_2+r_3=0; \quad 2r_1+r_2=0; \quad r_1=2.$$

Отсюда получаем значения коэффициентов:

$$r_1=2, \quad r_2=-3, \quad r_3=6.$$

Тогда изображение выхода принимает вид:

$$Y(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p} + \frac{6}{2p+1} = \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p} + \frac{3}{p+0,5}.$$

Найдем оригинал решения как сумму оригиналов отдельных слагаемых:

$$y = 2t - 3 + 3e^{-0,5t} = 3(e^{-0,5t} - 1) + 2t.$$

Пример 5.5. Определить решение неоднородного ДУ второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 10e^{-3t}$$

при нулевых начальных условиях.

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2Y(p) + 6pY(p) + 8Y(p) = \frac{10}{p+3}$$

и найдем изображение искомой функции:

$$Y(p) = \frac{10}{(p^2+6p+8)(p+3)} = \frac{10}{(p+2)(p+4)(p+3)} = \frac{r_1}{p+2} + \frac{r_2}{p+4} + \frac{r_3}{p+3},$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов простых дробей при отсутствии кратных корней используем первый способ.

Умножим обе части (10) на полином $(p + 2)$ и в полученное выражение подставим первый корень, затем на полином $(p + 4)$ и подставим второй корень и, наконец, на полином $(p + 3)$ и подставим третий корень:

$$\frac{10}{(p_1 + 4)(p_1 + 3)} = r_1; \quad \frac{10}{(p_1 + 2)(p_1 + 3)} = r_2; \quad \frac{10}{(p_1 + 2)(p_1 + 4)} = r_3.$$

Отсюда получаем значения коэффициентов разложения:

$$r_1 = \frac{10}{(-2 + 4)(-2 + 3)} = 5; \quad r_2 = \frac{10}{(-4 + 2)(-4 + 3)} = 5;$$

$$r_3 = \frac{10}{(-3 + 2)(-3 + 4)} = -10.$$

Теперь запишем изображение выходной величины

$$Y(p) = \frac{5}{p + 2} + \frac{5}{p + 4} + \frac{-10}{p + 3}$$

и ее оригинал

$$y = 5e^{-2t} + 5e^{-4t} - 10e^{-3t}.$$

Разложение $Y(p)$ на простые дроби выполним также с помощью программы MATLAB. Для этого запишем изображение в виде отношения двух полиномов:

$$Y(p) = \frac{10}{(p + 3)(p^2 + 6p + 8)} = \frac{10}{p^3 + 9p^2 + 26p + 24}$$

Ynum=[10]

Yden=[1 9 26 24]

[r,p,k]=residue(Ynum,Yden)

r =
 5.0000
 -10.0000
 5.0000

p =
 -4.0000
 -3.0000
 -2.0000

k =
 []

В первой строке программы задается полином числителя (*numerator* – числитель дроби, англ.), во второй – полином знаменателя изображения (*denominator* – знаменатель дроби).

Полином в MATLAB задается вектором его коэффициентов, начиная со старшей степени. Ввод вектора-строки осуществляется в квадратных скобках, элементы которого разделяются пробелами или запятыми. Число элементов вектора, т.е. число коэффициентов полинома, всегда на единицу больше его степени, нулевые коэффициенты должны содержаться в векторе. Дадим описание функции `residue` (остаток, вычет):

`[r,p,k] = residue(B,A)` находит коэффициенты k , полюса p и коэффициенты r (вычеты) числителя дробно-рационального разложения отношения двух полиномов $B(s)/A(s)$. Если знаменатель не имеет кратных (одинаковых) корней, то отношение полиномов можно представить в виде:

$$\frac{B(p)}{A(p)} = \frac{r_1}{p-p_1} + \frac{r_2}{p-p_2} + \dots + \frac{r_n}{p-p_n} + k(p).$$

Вычеты возвращаются в вектор-столбце \mathbf{r} , полюса – в вектор-столбце \mathbf{p} и коэффициенты – в вектор-строке \mathbf{k} . Число полюсов равно $n = \text{length}(A(p)) - 1 = \text{length}(\mathbf{r}) = \text{length}(\mathbf{p})$. Вектор коэффициентов \mathbf{k} оказывается пустым, если степень числителя $B(p)$ меньше степени знаменателя $A(p)$ отношения полиномов. Каждому полюсу соответствует свой коэффициент. Так, в примере полюсу $p_1 = -4$ соответствует коэффициент $r_1 = 5$, полюсу $p_2 = -3$ соответствует коэффициент $r_2 = -10$, полюсу $p_3 = -2$ соответствует коэффициент $r_3 = 5$. Коэффициент k равен нулю.

Это позволяет записать изображение в виде

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{10}{p^3 + 9p^2 + 26p + 24} = \frac{r_1}{p-p_1} + \frac{r_2}{p-p_2} + \frac{r_3}{p-p_3} = \\ &= \frac{5}{p+4} + \frac{-10}{p+3} + \frac{5}{p+2}, \end{aligned}$$

а затем определить оригинал.

Преобразование Лапласа можно применять и к уравнениям состояния. В данном примере они имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -8x_1 - 6x_2 + 10e^{-3t}. \end{cases}$$

Начальные условия – нулевые, т.е. $x_1(0) = 0$ и $x_2(0) = \dot{y}(0) = 0$.

Запишем уравнения состояния в операторной форме:

$$\begin{cases} pX_1(p) = X_2(p); \\ pX_2(p) = -8X_1(p) - 6X_2(p) + \frac{10}{p+3} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} pX_1(p) = X_2(p); \\ 8X_1(p) + (p+6)X_2(p) = \frac{10}{p+3}. \end{cases}$$

Выражение $X_2(p) = pX_1(p)$ подставим во второе уравнение:

$$8X_1(p) + (p+6)pX_1(p) = \frac{10}{p+3}.$$

Отсюда получаем изображение первой переменной состояния, т.е. выходной величины:

$$X_1(p) = Y(p) = \frac{10}{(p^2 + 6p + 8)(p+3)} = \frac{10}{(p+2)(p+4)(p+3)}.$$

Изображение второй переменной состояния:

$$X_2(p) = pX_1(p) = \frac{10p}{(p^2 + 6p + 8)(p+3)} = \frac{10p}{(p+2)(p+4)(p+3)}.$$

Получено то же изображение искомой величины, что и с помощью ДУ второй степени, а также изображение скорости изменения искомой величины.

Пример 5.6. Определить решение неоднородного ДУ второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = t + \sin t$$

при нулевых начальных условиях: $dy/dt(0) = y(0) = 0$.

Запишем уравнение для изображений с учетом нулевых начальных условий

$$p^2 Y(p) + pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2 + 1}$$

и найдем изображение искомой функции:

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2 + 1}}{p^2 + p + 1} = \frac{1}{(p^2 + p + 1)p^2} + \frac{1}{(p^2 + p + 1)p^2} = Y_1(p) + Y_2(p),$$

Найдем отдельно оригиналы изображений $Y_1(p)$ и $Y_2(p)$, разложив дроби на слагаемые:

$$Y_1(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)p^2} = \frac{A_1 \sqrt{3}/2}{(p + 0,5)^2 + 0,75} + \frac{A_2(p + 0,5)}{(p + 0,5)^2 + 0,75} + \frac{A_3}{p} + \frac{A_4}{p^2},$$

откуда

$$\sqrt{3}/2 A_1 p^2 + A_2 p^3 + 0,5 A_2 p^2 + A_3 p^3 + A_3 p^2 + A_3 p + A_4 p^2 + A_4 p + A_4 = 1.$$

Определим неизвестные коэффициенты:

$$A_1 = -1/\sqrt{3}, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = -1, \quad A_4 = 1.$$

Подставив эти коэффициенты в $Y_1(p)$ и переходя к оригиналам, получим

$$y_1(t) = e^{-0,5t} \left(-0,5 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) - 1 + t.$$

Далее

$$Y_2(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)(p^2 + 1)} = \frac{A_1 \sqrt{3}/2}{(p + 0,5)^2 + 0,75} + \frac{A_2(p + 0,5)}{(p + 0,5)^2 + 0,75} + \frac{A_3}{(p^2 + 1)} + \frac{A_4 p}{(p^2 + 1)},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sqrt{3}/2 A_1 p^2 + \sqrt{3}/2 A_1 + A_2 p^3 + 0,5 A_2 p^2 + A_2 p + 0,5 A_2 + \\ + A_3 p^2 + A_3 p + A_3 + A_4 p^3 + A_4 p^2 + A_4 p = 1. \end{aligned}$$

Определим неизвестные коэффициенты:

$$A_1 = 1/\sqrt{3}, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = -1.$$

Подставив эти коэффициенты в $Y_2(p)$

$$Y_2(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)(p^2 + 1)} = \frac{A_1 \sqrt{3}/2}{(p + 0,5)^2 + 0,75} + \frac{A_2(p + 0,5)}{(p + 0,5)^2 + 0,75} + \frac{A_3}{(p^2 + 1)} + \frac{A_4 p}{(p^2 + 1)},$$

переходя к оригиналам, получим

$$y_2(t) = e^{-0,5t} \left(\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) - \cos(t).$$

Общее решение:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2e^{-0,5t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cos(t) + t - 1.$$

Найдем оригинал с помощью MATLAB и построим график решения:

```
syms Y p t
Y=(1/(p^2+p+1))*(1/p^2+1/(p^2+1))
y=ilaplace(Y,p,t);
y=vpa(y,3)
figure(1)
ezplot(y,[0 22]),grid
```

В командном окне

```
Y = 1/(p^2+p+1)*(1/p^2+1/(p^2+1))
y = -1.*cos(t)+2.*exp(-.500*t)*cos(.865*t)-1.+t
```

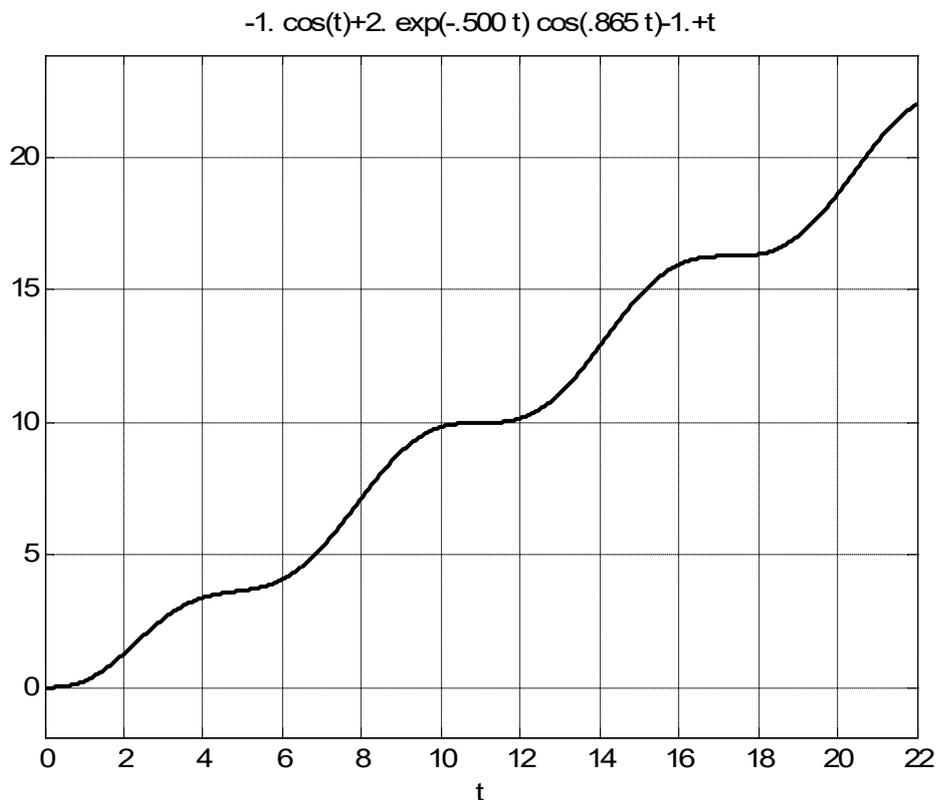


Рис. 5.4. Результаты расчетов по примеру 5.6

В программе `syms` – это функция для создания символических объектов (symbolic objects). После нее следуют аргументы: *символ изобра-*

жения, оператор Лапласа s (в компьютерных программах обозначается символом s), время t .

Операторный метод можно с успехом применять и при ненулевых начальных условиях.

Пример 5.7. Определить частное решение неоднородного ДУ второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10e^{-3t}$$

при следующих начальных условиях: $y(0) = 0$ и $y'(0) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1$.

Учитывая, что изображение второй производной равно

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \Leftrightarrow p^2 Y(p) - p \cdot y(0) - \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = p^2 Y(p) - 1,$$

запишем уравнение для изображений:

$$p^2 Y(p) - 1 + 6pY(p) + 8Y(p) = \frac{10}{p+3}$$

и найдем изображение искомой функции:

$$Y(p) = \frac{1 + \frac{10}{p+3}}{p^2 + 6p + 8} = \frac{p+13}{(p+2)(p+4)(p+3)} = \frac{r_1}{p+2} + \frac{r_2}{p+4} + \frac{r_3}{p+3},$$

где корни знаменателя изображения равны:

$$p_1 = -2; \quad p_2 = -4; \quad p_3 = -3.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов простых дробей при отсутствии кратных корней используем первый способ. В результате получим:

$$Y(p) = \frac{5,5}{p+2} + \frac{4,5}{p+4} + \frac{-10}{p+3}.$$

Теперь запишем оригинал выходной величины

$$y(t) = 5,5e^{-2t} + 4,5e^{-4t} - 10e^{-3t}.$$

Разложение $Y(p)$ на простые дроби выполним также с помощью программы MATLAB. Для этого запишем изображение в виде отношения двух полиномов:

$$Y(p) = \frac{p+13}{(p+3)(p^2+6p+8)} = \frac{p+13}{p^3+9p^2+26p+24} = \frac{b(p)}{a(p)}.$$

$$b = [1 \ 13]; \quad a = [1 \ 9 \ 26 \ 24];$$

```
[r, p, k]=residue(b, a)
r = 4.5000
    -10.0000
     5.5000
p = -4.0000
    -3.0000
    -2.0000
k = []
```

Найдем оригинал в MatLab:

```
syms Y p t
Y=(p+13)/(p^3+9*p^2+26*p+24)
y=ilaplace(Y,p,t);
y=vpa(y,3)
y = -10.*exp(-3.*t)+5.50*exp(-2.*t)+4.50*exp(-4.*t)
```

III. Решение ОДУ с помощью MATLAB

Функция `dsolve` позволяет найти символьное решение (решение в аналитическом виде) обыкновенного дифференциального уравнения. *Входными* аргументами `dsolve` являются строки с ДУ, начальными условиями, при их наличии, и независимой переменной. Все они вводятся в апострофах через запятую. Если начальные условия отсутствуют, решение содержит постоянные интегрирования C_1 , C_2 и т.д. Независимую переменную можно не указывать, тогда по умолчанию используется t . Для обозначения производной используется буква D . Символы D_2, D_3, \dots, D_N соответствуют второй, третьей и т.д. производным, соответственно. Так, символ D_2y есть эквивалент второй производной искомой функции $\frac{d^2y}{dt^2}$.

Визуализация *символьной функции* одной переменной осуществляется при помощи функции `ezplot`. Если в качестве входного аргумента указана только символьная функция, то команда `ezplot(y)` в графическое окно выводит график функции на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$. Можно задать второй входной аргумент в виде вектора с границами отрезка, на котором требуется построить график функции. В данном случае это выглядит так: `ezplot(y, [0 5]), grid`.

Полезно отметить одно из свойств символьных вычислений: вычисления с рациональными дробями позволяют получить значение символьного выражения с любой степенью точности, т.е. найти сколь угодно много значащих цифр результата. Для задания точности *символьных* выражений предназначена функция `vpa` (Variable precision arithmetic). По умолчанию удерживаются 32 значащие цифры. Второй дополнительный параметр `vpa` задает число значащих цифр. Для глобальной установки приме-

няется функция `digits`, во входном аргументе которой указывается требуемое количество цифр.

Решим ДУ приведенных выше примеров в MatLab.

1). ДУ из примера 5.1:

$$2 \frac{dy}{dt} + y = 1 + 2t$$

с начальным условием $y(0) = 0$.

Получим общее решение ОДУ данного примера, не указывая начального условия:

```
y=dsolve('2*Dy+y=1+2*t')
```

$$y = -3 + 2t + \exp(-1/2*t) * C_1$$

Постоянная C_0 здесь обозначена через C_1 .

Теперь используем во входном аргументе программы начальное условие:

```
y=dsolve('2*Dy+y=1+2*t','y(0)=0')
```

$$y = -3 + 2t + 3 * \exp(-1/2*t) .$$

Естественно, получилось то же частное решение неоднородного ДУ.

Знак равенства при введении ДУ можно ставить в любом месте. Например, заданное уравнение можно ввести в виде

$$2 \frac{dy}{dt} = -y + 1 + 2t \quad \text{или} \quad 2 \frac{dy}{dt} + y - 1 - 2t = 0 .$$

Результат будет один и тот же. Убедимся в этом:

```
y=dsolve('2*Dy=-y+1+2*t','y(0)=0')
```

$$y = -3 + 2t + 3 * \exp(-1/2*t)$$

или

```
y=dsolve('2*Dy+y-1-2*t=0','y(0)=0')
```

$$y = -3 + 2t + 3 * \exp(-1/2*t) .$$

2). ДУ из примера 5.2:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10e^{-3t}$$

при нулевых начальных условиях $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$.

Решим это уравнение в MATLAB:

```
y=dsolve('D2y+6*Dy+8*y=10*exp(-
*t)', 'Dy(0)=0', 'y(0)=0')
y = (-10/exp(t)+5*exp(-2*t)+5)*exp(-2*t)
```

Проверим правильность полученного результата, подставив выражение для $y(t)$ в исходное ДУ. Вычисление производных любого порядка проще производить при помощи функции `diff`. Символьная запись функции указывается в первом входном аргументе, переменная, по которой производится дифференцирование – во втором, а порядок производной – в третьем:

```
y=dsolve('D2y+6*Dy+8*y=10*exp(-
3*t)', 'Dy(0)=0, y(0)=0')
S=simplify(diff(y,t,2)+6*diff(y,t,1)+8*y)
```

В командном окне появляется результат:

```
y =
(-10/exp(t)+5*exp(-2*t)+5)*exp(-2*t)
S =
10*exp(-3*t)
```

Функция `dsolve` может решать несколько ДУ с начальными условиями или без них. С этой целью преобразуем ДУ данного примера

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10e^{-3t}$$

в уравнения состояния. Пусть $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$. Тогда $\dot{x}_2 = \ddot{y}$, и уравнения состояния записываются в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -8x_1 - 6x_2 + 10e^{-3t}. \end{cases}$$

Пусть начальные условия – нулевые, т.е. $x_1(0) = 0$ и $x_2(0) = \dot{y}(0) = 0$. Воспользуемся MATLAB, используя в качестве выходных аргументов переменные состояния:

```
[x1,x2]=dsolve('Dx1=x2', 'Dx2=-8*x1-6*x2+10*exp(-
3*t)', 'x1(0)=0, x2(0)=0')
x1 = -10*exp(-3*t)+5*exp(-4*t)+5*exp(-2*t)
x2 = 30*exp(-3*t)-20*exp(-4*t)-10*exp(-2*t)
```

Вторая переменная состояния – это скорость изменения первой переменной, т.е. ее производная.

3). ДУ из примера 5.3:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = t + \sin t$$

при нулевых начальных условиях: $dy/dt(0)=y(0) = 0$.

Воспользуемся программой MATLAB для решения:

```
y=dsolve('D2y+Dy+y=t+sin(t)', 'Dy(0)=0, y(0)=0')  
y = -1+2*exp(-1/2*t)*cos(1/2*3^(1/2)*t)-cos(t)+t
```

В примере 3 получено то же выражение:

$$y = 2e^{-0,5t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cos(t) + t - 1.$$

4). ДУ из примера 5.7:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = t + \sin(t)$$

при ненулевых начальных условиях: $dy/dt(0)=1; y(0) = 0$.

Воспользуемся программой MATLAB для решения:

```
y=dsolve('D2y+6*Dy+8*y=10*exp(-3*t)', 'Dy(0)=1, y(0)=0')  
y=simplify(y)  
y = 1/2*(-20*exp(-t)+9*exp(-2*t)+11)*exp(-2*t)
```

В примере 3 получено то же выражение:

$$y(t) = 5,5e^{-2t} + 4,5e^{-4t} - 10e^{-3t}.$$

Домашнее задание.

1. Решить вручную дифференциальное уравнение, полученное в первом занятии, классическим и операторным методами при нулевых начальных условиях. Входной сигнал (входное напряжение) изменяется по закону $u_1(t) = 10e^{-\alpha t}$ В, где $\alpha = 2|p|_{\min}$ или $\alpha = 2|\delta|$, $|p|_{\min}$ – минимальный по модулю корень характеристического уравнения ДУ в случае действительных корней и $|\delta|$ – модуль действительной части комплексно-сопряженных корней. Проверить решение ДУ в MatLab с помощью функций `dsolve` и `ilaplace`. Построить в MatLab график выходной величины.

2. По заданному ДУ сформировать уравнения состояния и решить их в MatLab. Построить графики переменных состояния и построить по ним фазовую траекторию системы.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ И ЗВЕНЬЕВ. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

6.1. Временные характеристики

Свойства элементов и систем управления определяются по их реакции на типовые воздействия. К таким воздействиям относятся ступенчатые, импульсные, гармонические.

Важное место в теории систем автоматического управления занимает исследование реакции систем на единичные воздействия. Рассмотрим математическое описание таких воздействий.

1. Ступенчатая функция, или единичный скачок.

Единичная ступенчатая функция $1(t)$ определяется следующим образом:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

График этой функции приведен на Рис. 6.1, а.

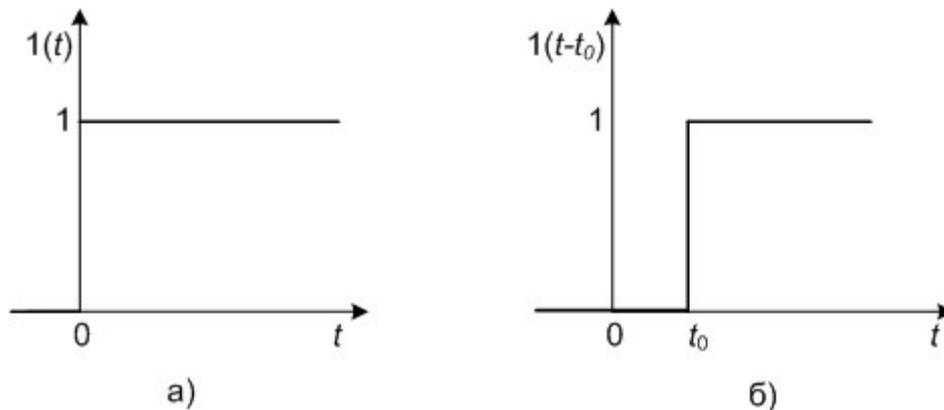


Рис. 6.1. Ступенчатая функция

Умножение ступенчатой функции на константу A изменяет ее уровень на эту величину, в результате получается неединичный скачок:

$$A \cdot 1(t) = \begin{cases} A, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Мы можем сместить ступенчатую функцию на время t_0 Рис. 1, б). Тогда получим ее выражение в виде

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad A \cdot 1(t-t_0) = \begin{cases} A, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

Изображения по Лапласу этих функций с учетом теоремы запаздывания имеют вид:

$$1(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p}; \quad 1(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-pt_0} \cdot \frac{1}{p} = \frac{e^{-pt_0}}{p}.$$

В связи с тем, что умножение любой ограниченной функции времени $f(t)$ на $1(t-t_0)$ равно нулю при $t < t_0$ и $f(t)$ при $t \geq t_0$:

$$f(t) \cdot 1(t-t_0) = \begin{cases} f(t), & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

ступенчатую функцию удобно использовать для аналитического представления различных внешних сигналов, действующих на систему, значения которых равны нулю при $t < t_0$ и скачкообразно изменяются в момент $t = t_0$.

2. Импульсная функция, или единичный импульс

Единичная импульсная функция есть идеализация прямоугольного импульса длительностью Δt и высотой $1/\Delta t$, Рис. 6.2, а. Площадь такого импульса равна 1, т.к. $\Delta t \cdot (1/\Delta t) = 1$, и не зависит от Δt . При уменьшении длительности Δt его высота возрастает, причем при $\Delta t \rightarrow 0$ она стремится к бесконечности, но площадь остается равной 1. Импульс бесконечно малой длительности, бесконечно большой высоты, площадь которого равна 1, будем называть *единичным импульсом*. Импульсная функция, определяющая единичный импульс, обозначается $\delta(t-t_0)$ и называется *δ -функцией или функцией Дирака*, Рис. 6.2, б.

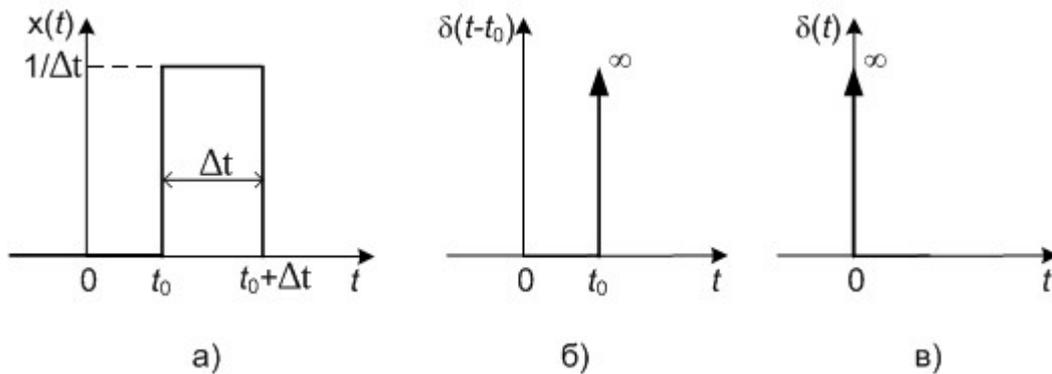


Рис. 6.2. Функция Дирака

Таким образом, импульсная функция обладает свойствами

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0, \\ \infty, & t = t_0, \end{cases}$$

причем площадь такого импульса равна единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot dt = 1.$$

При $t_0 = 0$ для δ -функции используется обозначение $\delta(t)$. При построении временных диаграмм функции $\delta(t - t_0)$ и $\delta(t)$ принято изображать в виде вертикальной стрелки со значком ∞ правее острия (рис.6.2, в).

Между единичными функциями имеется связь:

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t - t_0) - 1(t - t_0 - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} 1(t - t_0),$$

откуда

$$1(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) \cdot dt.$$

Таким образом, импульсная функция представляет собой производную от единичной ступенчатой функции, а единичная ступенчатая функция – интеграл от импульсной функции.

При $t_0 = 0$ получим:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) \quad \text{и} \quad 1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) \cdot dt.$$

Изображение импульсной функции по Лапласу имеет вид:

$$L[\delta(t)] = 1 \quad \text{и} \quad L[\delta(t - t_0)] = e^{-pt_0}.$$

Переходная характеристика (ПХ) – это реакция системы на входное воздействие в виде несмещенной единичной функции $1(t)$ при **нулевых** начальных условиях. ПХ обозначается символом $h(t)$. Размерность ПХ равна отношению размерности отклика к размерности внешнего воздействия. Изображение по Лапласу ПХ будем обозначать как $H(p)$. Для получения $H(p)$ можно воспользоваться передаточной функцией системы. Как известно, для получения изображения выходного сигнала необходимо передаточную функцию умножить на изображение входного сигнала:

$$H(p) = Y(p) = W(p)X(p).$$

Так как в качестве входного воздействия выступает единичная функция $x(t) = 1(t)$, а ее изображение равно $X(p) = \frac{1}{p}$, то

$$h(t) \Leftrightarrow H(p) = W(p) \frac{1}{p} = \frac{W(p)}{p}.$$

Таким образом, для определения ПХ линейной системы нужно ее передаточную функцию разделить на оператор Лапласа, а затем воспользоваться обратным преобразованием Лапласа.

Импульсная характеристика (ИХ) – это реакция системы на входное воздействие в виде несмещенного дельта-импульса $\delta(t)$ при **нулевых** начальных условиях. ИХ обозначают символом $w(t)$ и называют также *весовой характеристикой*. Размерность ИХ равна отношению размерности отклика к произведению размерности внешнего воздействия на время.

Т.к. изображение единичного импульса равно 1, то изображение импульсной характеристики равно передаточной функции системы:

$$w(t) \Leftrightarrow W(p).$$

Итак, импульсная характеристика системы есть ничто иное, как оригинал ее передаточной функции. Кроме того, ИХ можно найти путем дифференцирования переходной характеристики, если последняя известна:

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t).$$

Используя теорему запаздывания, можно записать изображение реакции на смещенный дельта-импульс $\delta(t)$:

$$w(t - t_0) \Leftrightarrow W(p) \cdot e^{-pt_0}.$$

Кроме переходной и импульсной характеристик, показывающих реакцию системы на типовые воздействия, в некоторых случаях рассматривают и свободное движение системы, выведенной из состояния равновесия. Причем под состоянием равновесия может пониматься как состояние покоя, когда все переменные системы неизменны, так и состояние движения по траектории, предписанной входными воздействиями (вынужденного движения). Систему описывают уравнениями в отклонениях от данного состояния (см. работу №3). Отклонение входных воздействий задают равными нулю, поэтому описание системы принимает вид однородного дифференциального уравнения высокого порядка или системы однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Отклонения выходной величины и ее производных (или отклонения переменных состояния, если система описывается уравнениями в пространстве состояний) задают определенным образом. Переходный процесс, возникающий в системе вследствие вывода ее из состояния равновесия, представляет собой свободное движение системы. Если система устойчива, все отклонения стремятся к нулю, а характеристики процесса (длительность, колебательность и т.д.) могут использоваться для оценки качества системы.

6.2. Интеграл Дюамеля

Переходные характеристики могут использоваться для определения реакции системы на произвольное воздействие. При этом используется формулы (интегралы) Дюамеля.

Реакция звена, имеющего весовую функцию $w(t)$, на произвольное воздействие $x(t)$ при нулевых начальных условиях может быть определена следующим образом

$$y(t) = \int_0^t w(t - \tau)x(\tau)d\tau. \quad (6.1)$$

Приведенная формула позволяет найти мгновенное значение выходной величины y в момент времени t . Переменной интегрирования является τ - смещение (сдвиг) по времени отчетов функций w и x , входящих в произведение под знаком интеграла. При определении $y(t)$ интеграл берется на промежутке от 0 до t .

Приведенная формула непосредственно вытекает из *теоремы о свертке* операционного исчисления.

Теорема умножения (теорема о свертке). Пусть имеются две непрерывные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Тогда выражение

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)dt$$

называется сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается f_1*f_2 .

Теорема. Преобразование Лапласа от свертки равно произведению преобразований Лапласа от функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$:

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)dt \Leftrightarrow F_1(p)F_2(p).$$

Таким образом, если выход системы $y(t)$ связан с ее входом $x(t)$ передаточной функцией $W(t)$, т.е.

$$Y(p) = W(p)X(p),$$

то эту связь можно представить интегралом (6.1).

Ниже в качестве примеров приведены расчеты переходных характеристик апериодического и колебательного звеньев.

Пример 6.1. Определить переходную и импульсную характеристики апериодического звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{2p+1}.$$

Изображение переходной характеристики:

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{1}{p(2p+1)}.$$

Воспользовавшись формулой

$$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \Leftrightarrow \frac{1}{p(\tau p + 1)},$$

запишем оригинал, т.е. ПХ:

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}} = 1 - e^{-0,5t}.$$

Импульсная характеристика:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d(1 - e^{-0,5t})}{dt} = 0,5e^{-0,5t}.$$

Для определения ИХ другим способом запишем ПФ в виде:

$$W(p) = \frac{1}{2p+1} = \frac{0,5}{p+0,5} = 0,5 \frac{1}{p+0,5}.$$

Этому изображению соответствует оригинал

$$w(t) = 0,5e^{-0,5t}.$$

Пример 6.2. Определить переходную и импульсную характеристики апериодического звена второго порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{10}{(p+2)(p+4)} = \frac{10}{p^2 + 6p + 8}.$$

Изображение переходной характеристики:

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{10}{p(p+2)(p+4)} = \frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p+2} + \frac{r_3}{p+4}.$$

Корни знаменателя: $p_1 = 0$; $p_2 = -2$; $p_3 = -4$.

Находим числители дробей:

$$r_1 = \frac{10}{(p_1+2)(p_1+4)} = \frac{10}{2 \cdot 4} = 1,25; \quad r_2 = \frac{10}{p_2(p_2+4)} = \frac{10}{-2 \cdot (-2+4)} = -2,5;$$

$$r_3 = \frac{10}{p_3(p_3+2)} = \frac{10}{-4 \cdot (-4+2)} = 1,25.$$

Следовательно:

$$H(p) = \frac{1,25}{p} + \frac{-2,5}{p+2} + \frac{1,25}{p+4};$$

$$h(t) = 1,25 - 2,5e^{-2t} + 1,25e^{-4t}; \quad w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 5e^{-2t} - 5e^{-4t}.$$

Проверим результат в MatLab:

```

b=10;a=[1 6 8 0];
[r,p,k]=residue(b,a)
syms Y p t
Y=(10)/(p^3+6*p^2+8*p);
y=ilaplace(Y,p,t);
y=vpa(y,3)
r = 1.2500
    -2.5000
    1.2500
p = -4
    -2
     0
k = []
y = 1,25-2.50*exp(-2.*t)+1.25*exp(-4.*t)

```

Пример 6.3. Определить переходную и импульсную характеристики колебательного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

Изображение переходной характеристики:

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{1}{p(p^2 + p + 1)} = \frac{N(p)}{p \cdot D(p)}.$$

Оригинал найдем по теореме разложения:

$$h(t) = \frac{N(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{p_k \cdot D'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Здесь $N(p)=1$; $D'(p) = 2p + 1$; $N(0)=1$; $D(0)=1$.

Корни полинома $D(p)$:

$$p_1 = -0,5 + j\sqrt{0,75} = -0,5 + j0,866 = e^{j120^\circ}; \quad p_2 = -0,5 - j0,866 = e^{-j120^\circ}.$$

Подставим корни в числитель и производную полинома:

$$N(p_1) = N(p_1) = 1;$$

$$D'(p_1) = 2p_1 + 1 = 2(-0,5 + j0,866) + 1 = j1,7321 = 1,7321e^{j90^\circ};$$

$$D'(p_2) = 2p_2 + 1 = 2(-0,5 - j0,866) + 1 = -j1,7321 = 1,7321e^{-j90^\circ}.$$

Подставим полученные числа в формулу:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{N(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{p_k \cdot D'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{N(0)}{D(0)} + \frac{N(p_1)}{p_1 \cdot D'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{p_2 \cdot D'(p_2)} e^{p_2 t} = \\ &= \frac{1}{1} + \frac{e^{(-0,5+j0,866)t}}{e^{j120^\circ} \cdot 1,7321e^{j90^\circ}} + \frac{e^{(-0,5-j0,866)t}}{e^{-j120^\circ} \cdot 1,7321e^{-j90^\circ}} = 1 + 0,5773e^{-0,5t} e^{j(0,866t-210^\circ)} + \\ &+ 0,5773e^{-0,5t} e^{-j(0,866t-210^\circ)} = 1 + 0,5773e^{-0,5t} \left[e^{j(0,866t-210^\circ)} + e^{-j(0,866t-210^\circ)} \right] = \\ &= 1 + 0,5773e^{-0,5t} \left[\cos(0,866t - 210^\circ) + j \sin(0,866t - 210^\circ) + \cos(0,866t - 210^\circ) - \right. \\ &\left. - j \sin(0,866t - 210^\circ) \right] = 1 + 0,5773e^{-0,5t} 2 \cos(0,866t - 210^\circ) = \\ &= 1 + 1,1547e^{-0,5t} \sin(0,866t - 120^\circ). \end{aligned}$$

Этот пример показывает, что в случае комплексно сопряженных корней можно использовать только первый корень, найти слагаемое

$\frac{N(p_1)}{p_1 \cdot D'(p_1)} e^{p_1 t}$ и взять от него удвоенную действительную часть:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{N(0)}{D(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{N(p_1)}{p_1 \cdot D'(p_1)} e^{p_1 t} \right] = 1 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{e^{(-0,5+j0,866)t}}{e^{j120^\circ} \cdot 1,7321e^{j90^\circ}} \right] = \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left[0,5773e^{-0,5t} e^{j(0,866t-210^\circ)} \right] = 1 + 0,5773e^{-0,5t} 2 \cos(0,866t - 210^\circ) = \\ &= 1 + 1,1547e^{-0,5t} \sin(0,866t - 120^\circ) = 1 + 1,1547e^{-0,5t} [\sin(0,866t) \cdot \cos(120^\circ) - \\ &- \cos(0,866t) \cdot \sin(120^\circ)] = 1 - 0,577e^{-0,5t} \sin(0,866t) - e^{-0,5t} \cos(0,866t). \end{aligned}$$

Проверим правильность решения с помощью MatLab:

```
H=1/(p^3+p^2+p)
h=ilaplace(H,p,t);
h=vpas(h,3)
h =
1. -1. *exp(-.500*t) *cos(.865*t) - .576*exp(-
.500*t) *sin(.865*t)
```

Найдем импульсную характеристику, для чего разложим передаточную функцию на сумму дробей:

$$W(p) = \frac{1}{(p + 0,5 - j0,866)(p + 0,5 + j0,866)} = \frac{r_1}{p + 0,5 - j0,866} + \frac{r_{1*}}{p + 0,5 + j0,866};$$

$$r_1 = R e^{j\theta} = \frac{1}{p_1 + 0,5 + j0,866} = \frac{1}{-0,5 + j0,866 + 0,5 + j0,866} = 0,5773 e^{-j90^0};$$

$$R = 0,5773; \quad \Theta = -90^0;$$

$$W(p) = \frac{r_1}{p - a + jb} + \frac{r_2}{p - a - jb} = \frac{R e^{j\theta}}{p + (-a + jb)} + \frac{R e^{-j\theta}}{p + (-a - jb)};$$

$$w(t) = 2R e^{at} \cdot \sin(bt - \theta + \frac{\pi}{2}) = 2 \cdot 0,5773 e^{-0,5t} \sin(0,866t - 90^0 + 90^0) =$$

$$= 2 \cdot 0,5773 e^{-0,5t} \sin(0,866t - 90^0 + 90^0) = 1,155 e^{-0,5t} \sin(0,866t).$$

Проверим правильность решения с помощью MatLab:

$$W = 1 / (p^2 + p + 1)$$

$$w = \text{ilaplace}(W, p, t);$$

$$w = \text{vpa}(w, 4)$$

$$w = 1.155 * \exp(-.500 * t) * \sin(.865 * t)$$

Пример 6.4. Определить свободное движение системы, выведенной из состояния равновесия и описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0$$

при начальных условиях: $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0; y(0) = 1.$

Введем обозначения $y = x_1; \frac{dy}{dt} = x_2 = \dot{x}_1$ и составим модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

Начальные значения переменных состояния: $x_1(0) = 1; x_2(0) = 0.$

Решим задачу операторным методом.

Учитывая, что дифференцированию функции $f(t)$ соответствует умножение изображения этой функции на p минус начальное значение этой функции, т.е.

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pF(p) - f(0),$$

запишем уравнения состояния в операторной форме:

$$\begin{cases} pX_1(p) - x_1(0) = X_2(p); \\ pX_2(p) = -X_1(p) - X_2(p). \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} pX_1(p) - X_2(p) = x_1(0); \\ X_1(p) + (p+1)X_2(p) = 0. \end{cases}$$

Решим систему операторных уравнений с помощью определителей.

Главный определитель системы:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = p^2 + p + 1.$$

Вспомогательные определители:

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} x_1(0) & -1 \\ 0 & p+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p+1 \end{vmatrix} = p+1; \quad \Delta_2(p) = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Изображения переменных состояния:

$$X_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{p+1}{p^2 + p + 1}; \quad X_2(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{-1}{p^2 + p + 1}.$$

Найдем оригинал первой переменной состояния, воспользовавшись таблицей изображений и оригиналов. Для изображения

$$X(p) = \frac{\tau p + 1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi < 1$$

оригинал записывается в виде:

$$x(t) = C e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \Theta),$$

где

$$C = \frac{\sqrt{(1-2\alpha\tau)T^2 + \tau^2}}{\beta T^3}; \quad \Theta = \operatorname{arctg} \frac{\tau\beta}{1-\alpha\tau}; \quad \alpha = \frac{\xi}{T}; \quad \beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}.$$

Применяя эти формулы, получим оригинал:

$$x_1(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-0,5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right).$$

В Matlab построим график этой функции:

```
t=0:0.01:10;
x1=2/sqrt(3)*exp(-0.5*t).*sin(sqrt(3)/2*t+pi/3);
plot(t,x1),grid
```

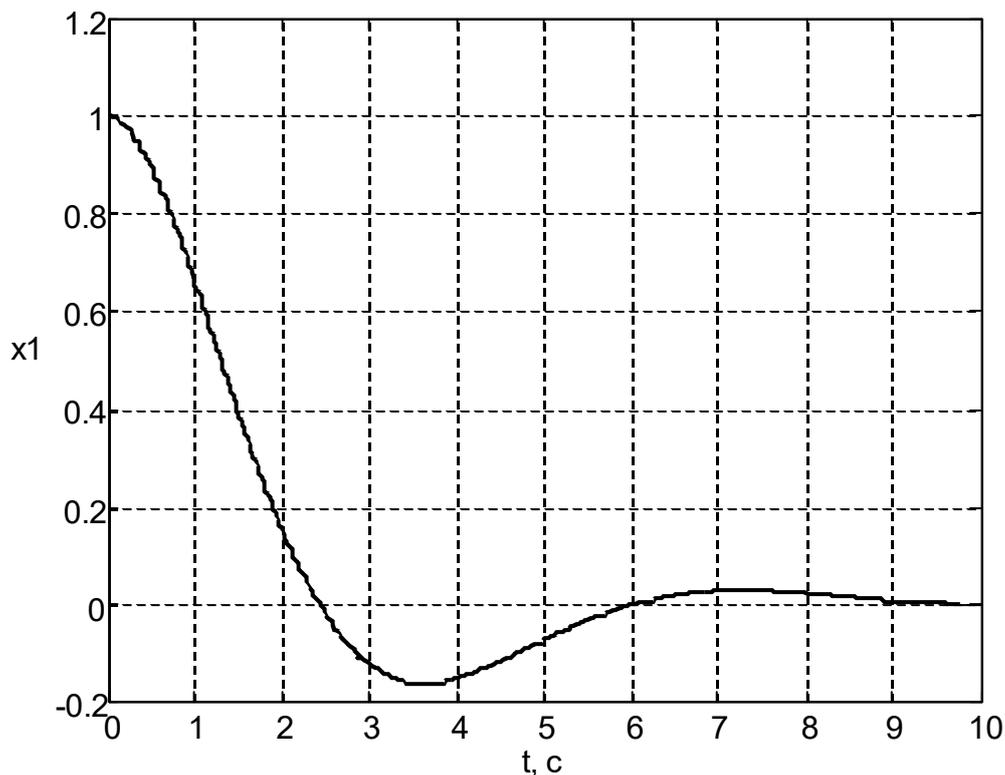


Рис.6.3. График функции $x_1(t)$ (пример 6.4)

Пример 6.5. Определить с помощью интеграла Дюамеля реакцию звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{2p+1} = \frac{0,5}{p+0,5}$$

на входной сигнал $x(t)=1+2t$ (начальное условие нулевое).

Весовая функция найдена в примере 6.1 и имеет вид $w(t) = 0,5e^{-0,5t}$. Следовательно

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t 0,5e^{-0,5t+0,5\tau}(1+2\tau)d\tau = 0,5e^{-0,5t} \int_0^t e^{0,5\tau}(1+2\tau)d\tau = \\ &= 0,5e^{-0,5t} \left(2e^{0,5\tau} \Big|_0^t + 2 \int_0^t e^{0,5\tau} \tau d\tau \right) = 1 - e^{-0,5t} + e^{-0,5t} \int_0^t e^{0,5\tau} \tau d\tau = \\ &= 1 - e^{-0,5t} + e^{-0,5t} \left(2e^{0,5\tau} \tau \Big|_0^t - \int_0^t 2e^{0,5\tau} d\tau \right) = 1 - e^{-0,5t} + 2t - e^{-0,5t} \cdot 4e^{0,5\tau} \Big|_0^t = \\ &= 1 - e^{-0,5t} + 2t - 4 + 4e^{-0,5t} = 3(e^{-0,5t} - 1) + 2t. \end{aligned}$$

Пример 6.6. Определить с помощью интеграла Дюамеля реакцию апериодического звена второго порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{10}{(p+2)(p+4)} = \frac{10}{p^2 + 6p + 8}$$

на входной сигнал $x(t) = e^{-3t}$ при нулевых начальных условиях, т.е. при $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$.

Весовая функция найдена в примере 6.2 и имеет вид:

$$w(t) = 5e^{-2t} - 5e^{-4t}.$$

Следовательно:

$$w(\tau) = 5e^{-2\tau} - 5e^{-4\tau}; \quad x(t-\tau) = e^{-3(t-\tau)} = e^{-3t} \cdot e^{3\tau};$$

$$w(\tau)x(t-\tau) = (5e^{-2\tau} - 5e^{-4\tau})e^{-3t} \cdot e^{3\tau} = 5e^{-3t} \cdot e^{\tau} - 5e^{-3t} \cdot e^{-\tau}.$$

Подставим это выражение под знак интеграла и проинтегрируем его:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t (5e^{-3t} \cdot e^{\tau} - 5e^{-3t} \cdot e^{-\tau})d\tau = \\ &= 5e^{-3t} \cdot e^{\tau} \Big|_0^t + 5e^{-3t} \cdot e^{-\tau} \Big|_0^t = 5e^{-3t} \cdot e^t - 5e^{-3t} + 5e^{-3t} \cdot e^{-t} - 5e^{-3t} = \\ &= 5e^{-2t} - 10e^{-3t} + 5e^{-4t}. \end{aligned}$$

Для более сложных передаточных функций аналитическое решение интеграла Дюамеля затруднительно, тем более что предварительно нужно определять функцию веса. Однако численно интеграл решается достаточно просто, если известно численное решение для весовой функции.

6.3. Определение временных характеристик численными методами пакета Control

Пакет Control System Toolbox предоставляет большие возможности для получения временных откликов систем управления. С его помощью можно строить переходные (step) и импульсные (impulse) характеристики, находить отклик на произвольное заданное внешнее воздействие (lsim), генерировать входные тестовые сигналы для lsim, определять свободное движение системы (initial). Рассмотрим отдельно все указанные функции и применим их для построения временных характеристик.

1). Переходная характеристика

Для построения переходных характеристик линейных систем используется функция step, имеющая несколько вариантов вызова:

```

step(sys)
step(sys,t)
step(sys1,sys2,...,sysN)
step(sys1,sys2,...,sysN,t)
step(sys1,'PlotStyle1',...,sysN,'PlotStyleN')
[y,t,x] = step(sys)

```

Описание.

Функция `step(sys)`, вызываемая без выходных (левосторонних) аргументов, строит на экране отклик системы (SS, ZPK или TF) на единичный скачок, т.е. переходную характеристику. Для систем с несколькими входами строится система ПХ для каждого канала. Продолжительность переходного процесса определяется автоматически на основе системы полюсов.

Функция `step(sys,t)` использует явно заданный диапазон. Можно указать или конечное время моделирования или вектор значений времени: `t = 0:dt:Tfinal`.

Для построения на одном графике ПХ нескольких систем (например, с целью сравнения) используется вызов `step(sys1,sys2,...,sysN)` или `step(sys1,sys2,...,sysN,t)`.

Можно определить цвет и стиль линий графика. Например, команда `step(sys1,'y:',sys2,'g--')` строит ПХ первой системы в виде точечной желтой линии, а второй системы – пунктирной зеленой линии.

Вызываемая с выходными аргументами, команда `[y,t] = step(sys)` график не строит, но возвращает значения ПХ и соответствующих значений времени.

Постоим ПХ для двух первых примеров.

```

%Передаточные функции звеньев
W1=tf(1,[2 1]);W2=tf(10,[1 6 8]);

%Переходные характеристики
figure(1)
step(W1,'k-.',W2,'k-',10),grid
legend('W1','W2')

```

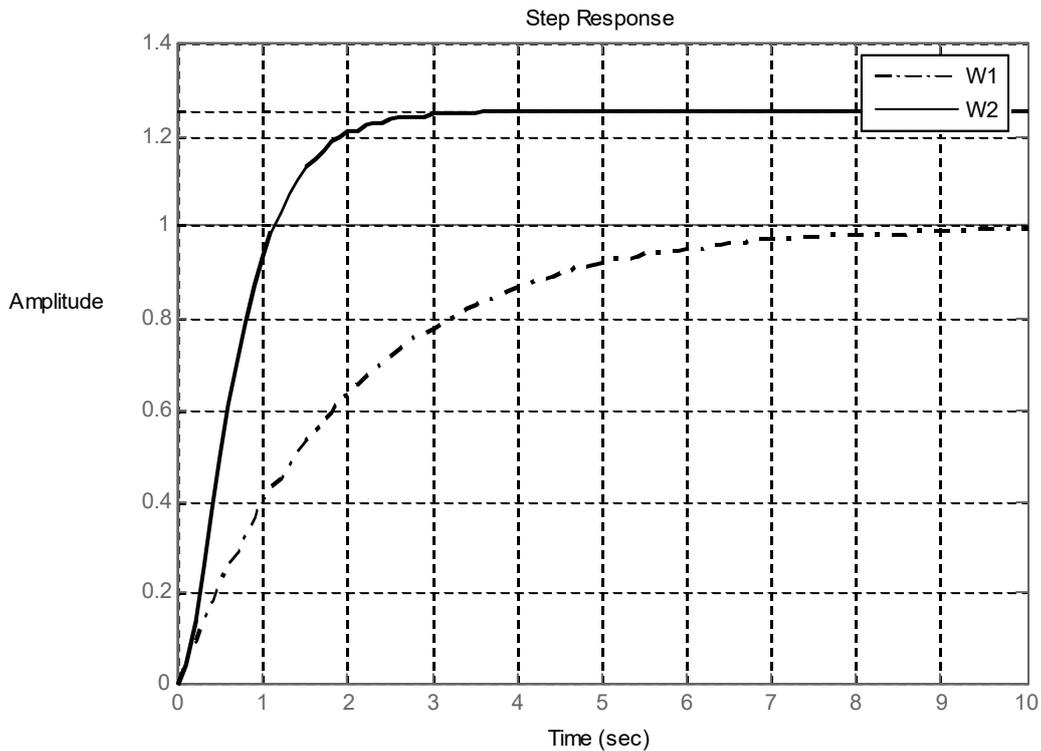


Рис.6.3. Переходные характеристики (примеры 6.1, 6.2)

Построим также ПХ звена из примера 6.3:

```
W=tf(1,[1 1 1])
step(W,10),grid
```

График переходной характеристики приведен на Рис. 6.4.

Важно отметить, что графики и окна в целом, создаваемые функцией `step` и другими функциями пакета `Control`, значительно расширяют возможности стандартных графиков и окон `Matlab` (создаваемых, например, функцией `plot`), добавляя элементы интерфейса, связанные с теорией автоматического управления. Так, с помощью контекстно-зависимого меню, вызываемого щелчком правой кнопки мыши, на графике можно отобразить ряд численных показателей качества процесса:

- перерегулирование (Overshoot) $\sigma = 16,3\%$;
- время наступления первого максимума $t_m = 3,6$ с при 2 % «коридоре»;
- время переходного процесса (Settling Time) $t_{n.n} = 8,08$ с.

Анализ передаточной функции показывает, что параметры колебательного звена имеют значения:

- собственная частота колебаний $\omega_0 = 1 \text{ c}^{-1}$
- постоянная времени $T = \frac{1}{\omega_0} = 1 \text{ c}$
- коэффициент демпфирования $\xi = 0,5$.

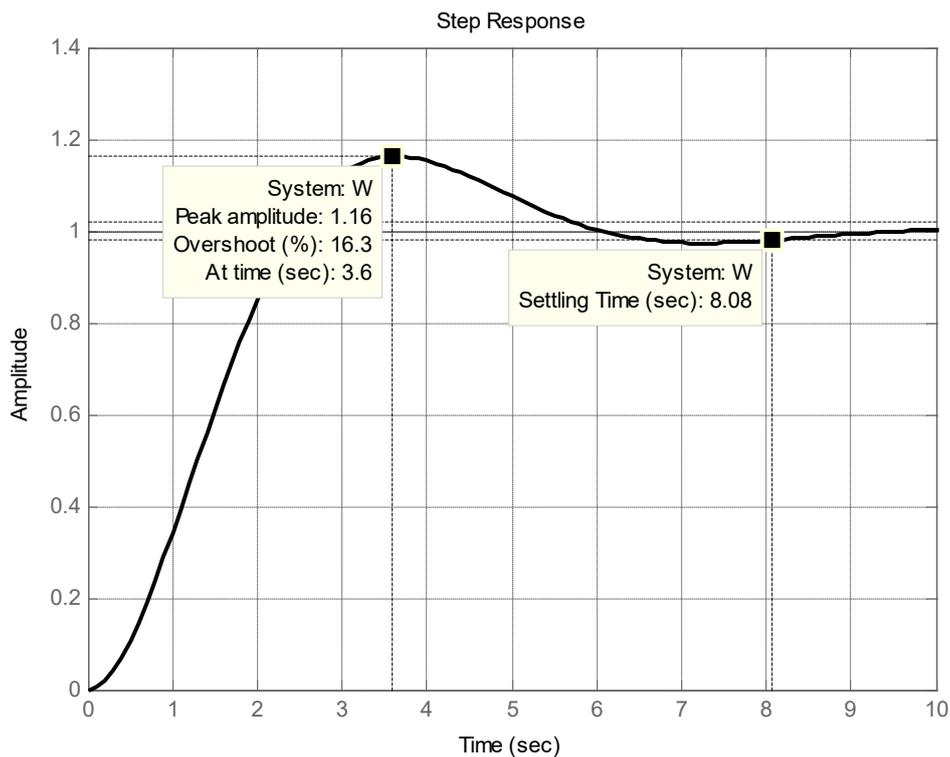


Рис. 6.4. Переходна характеристика (пример 6.3)

2). Импульсная характеристика.

Для построения импульсных характеристик линейных систем используется функция `impulse`:

```
impulse(sys)
impulse(sys,t)
impulse(sys1,sys2,...,sysN)
impulse(sys1,sys2,...,sysN,t)
impulse(sys1,'PlotStyle1',...,sysN,'PlotStyleN')
[y,t] = impulse(sys)
```

Варианты вызова этой функции – такие же, как и у функции `step`.

Строить ИХ нескольких систем на одном графике не совсем удобно, ведь ИХ есть производная ПХ, а это значит, что в начальный момент времени значения ИХ могут значительно отличаться.

MATLAB позволяет разместить в графическом окне несколько осей и вывести на них различные графики. С этой целью окно разбивается на определенное число частей по вертикали и горизонтали с использованием функции `subplot`, которая располагает оси в виде матрицы и используется с тремя параметрами: `subplot(i, j, n)`. Здесь *i* и *j* – число подграфиков соответственно по вертикали и горизонтали, а *n* – номер подграфика, который надо сделать текущим. Номер отсчитывается от левого верхнего угла построчно.

Построим ИХ для трех первых примеров:

```
%Передаточные функции звеньев
W1=tf(1,[2 1]), W2=tf(10,[1 6 8]), W3=tf(1,[1 1 1])
%Импульсные характеристики
[w,t]=impz(W1)
subplot(2,2,1), plot(t,w, 'LineWidth',2),grid
xlabel('t'),ylabel('w1(t)')
[w,t]=impz(W2)
subplot(2,2,2), plot(t,w, 'LineWidth',2),grid
xlabel('t'),ylabel('w2(t)')
[w,t]=impz(W3)
subplot(2,2,3), plot(t,w, 'LineWidth',2),grid
xlabel('t'),ylabel('w3(t)')
```

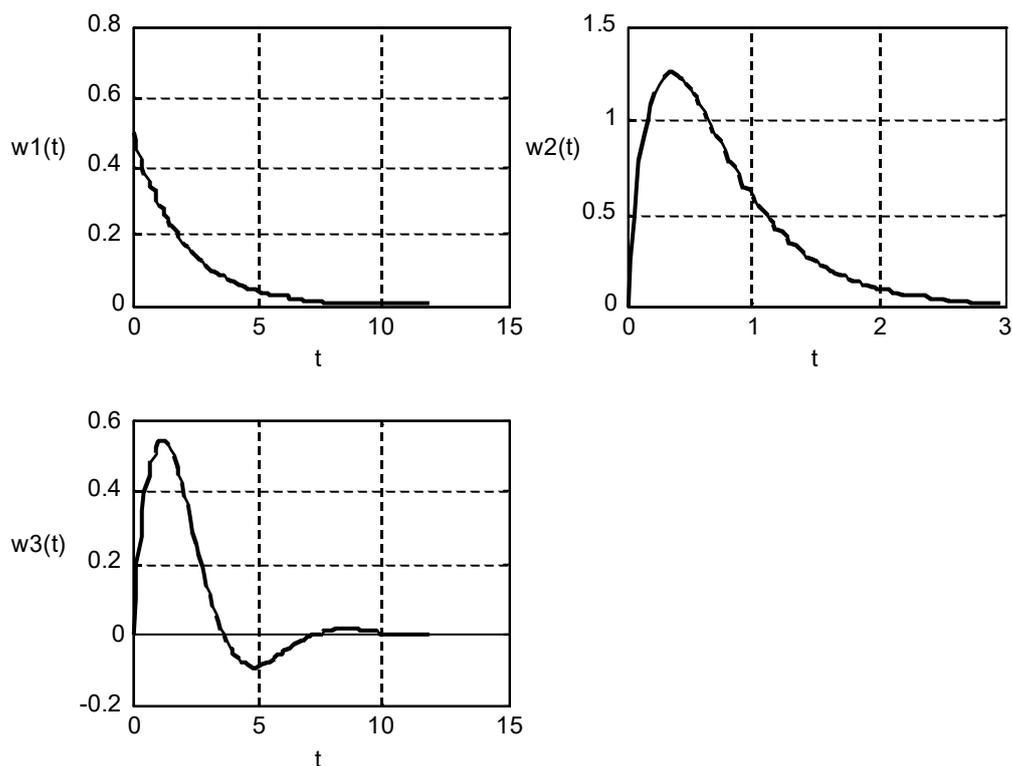


Рис. 6.5. Импульсные переходные характеристики (примеры 6.1, 6.2, 6.3)

3) Реакция системы на произвольное входное воздействие.

Реакцию системы на произвольное воздействие можно рассчитать с помощью функции `lsim`, предварительно задав передаточную функцию, интервал времени и входное воздействие:

```

W=tf(10,[1 6 8]);
t=0:0.01:3;
u=exp(-3*t);
y1=lsim(W,u,t);
plot(t,u,t,y1),grid

```

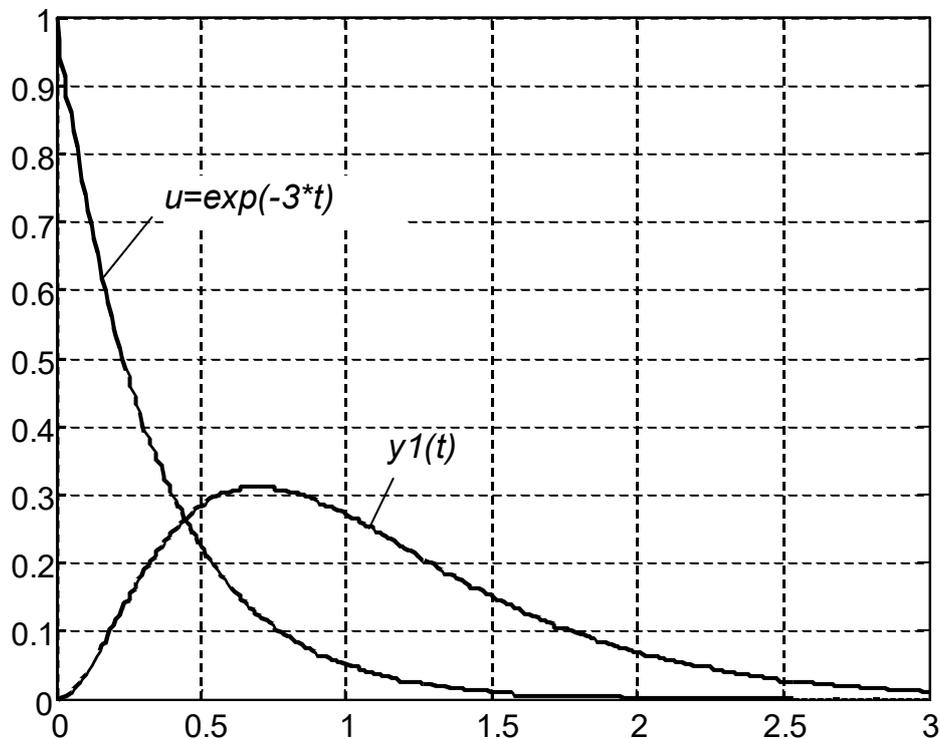


Рис. 6.6. Результаты расчета

Функция `lsim` находит отклик ЛТИ моделей на произвольный временной входной сигнал. Команда `lsim(SYS,u,t)` строит отклик ЛТИ модели `SYS` на входной сигнал `u`, заданный на интервале времени `t`. Например, программа

```
t = 0:0.01:5;    u = sin(t);    lsim(sys,u,t)
```

находит отклик системы `SYS` на входной сигнал $u(t)=\sin(t)$ на интервале от 0 до 5 единиц времени (секунд, минут, часов – в зависимости от масштаба, принятого при описании системы) с шагом 0,01.

Построим график отклика колебательного звена на входной сигнал $u(t)=1+\sin(t)$:

```

W=tf(1,[1 1 1])
t=0:0.1:20;
u=t+sin(t);
y=lsim(W,u,t),grid
plot(t,y,'k',t,u,'k--'),grid
legend('y','u')

```

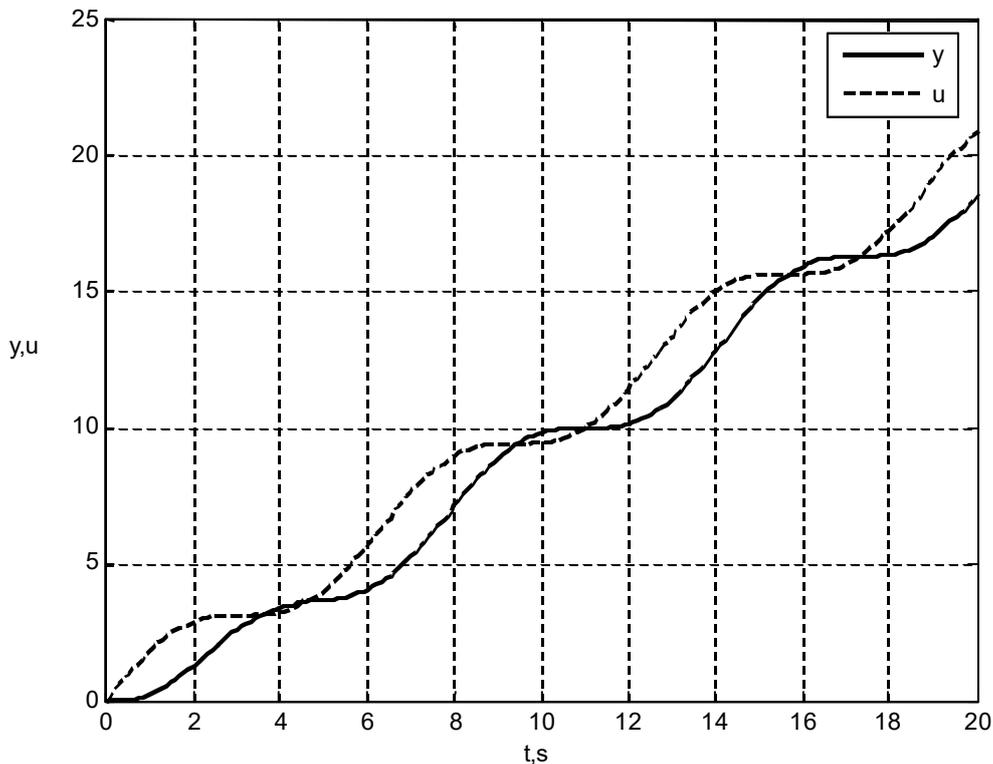


Рис. 6.7. Результаты расчета

Генерирование тестовых входных сигналов для функции `lsim` производит функция `gensig`:

```
[u,t] = gensig(type,tau)
[u,t] = gensig(type,tau,Tf,Ts)
```

Описание:

`[u,t] = gensig(type,tau)` генерирует скалярный сигнал u класса `type` с периодом τ . Используются следующие виды (классы) сигналов:

'sin' - синусоида с единичной амплитудой 1;

'square' - квадратные импульсы с единичной высотой 1;

'pulse' - периодические импульсные функции с единичной высотой 1;

`[u,t] = gensig(type,tau,Tf,Ts)` также определяет продолжительность действия сигнала T_f и шаг построения T_s .

Полученные значения u и t можно непосредственно использовать в `lsim` для получения отклика на заданный сигнал.

```
W2=tf(10,[1 6 8]);
[u1,t]=gensig('square',5,10,0.01);
y1=lsim(W2,u1,t);
figure(1)
plot(t,u1,t,y1),grid
```

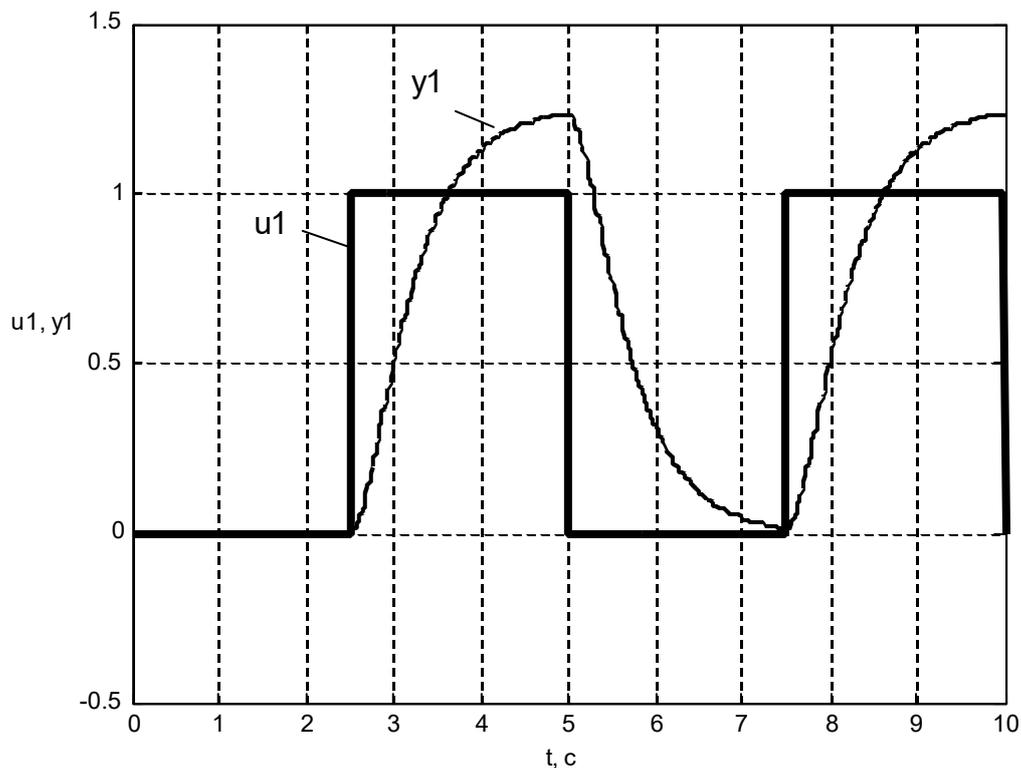


Рис. 6.8. Результаты расчета

4). Численное решение интеграла Дюамеля

Для определения реакции системы на произвольное воздействие при нулевых начальных условиях авторами разработана функция Matlab, определяющая численное (приближенное) решение интеграла (6.1):

```
function y = svertkafun(tk, dt, w, u)
t = 0:dt:tk;
n = length(t);
y = zeros(n,1);
for j = 1:n
    for i=1:j
        y(j) = y(j)+ w(j-i+1)*u(i)*dt;
    end
end
```

Функции передаются длина интервала t_k , шаг по времени dt , вектора значений импульсной характеристики системы w и входного воздействия u . Внешний цикл `for`, реализованный в функции – это цикл по времени t (см. формулу (6.1)), внутренний – цикл по сдвигу τ . Интегрирование произведений непрерывных функций заменено на суммирование (накопление) произведений их отчетов и шага по времени. Точность вычисления определяется величиной dt : чем меньше шаг, тем точнее расчет.

Ниже приведена тестовая программа, строящая графики реакции системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{2p+1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

на входное воздействие $u(t) = 1 - (t-1)^2$ на интервале времени от нуля до 2 с шагом 0,05 с помощью функции `lsim` и с помощью разработанной функции `svertkafun`:

```
W = tf([2 1], [1 2 2 1]);
t = 0:.05:2;
u = 1-(t-1).^2;
% решение с помощью lsim
y1 = lsim(W,u,t);
% решение с помощью теоремы свертки
w = impulse(W,t);
y2 = svertkafun(2,.05,w,u);
plot(t,u, 'k-.', t,y1,'k--',t,y2, 'k-'), grid
legend('u', 'y1(lsim)', 'y2(svertka)')
```

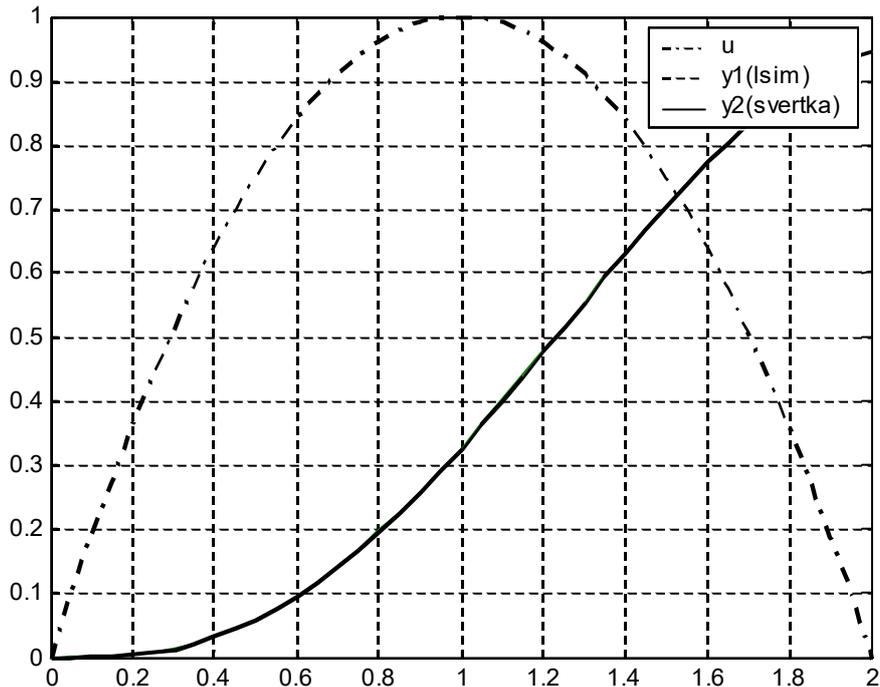


Рис. 6.9. Результаты выполнения программы

Графики реакции, рассчитанные двумя методами, практически совпадают (на Рис. 6.10. показан увеличенный фрагмент).

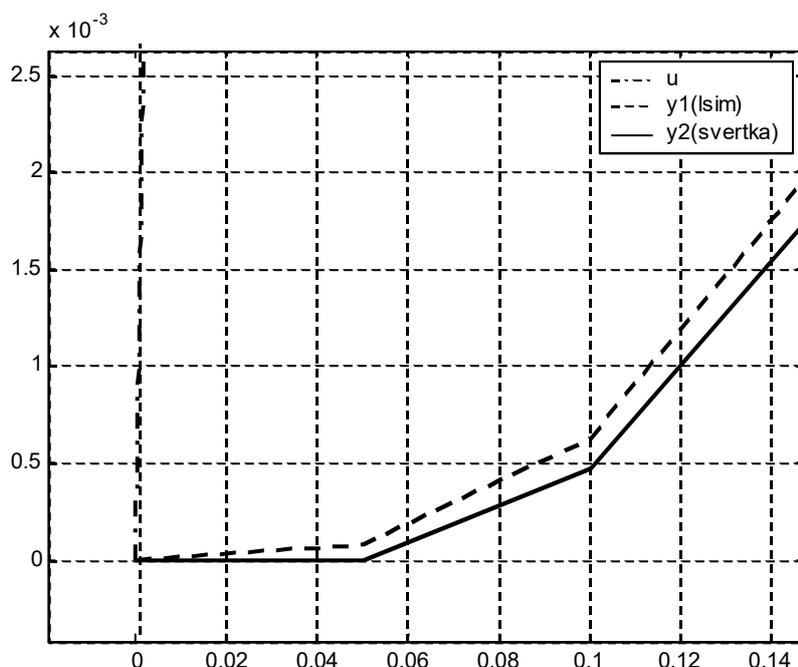


Рис. 6.10. Результаты выполнения программы (увеличенный фрагмент)

5). Свободное движение системы, выведенной из состояния равновесия

В MatLab свободное движение системы, описываемой SS-моделью, рассчитывается с помощью функции `initial`.

Синтаксис функции:

```
initial(sys, x0)
initial(sys, x0, t)
initial(sys1, sys2, ..., sysN, x0)
initial(sys1, sys2, ..., sysN, x0, t)
initial(sys1, 'PlotStyle1', ..., sysN, 'PlotStyleN', x0)
[y, t, x] = initial(sys, x0)
```

Вводимая без выходных аргументов, функция `initial(sys, x0)` строит график изменения переменных состояния при движении из состояния x_0 (вектор-столбец).

Функция `initial(sys, x0, t)` явно задает временной интервал.

Для построения графиков для нескольких моделей используется функция `initial(sys1, sys2, ..., sysN, x0)` или `initial(sys1, sys2, ..., sysN, x0, t)`.

Вводимая с выходными аргументами, функция `[y, t, x] = initial(sys, x0)` или `[y, t, x] = initial(sys, x0, t)` возвращает значения выходной величины, времени и переменных состояния. График не строится.

Построим график изменения выходной величины системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

при начальных значениях переменных состояния: $x_1(0)=1$; $x_2(0)=0$.

```
A=[0 1;-1 -1];C=[1 0];x0 = [1 ; 0];
Sys=ss(A, [],C, []);
initial(Sys,x0),grid
```

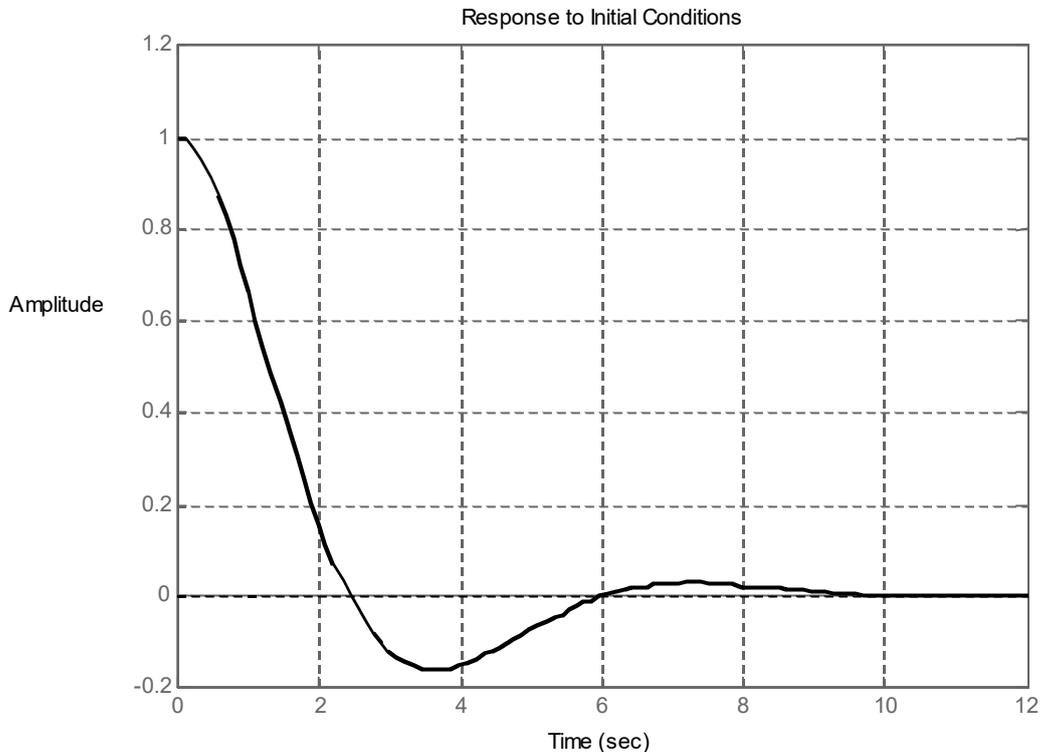


Рис. 6.11. Результаты выполнения программы

Домашнее задание. Определить переходную и импульсную характеристики системы, описываемой передаточной функцией, которая была получена в работе №1, операторным методом вручную и в MatLab. Также определить свободное движение системы из состояния, в котором выходная величина равна 10 В, а скорость ее изменения – нулю.

Определить с помощью интеграла Дюамеля в MatLab реакцию цепи на прямоугольный импульс высотой 10 В. Длительность импульса равна меньшему коэффициенту затухания переходного процесса.

Для всех случаев построить в Matlab временные диаграммы.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

7.1. Основные частотные характеристики

В этой работе рассматриваются частотные характеристики линейных систем и их элементов.

При анализе в частотной области тестовым сигналом является гармоническое воздействие. Реакция линейной системы на такое воздействие, точнее ее вынужденная составляющая, также является гармонической. Свойства системы проявляются в том, что амплитуда и фаза выходных колебаний будут отличаться от амплитуды и фазы входных, причем это отличие будет существенно зависеть от частоты. Таким образом, в общем смысле частотные характеристики описывают способность системы или элемента «воспроизводить» входной гармонический сигнал на своем выходе. Все реальные объекты и системы инерционны, поэтому при увеличении частоты имеет место следующая тенденция: амплитуда выходных колебаний уменьшается, а их фазовый сдвиг (отставание по фазе от входных колебаний) – увеличивается. Система просто «не успевает» воспроизвести входной сигнал.

При построении и исследовании частотных характеристик мгновенные значения воздействия на систему и ее отклика являются гармоническими функциями времени:

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x), \quad y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi_y).$$

При этом соотношения между мгновенными значениями можно заменить соотношениями между комплексными изображениями.

Каждой гармонической функции времени, например, входному воздействию $x(t)$ и реакции $y(t)$, можно поставить в соответствие комплексное число, называемое *мгновенным* или *текущим комплексом* гармонической функции, модуль которого равен амплитуде, а аргумент – ее фазе:

$$\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi_x)}; \quad \underline{y} = Y_m e^{j(\omega t + \varphi_y)}.$$

Значение текущего или мгновенного комплекса в начальный момент времени называется комплексной амплитудой:

$$\dot{X}_m = X_m e^{j\varphi_x}; \quad \dot{Y}_m = Y_m e^{j\varphi_y}. \quad (7.1)$$

Комплексная амплитуда – это комплексное число, модуль которого равен амплитуде, а аргумент – начальной фазе гармонической функции. Используя понятие комплексной амплитуды, текущие комплексы можно записать в виде:

$$\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi_x)} = X_m e^{j\varphi_x} e^{j\omega t} = \dot{X}_m e^{j\omega t}; \quad (7.2)$$

$$\underline{y} = Y_m e^{j(\omega t + \varphi_y)} = Y_m e^{j\varphi_y} e^{j\omega t} = \dot{Y}_m e^{j\omega t}.$$

Сомножитель $e^{j\omega t}$, входящий в это выражение, представляет собой вектор, называемый *оператором вращения*, имеет единичную длину и вращается в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью ω .

Найдем комплексное изображение производной гармонической функции времени. При этом учтем, что комплексная амплитуда не зависит от времени, а оператор вращения – от времени зависит:

$$\frac{d}{dt}x(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\dot{X}_m e^{j\omega t}) = j\omega \dot{X}_m e^{j\omega t}; \quad \frac{d}{dt}y(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\dot{Y}_m e^{j\omega t}) = j\omega \dot{Y}_m e^{j\omega t}.$$

Таким образом, дифференцированию гармонической функции времени соответствует умножение ее комплексного изображения (текущего комплекса или комплексной амплитуды) на $j\omega$. Производной второго порядка соответствует умножение комплексного изображения гармонической функции на $(j\omega)^2 = -\omega^2$ и т.д.

Введем в рассмотрение основополагающие понятия теории анализа и синтеза систем в частотной области.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – зависимость отношения амплитуды выходных колебаний к амплитуде входных от частоты:

$$A(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X_m(\omega)}.$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) – зависимость разности фаз выходных и входных колебаний от частоты:

$$\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x.$$

Комплексная частотная характеристика (КЧХ) – зависимость отношения комплексной амплитуды выходных колебаний к комплексной амплитуде входных от частоты:

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m(\omega)}{\dot{X}_m} = \frac{Y_m e^{j\varphi_y}}{X_m e^{j\varphi_x}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

КЧХ, объединяющая амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики, называется также *амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ)*.

Как любая комплексная функция вещественного аргумента, КЧХ имеет вещественную и мнимую составляющие:

$$W(j\omega) = A(\omega)[\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Вещественная частотная характеристика (ВЧХ) – зависимость вещественной части КЧХ от частоты:

$$P(\omega) = \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} = A(\omega) \cos \varphi(\omega).$$

Мнимая частотная характеристика (ВЧХ) – зависимость мнимой части КЧХ от частоты:

$$Q(\omega) = \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

Связь между характеристиками $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, с одной стороны, и $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ – с другой, очевидна:

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \\ \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \end{cases} \quad (7.3)$$

КЧХ или АФЧХ звена или системы можно получить непосредственно по операторной передаточной функции, которая, как показано ранее, представляет собой отношение двух полиномов

$$W(p) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{N(p)}{D(p)}, \quad (7.4)$$

где под p понимают оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$, при этом $\frac{d^n}{dt^n} = p^n$. С учетом этого дифференциальное уравнение записывается в виде:

$$D(p)y(t) = N(p)x(t). \quad (7.5)$$

Подставим выражения для текущих комплексов в ДУ. При этом учтем следующие выражения для k -х производных входного и выходного сигналов, справедливость которых показана ранее:

$$\begin{aligned} p^k x(t) &\Leftrightarrow (j\omega)^k \dot{X}_m e^{j\omega t}, \\ p^k y(t) &= (j\omega)^k \dot{Y}_m e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

После подстановки получим:

$$D(j\omega)\dot{Y}_m e^{j\omega t} = N(j\omega)\dot{X}_m e^{j\omega t},$$

откуда

$$\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{\dot{Y}_m e^{j\omega t}}{\dot{X}_m e^{j\omega t}} = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{Y_m e^{j\psi_y}}{X_m e^{j\psi_x}} = \frac{Y_m}{X_m} e^{j(\psi_y - \psi_x)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

Следовательно:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (7.6)$$

Таким образом, АФЧХ линейного звена или системы управления в целом можно получить путем замены в передаточной функции оператора p на оператор $j\omega$.

Порядок преобразований при этом следующий. После подстановки $p = j\omega$ получаем:

$$W(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{P_N(\omega) + jQ_N(\omega)}{P_D(\omega) + jQ_D(\omega)}.$$

Освобождаясь от мнимости в знаменателе, окончательно имеем

$$W(j\omega) = \frac{(P_N(\omega) + jQ_N(\omega))(P_D(\omega) - jQ_D(\omega))}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где

$$\begin{cases} P(\omega) = \frac{P_N(\omega)P_D(\omega) + Q_N(\omega)Q_D(\omega)}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)}, \\ Q(\omega) = \frac{Q_N(\omega)P_D(\omega) - P_N(\omega)Q_D(\omega)}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)}. \end{cases}$$

На комплексной плоскости АФЧХ изображается годографом, который представляет собой геометрическое место точек концов вектора $W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$, соответствующих изменению частоты от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$.

На годографе указывают точки, соответствующие некоторым значениям частоты ω , и стрелкой показывают направление перемещения конца вектора $A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ при увеличении частоты. Естественно, годограф позволяет одновременно судить как об АЧХ и ФЧХ, так и о ВЧХ и МЧХ. Годограф обладает одним недостатком – на нем скрыты значения частоты. Но если иметь другие частотные характеристики, например, АЧХ и ФЧХ или ВЧХ и МЧХ, то можно определить частоту для любой точки годографа.

Частотные характеристики устойчивого объекта могут быть получены экспериментально с помощью генератора гармонических колебаний и устройства регистрации временных процессов, например, осциллографа.

Допустим, что мы проводим эксперимент для определения КЧХ системы при наборе фиксированных значений частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Мы можем

это сделать путем подачи на вход системы синусоидального колебания с единичной амплитудой и нулевой начальной фазой, придавая частоте указанные значения, Рис.7.1.

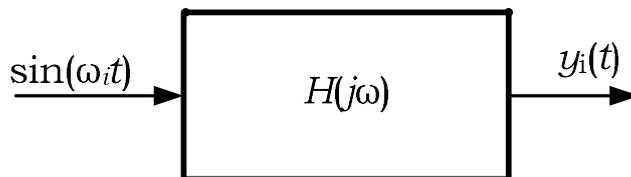


Рис.7.1. Структурная схема эксперимента по определению КЧХ

В каждом установившемся режиме отклик будет иметь вид:

$$y_i(t) = A(\omega_i) \sin[\omega_i t + \varphi(\omega_i)], \quad i = 1 \dots n.$$

Поскольку амплитуда входных колебаний равна единица, а фаза – нулю, $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, построенные по всем экспериментальным точкам, будут представлять собой АЧХ и ФЧХ системы. По ним с помощью приведенных выше формул можно определить остальные частотные характеристики: ВЧХ, МЧХ и КЧХ.

АЧХ и ФЧХ системы имеют один недостаток. В равномерном масштабе по оси частот ω графики частотных характеристик быстро изменяются на низких частотах и медленно – на высоких. В результате графики получаются малоинформативными. Чтобы преодолеть этот недостаток применяют логарифмическую шкалу частот. Единицей измерения на данной шкале обычно является декада (дек) – интервал, на концах которого значения частоты отличаются друг от друга в 10 раз.

Примеры декад: $[1, 10]$, $[0.2, 2]$, $[a \cdot 10^n, a \cdot 10^{n+1}]$. В таблице 7.1 приведены значения логарифмов $\lg(\omega)$ на декаде $[1, 10]$.

Таблица 7.1.

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg(\omega)$	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1

На других декадах используется следующая формула десятичного логарифмирования:

$$\lg(10^n x) = n + \lg(x),$$

т.е. увеличение/уменьшение частоты в 10 раз увеличивает/уменьшает ее логарифм на 1 дек.

Несмотря на логарифмический масштаб, обозначение меток шкалы частот чаще всего производят обычным способом, т.е. указывают значения частоты (в рад/сек), а не ее логарифма.

При исследовании динамических свойств и синтезе систем автоматического регулирования вместо АЧХ часто используются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ), получаемые через десятичный логарифм АЧХ, единицами измерения которого являются белы и децибелы.

При измерении отношения двух мощностей N_1 и N_2 говорят, что они отличаются на один «бел», если $\lg \frac{N_2}{N_1} = 1$. Это сравнительно большая единица измерения. При рассмотрении конкретных задач приходится иметь дело с более мелкой единицей, называемой децибелом. Данная величина определяется следующим равенством:

$$10 \lg \frac{N_2}{N_1} = 1.$$

В этом случае говорят, что N_1 и N_2 отличаются на один децибел. От измерения мощности можно перейти к измерению амплитуды сигнала. Как известно, мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды:

$$N_1 \equiv x_1^2; \quad N_2 \equiv x_2^2.$$

Если

$$10 \lg \frac{N_2}{N_1} = 10 \lg \frac{x_2^2}{x_1^2} = 1, \tag{7.7}$$

то для отношения амплитуд сигналов, отличающихся на один децибел, получаем:

$$20 \lg \frac{x_2}{x_1} = 1. \tag{7.8}$$

Поэтому ЛАЧХ определяется формулой

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega).$$

Обратная зависимость АЧХ от ЛАЧХ имеет вид

$$A(\omega) = 10^{0,05L(\omega)}.$$

Значение коэффициента передачи гармонического сигнала $A = 1$ соответствует нулевому значению ЛАЧХ: $L = 0$. Ослабление сигнала системой ($A < 1$) отражается отрицательным значением ЛАЧХ: $L < 0$, усиление ($A > 1$) – положительным: $L > 0$.

ЛАЧХ и ФЧХ представляются совместно в виде графиков в прямоугольной системе координат. По оси абсцисс откладывается частота ω в

логарифмическом масштабе, а по оси ординат – значения ЛАЧХ в децибелах и углов ФЧХ в градусах (или радианах) в равномерном масштабе.

Логарифмические частотные характеристики часто называют *диаграммами Боде*. Это название связано с именем Х. У. Боде, инженера, который широко использовал логарифмические характеристики при исследовании усилителей с обратной связью.

7.2. Использование MatLab при построении частотных характеристик

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ в MatLab используется функция `bode`. Вызываемая без выходных, т.е. левосторонних аргументов, функция `bode(sys)` выводит диаграммы Боде любой LTI модели на экран. Эта модель может быть непрерывной или дискретной, одномерной (SISO) или многомерной (MIMO). Амплитуда выводится в дБ, фаза – в градусах. Диапазон частот определяется автоматически на основе вычисления полюсов системы. Функция `bode(sys,w)` использует заданный диапазон или вектор частот. Функция `bode(sys1,sys2,...,sysN)` или `bode(sys1,sys2,...,sysN,w)` строит диаграмму Боде нескольких LTI моделей на одном графике. Все системы должны иметь одно и то же число входов и выходов, но могут быть смешанного типа (непрерывные и дискретные). Эта команда полезна для сравнения частотного отклика нескольких систем.

Команда `bode(sys1,'PlotStyle1',...,sysN,'PlotStyleN')` определяет цвет, стиль линий и маркеры для построения. Например, `bode(sys1,'r--',sys2,'gx')` использует красные пунктирные линии для первой системы `sys1` и зеленые 'x' маркеры для второй системы `sys2`.

Вызываемая с выходными аргументами

```
[mag,phase,w] = bode(sys)
```

или

```
[mag,phase] = bode(sys,w),
```

эта функция возвращает значения АЧХ и ФЧХ системы для частот ω (в рад/с).

Выходные аргументы `mag` и `phase` представляют собой трехмерные массивы, в которых первая размерность соответствует номеру выхода, вторая – номеру входа, а третья – частоте. Если рассматривается SISO-система, первые две размерности этих аргументов – единичные. Поэтому трехмерные массивы можно преобразовать в вектора-столбцы с помощью операции (:).

Пример:

```

W=tf(1,[1 2 1 1])
w=0:0.01:2.5;
[Am,Ph,w]=bode(W,w);
figure(1)
plot(w,Am(:),'k-'),grid
xlabel('w'),ylabel('Am')
figure(2)
plot(w,Ph(:)),grid
xlabel('w'),ylabel('Phase,deg')

```

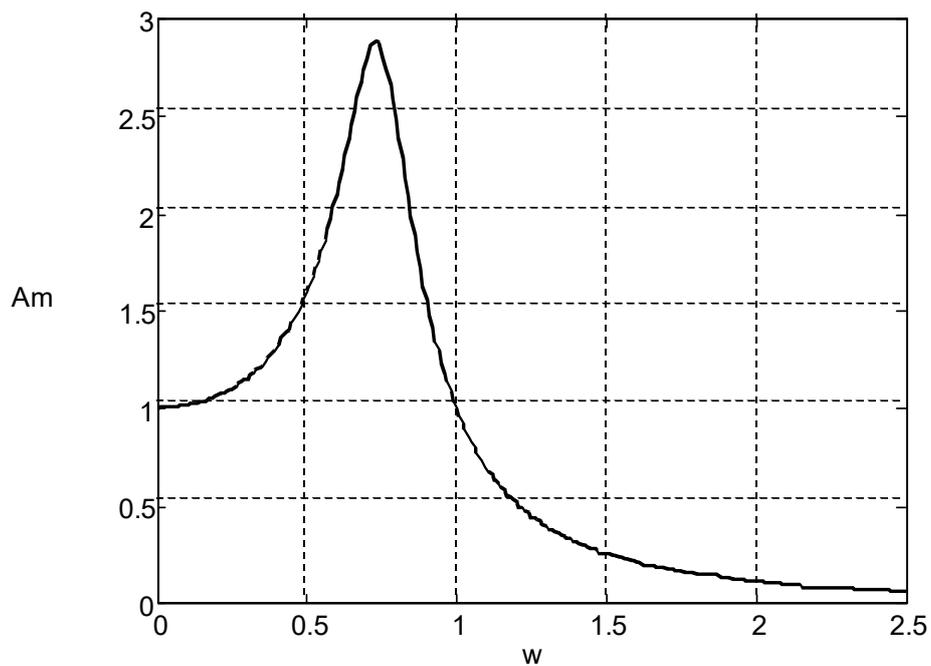


Рис.7.2. АЧХ системы

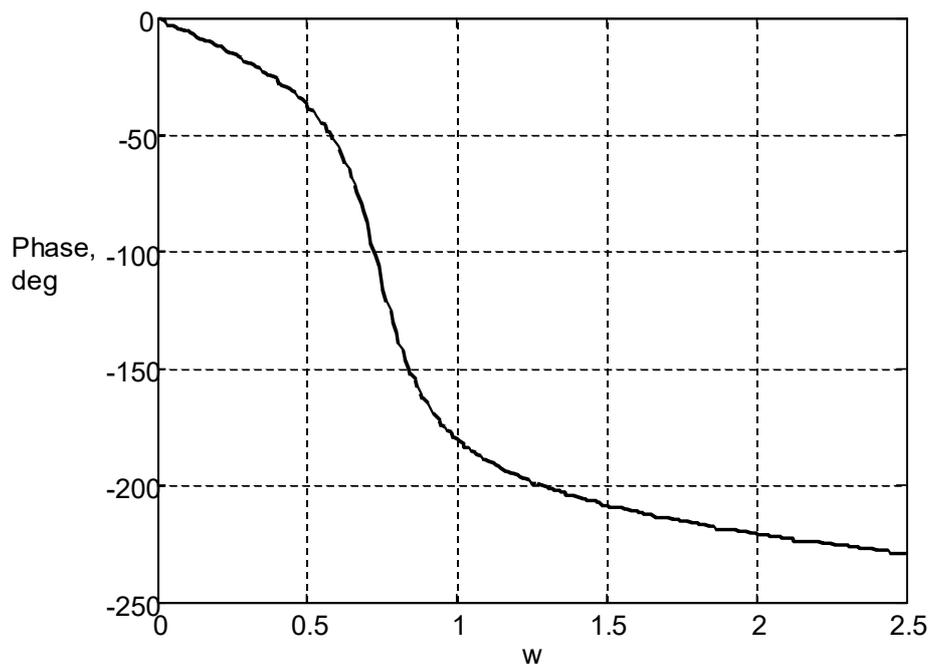


Рис.7.3. ФЧХ системы

Для построения АФЧХ используется функция `nyquist`. Синтаксис у этой функции такой же, как у функции `bode`:

```
nyquist(sys)
nyquist(sys,w)
nyquist(sys1,sys2,...,sysN)
nyquist(sys1,sys2,...,sysN,w)
nyquist(sys1,'PlotStyle1',...,sysN,'PlotStyleN')
[re,im,w] = nyquist(sys)
[re,im] = nyquist(sys,w)
```

Вызываемая с выходными аргументами

```
[re,im,w] = nyquist(sys)
```

или

```
[re,im] = nyquist(sys,w),
```

эта функция возвращает действительную и мнимую части КЧХ для заданных частот, что позволяет построить ВЧХ и МЧХ:

```
W=tf(1,[1 2 1 1])
w=0:0.01:2.5;
[Re,Im,w]=nyquist(W,w)
figure(1)
plot(w,Re(:)),grid
xlabel('w'),ylabel('Real part')
figure(2)
plot(w,Im(:)),grid
xlabel('w'),ylabel('Imaginary part')
figure(3)
nyquist(W,w)
```

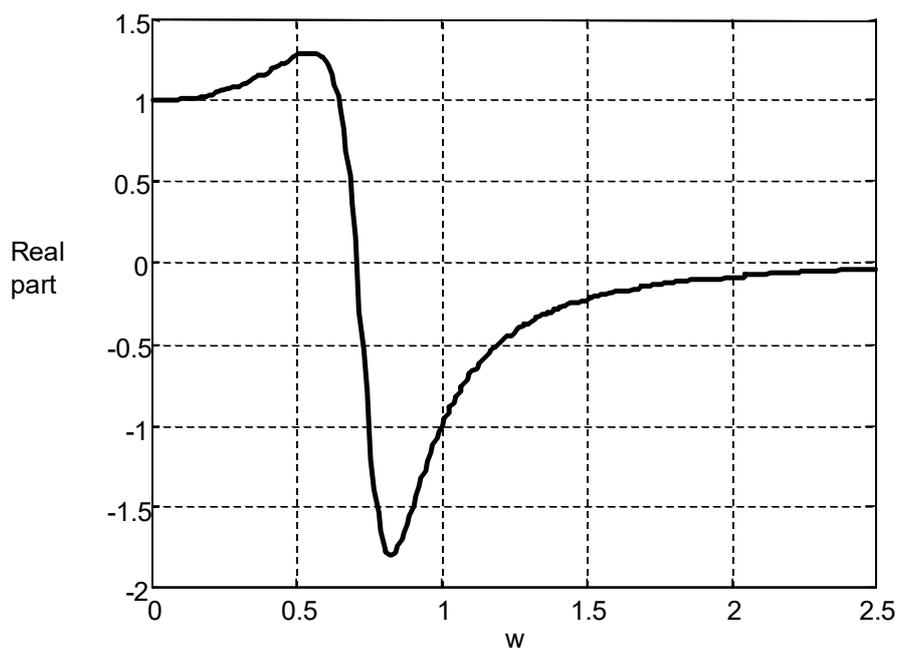


Рис.7.4. ВЧХ системы

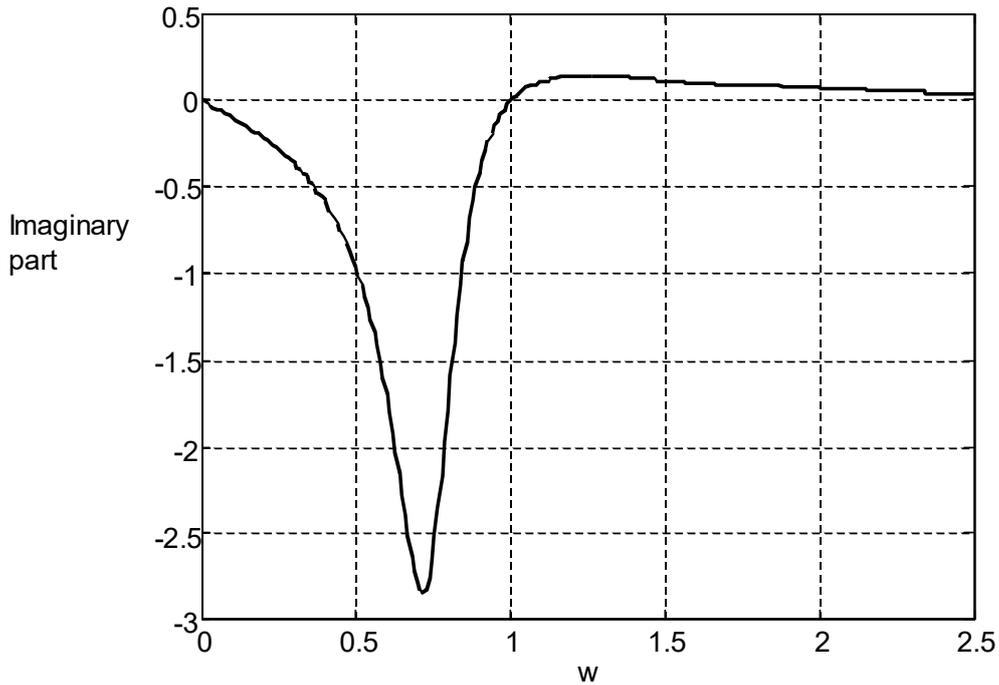


Рис.7.5. МЧХ системы

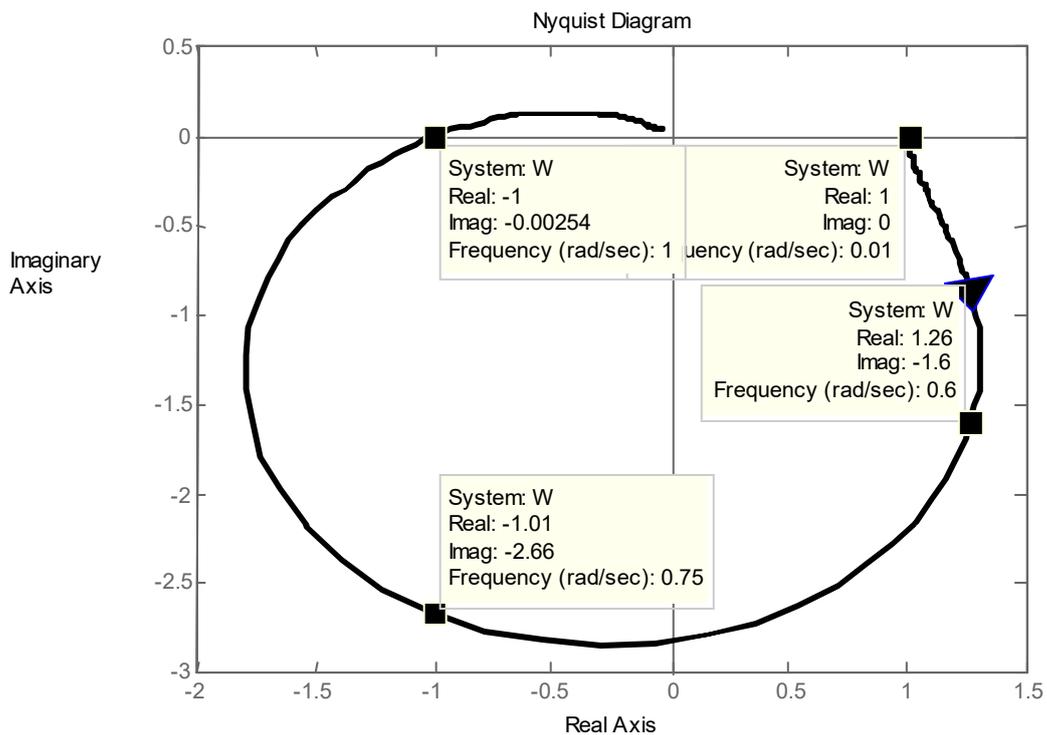


Рис.7.6. АФЧ системы

АФЧХ строится как для положительных, так и для отрицательных частот. Само понятие отрицательных частот является искусственным и используется в некоторых разделах теории автоматического управления, в частности при построении частотных характеристик импульсных систем. Для того чтобы получить годограф только для положительных частот,

нужно с помощью правой кнопки мыши вызвать контекстное меню, выбрать команду **Show** и убрать галочку перед словами **Negative Frequencies**.

Функции `bodemag(sys)`, `bodemag(sys1, sys2, ..., sysN)` и `bodemag(sys1, 'PlotStyle1', ..., sysN, 'PlotStyleN')` строят ЛАЧХ без ЛФЧХ.

Нужно отметить, что к функции `bodemag(sys)` можно и не обращаться, т.к. с помощью правой кнопки на графике и ниспадающего меню **Show Magnitude Phase** можно оставить ту или иную логарифмическую характеристику.

Функции `bode(sys, w)` или `bode(sys1, sys2, ..., sysN, w)` явно определяют диапазон частот для построения графика. Для построения диаграмм на конкретном частотном интервале нужно ввести вектор желаемых частот в логарифмическом масштабе, для чего нужно использовать команду `logspace` (логарифмический масштаб).

Функция `y=logspace(a, b)` генерирует вектор-строку `y` из 50 точек между декадами 10^a и 10^b ; `y=logspace(a, b, n)` генерирует `n` точек между декадами 10^a и 10^b .

Домашнее задание. Для колебательного звена с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$$

построить АФЧХ, АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ вручную и в MatLab. Значения постоянной времени и коэффициента демпфирования звена приведены в таблице 7.2.

Таблица 7.2. Исходные данные для домашнего задания

№ Варианта	T, c	ξ
1	0,01	0,05
2	0,02	0,06
3	0,025	0,07
4	0,04	0,08
5	0,05	0,09
6	0,08	0,10
7	0,1	0,11
8	0,125	0,12
9	0,2	0,13
10	0,25	0,14
11	0,4	0,15
12	0,8	0,16

№ Варианта	T, c	ξ
13	0,01	0,17
14	0,02	0,18
15	0,025	0,19
16	0,04	0,20
17	0,05	0,05
18	0,08	0,06
19	0,1	0,07
20	0,125	0,08
21	0,2	0,09
22	0,25	0,10
23	0,4	0,11
24	0,8	0,12
25	0,01	0,13
26	0,02	0,14
27	0,025	0,15
28	0,04	0,16
29	0,05	0,17
30	0,08	0,18

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СОЕДИНЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ

Передаточная функция системы $W(p)$ может быть представлена в виде произведения передаточных функций элементарных или типовых звеньев (см. Приложение) $W_i(p)$, например

$$W(p) = K \frac{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}.$$

Желательно иметь нумерацию постоянных времени типовых звеньев сквозную по убыванию их модулей, т.е. $\tau_1 > \tau_2 > T_1 > T_2 > T_3$.

Структурная схема такой системы представляет собой последовательное соединение звеньев.

Комплексная частотная характеристика $W(j\omega)$ представляет собой произведение типовых комплексных характеристик $W_i(j\omega)$:

$$W(j\omega) = \prod_i W_i(j\omega) = \prod_i A_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)} = \left\{ \prod_i A_i(\omega) \right\} e^{j \sum_i \varphi_i(\omega)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

Таким образом, АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ системы с последовательным соединением звеньев имеют вид:

$$A(\omega) = \prod_i A_i(\omega), \quad \varphi(\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega),$$

$$L(\omega) = 20 \lg \prod_i A_i(\omega) = \sum_i 20 \lg A_i(\omega) = \sum_i L_i(\omega).$$

Записанные формулы указывают на возможность суммирования, в том числе и графического, логарифмических частотных характеристик звеньев при их последовательном соединении.

Особенно просто определяются частотные характеристики последовательного соединения звеньев через их ЛАЧХ, заданные в асимптотическом виде, и ФЧХ, построенные в полулогарифмическом масштабе.

Построение ЛАЧХ последовательного соединения звеньев проиллюстрируем на примере следующей ПФ:

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)} = \frac{K(1 + p/\omega_2)}{p(1 + p/\omega_1)}.$$

ПФ имеет вещественный нуль $z_2 = -\frac{1}{T_2} = -\omega_2$, вещественный полюс $p_1 = -\frac{1}{T_1} = -\omega_1$ и полюс в начале координат. Частоты ω_i , обратные соответ-

ствующим постоянным времени T_i , называются *частотами сопряжения или излома* по причине, которая станет ясной позднее.

Запишем КЧХ и выделим модули сомножителей:

$$W(j\omega) = \frac{K \cdot (1 + j\omega/\omega_2)}{j\omega \cdot (1 + j\omega/\omega_1)} = \frac{K \cdot A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}}{\omega e^{j90^\circ} \cdot A_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (8.1)$$

где

$$A(\omega) = \frac{K \cdot A_2(\omega)}{\omega \cdot A_1(\omega)}, \quad \varphi_i(\omega) = \text{arctg} \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega) - 90^\circ.$$

С учетом свойств логарифма выражение для ЛАЧХ принимает вид:

$$L(\omega) = 20 \lg \left(\frac{K \cdot A_2(\omega)}{\omega \cdot A_1(\omega)} \right) = 20 \lg K + 20 \lg A_2(\omega) - 20 \lg \omega - 20 \lg A_1(\omega).$$

Пример 8.1. Система описывается передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{p \left(\frac{p}{\omega_1} + 1 \right) \left(\frac{p}{\omega_2} + 1 \right)} = \frac{100}{p \left(\frac{p}{10} + 1 \right) \left(\frac{p}{100} + 1 \right)}.$$

Требуется построить асимптотические частотные характеристики и определить частоту, при которой $L(\omega) = 0$.

Построим амплитудную характеристику, выполняя следующие операции.

1. ЛАЧХ безынерционного звена с коэффициентом передачи K равна $L(\omega) = 20 \lg K = 20 \lg 100 = 40$ дБ и представляет собой горизонтальную линию на уровне 40 дБ.

2. ЛАЧХ интегрирующего звена с передаточной функцией $1/p$ имеет вид прямой линии с наклоном -20 дБ/дек, пересекающей ось частот (уровень 0 дБ) в точке $\omega = 1$.

3. ЛАЧХ апериодического звена с передаточной функцией $1/(0,1p+1)$ аппроксимируется двумя асимптотами, сопрягающимися на частоте $\omega_1=10$ рад/с. Высокочастотная асимптота (справа от частоты сопряжения) имеет наклон -20 дБ/дек, а низкочастотная асимптота (слева) проходит на уровне 0 дБ.

4. ЛАЧХ апериодического звена с передаточной функцией $1/(0,01p+1)$ аппроксимируется также двумя асимптотами, сопрягающимися на частоте $\omega_1=100$ рад/с. Высокочастотная асимптота (справа от частоты сопряжения) имеет наклон -20 дБ/дек, а низкочастотная асимптота (слева) проходит на уровне 0 дБ.

5. Результирующая асимптотическая ЛАЧХ получаются путем суммирования ординат асимптот, соответствующих каждому сомножителю ПФ, как показано сплошной линией на Рис. 8.1.

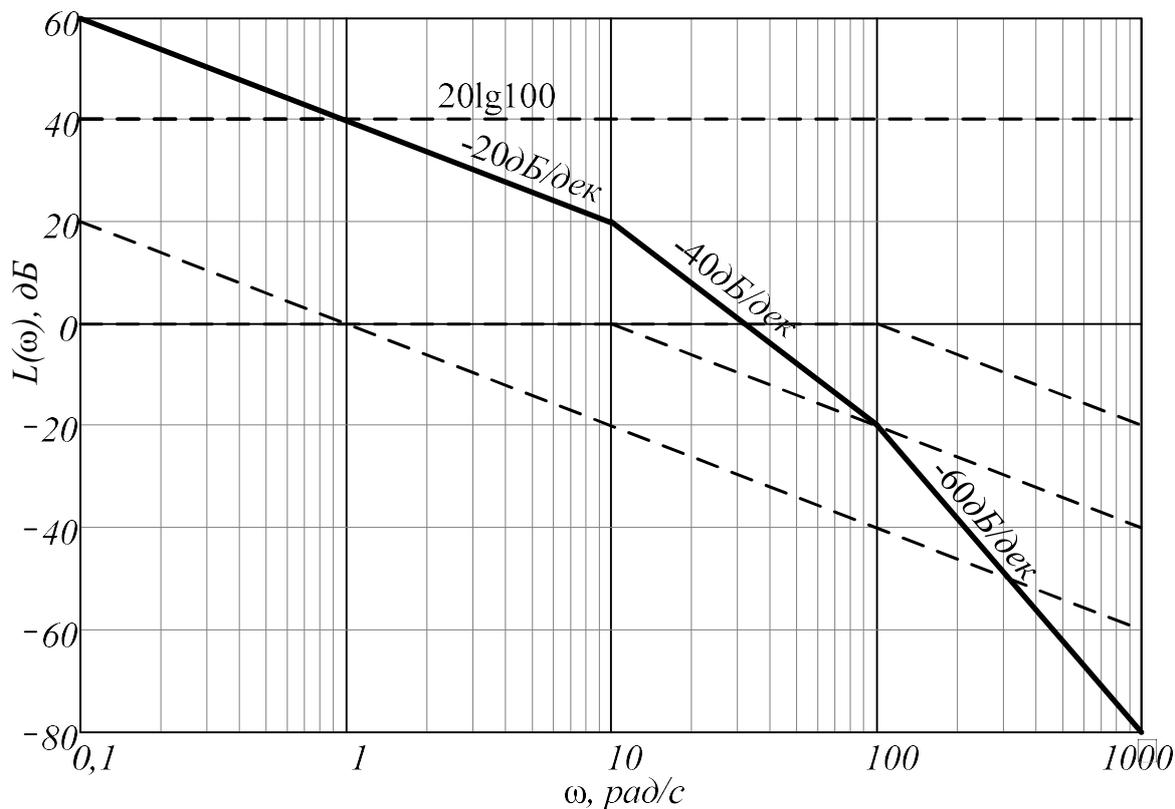


Рис. 8.1. Построение результирующей асимптотической ЛАЧХ

При построении ЛАЧХ системы с полюсом в начале координат и постоянным коэффициентом усиления K можно начать построения с интегрирующего звена, имеющего передаточную функцию K/p . Его ЛАЧХ

$L(\omega) = 20 \lg \left(\frac{K}{\omega} \right)$ представляет собой линию с наклоном -20 дБ/дек, пересекающей ось частот (уровень 0 дБ) в точке $\omega = K$. Далее нужно определить и упорядочить частоты излома ЛАЧХ системы и достроить ее по следующему простому правилу: каждый нуль передаточной функции изменяет наклон ЛАЧХ на $+20$ дБ/дек, а каждый полюс на -20 дБ/дек. В нашем случае на частоте $\omega = 10$ рад/сек наклон ЛАЧХ изменится от -20 дБ/дек до -40 дБ/дек и, далее, на частоте $\omega = 100$ рад/сек от -40 дБ/дек до -60 дБ/дек.

Построим фазовую характеристику, выполнив следующие операции.

1. ФЧХ звена с коэффициентом передачи K равна 0° .

2. ФЧХ интегрирующего звена с передаточной функцией $1/p$ равна -90° на всех частотах.

3. ФЧХ апериодического звена с передаточной функцией $1/(0,1p+1)$ аппроксимируется кусочно-линейной функцией следующим образом.

На низких частотах, вплоть до частоты $\omega_1 = 10$ рад/с минус одна декада, т.е. до частоты 1 рад/с, ФЧХ звена равна 0° .

Начиная с частоты 1 рад/с в течение двух декад ФЧХ линейно уменьшается и на частоте ω_1 плюс одна декада, т.е. на частоте, становится равной -90° .

На высоких частотах, начиная с частоты 100 рад/с, ФЧХ равна -90° .

Нетрудно заметить, что на частоте ω_1 ФЧХ равна -45° , что соответствует истинному значению ФЧХ. На других частотах имеет место ошибка аппроксимации.

4. ФЧХ апериодического звена с передаточной функцией $1/(0,01p+1)$ аппроксимируется кусочно-линейной функцией аналогично предыдущему звену.

5. Результирующая асимптотическая ФЧХ получается простым сложением характеристик, соответствующих каждому сомножителю ПФ, как показано сплошной линией на Рис. 8.2.

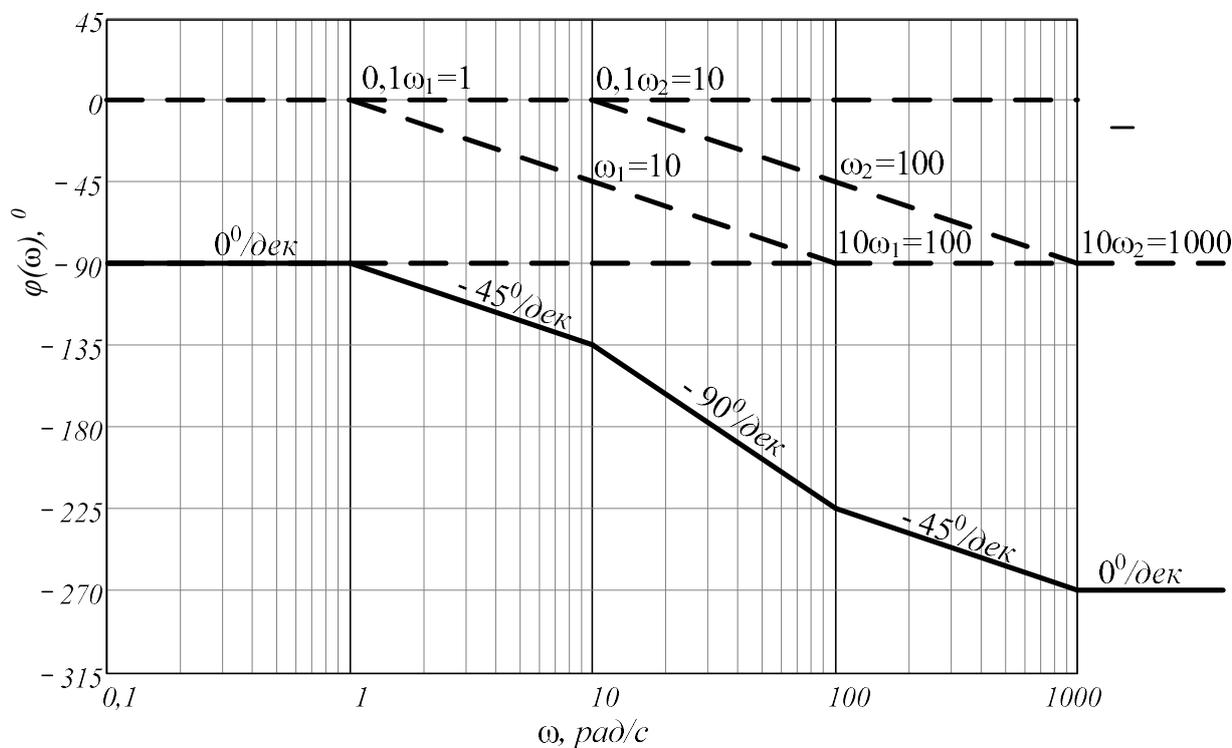


Рис. 8.2. Построение результирующей асимптотической ЛФЧХ

Пример 8.2. На Рис. 8.3 изображена ЛАЧХ. Определить ПФ системы.

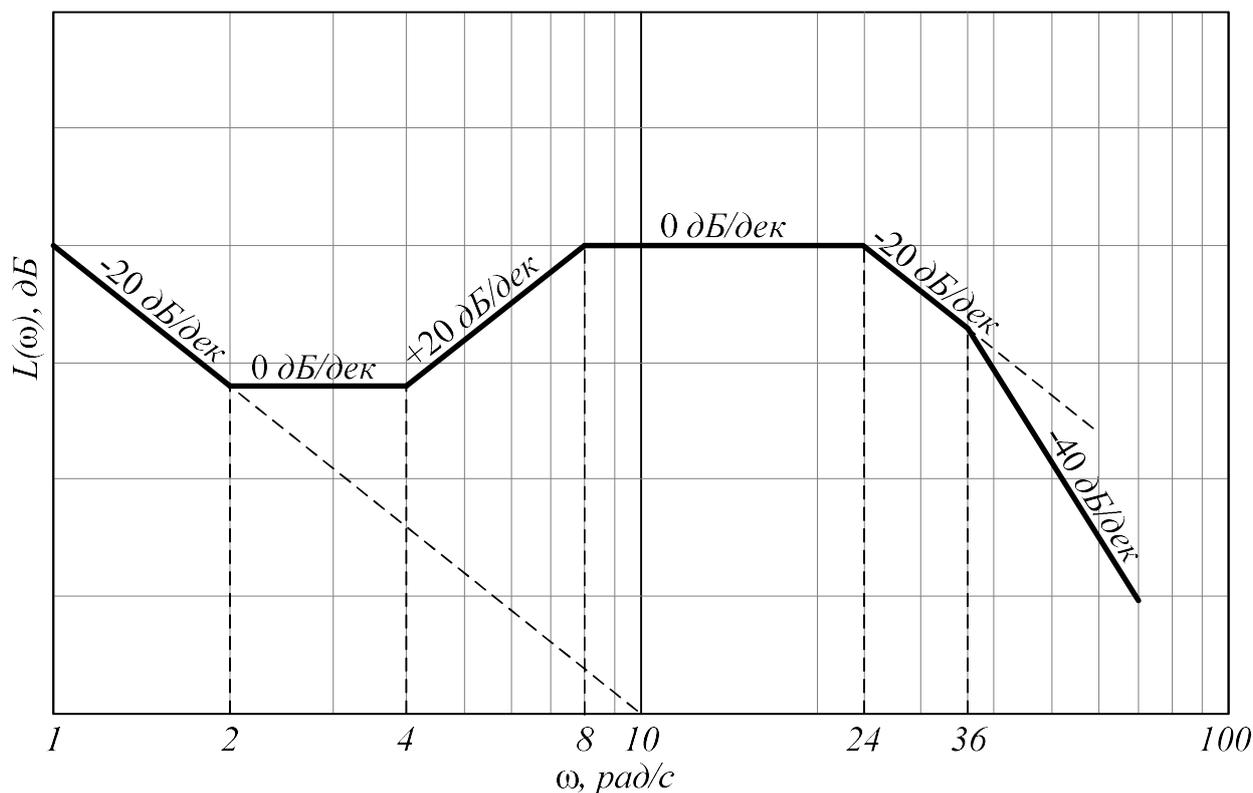


Рис. 8.3. ЛАЧХ к примеру 8.2.

Решение.

Низкочастотная асимптота имеет наклон -20 дБ/дек. Это говорит о том, что в структуре системы имеется интегрирующее звено. Запишем ее передаточную функцию в виде K/p . Коэффициент K можно найти, зная значение ЛАЧХ звена на любой частоте, однако удобнее для этой цели использовать частоту, на которой ЛАЧХ принимает нулевое значение (пересекает ось частот). В этом случае ЛАЧХ звена

$$L(\omega) = 20 \lg \left(\frac{K}{\omega} \right) = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{K}{\omega} = 1,$$

откуда $K = \omega$.

Продолжая низкочастотную асимптоту до пересечения ее с осью частот, как показано на Рис. 8.3, находим эту частоту и коэффициент: $K = \omega = 10$.

На частоте $\omega_1 = 2$ рад/с наклон ЛАЧХ изменяется на $+20$ дБ/дек. Это означает, что в структуре системы имеется форсирующее звено первого порядка с передаточной функцией $T_1 p + 1$, где $T_1 = 1/\omega_1 = 0,5$ с.

На частоте $\omega_2 = 4$ рад/с наклон ЛАЧХ снова изменяется на +20 дБ/дек. В структуре системы имеется второе форсирующее звено первого порядка с передаточной функцией $T_2 p + 1$, где $T_2 = 1/\omega_2 = 0,25$ с.

На частоте $\omega_3 = 8$ рад/с наклон ЛАЧХ изменяется на -20 дБ/дек. Это означает, что в структуре системы имеется апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией $1/(T_3 p + 1)$, где $T_3 = 1/\omega_3 = 0,125$ с.

На частоте $\omega_4 = 24$ рад/с наклон ЛАЧХ вновь изменяется на -20 дБ/дек. В структуре системы имеется еще одно апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией $1/(T_4 p + 1)$, где $T_4 = 1/\omega_4 = 0,042$ с.

И, наконец, на частоте $\omega_5 = 36$ рад/с наклон ЛАЧХ в последний раз изменяется и становится равным -40 дБ/дек. Изменение наклона на -20 дБ/дек свидетельствует о наличии третьего апериодического звена первого порядка с передаточной функцией $1/(T_5 p + 1)$, где $T_5 = 1/\omega_5 = 0,028$ с.

Таким образом, передаточная функция системы примет вид:

$$W(p) = \frac{K}{p} \times (T_1 p + 1) \times (T_2 p + 1) \times \frac{1}{T_3 p + 1} \times \frac{1}{T_4 p + 1} \times \frac{1}{T_5 p + 1} =$$

$$= \frac{K(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)(T_5 p + 1)} = \frac{10(0,5 p + 1)(0,25 p + 1)}{p(0,125 p + 1)(0,042 p + 1)(0,028 p + 1)}$$

Домашнее задание. Дана передаточная функция системы одного из трех видов

$$W_1(p) = \frac{K(\tau_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}; \quad W_2(p) = \frac{K(\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)^2 (T_3 p + 1)};$$

$$W_3(p) = \frac{K(\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)^2}.$$

Значения постоянных времени и номер ПФ заданы в таблице 8.1.

Таблица 8.1. Данные для домашнего задания

№ Варианта	T_1 , с	τ_2 , с	T_3 , с	Номер ПФ
1	2	3	4	5
1	0,080	0,042	0,010	$W_1(p)$
2	0,084		0,012	
3	0,088		0,014	
4	0,092		0,016	
5	0,096		0,018	
6	0,100		0,020	
7	0,104		0,022	

1	2	3	4	5
8	0,108		0,024	
9	0,112		0,026	
10	0,116		0,028	
11	0,120	0,050	0,010	$W_2(p)$
12	0,124		0,012	
13	0,128		0,014	
14	0,132		0,016	
15	0,136		0,018	
16	0,140		0,020	
17	0,144		0,022	
18	0,148		0,024	
19	0,152		0,026	
20	0,156		0,028	
21	0,160	0,058	0,010	$W_3(p)$
22	0,164		0,012	
23	0,168		0,014	
24	0,172		0,016	
25	0,176		0,018	
26	0,180		0,020	
27	0,184		0,022	
28	0,188		0,024	
29	0,192		0,026	
30	0,196		0,028	

Требуется построить вручную асимптотические логарифмические характеристики и проверить правильность их построения в MatLab.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Как указывалось ранее, большинство систем автоматического регулирования являются замкнутыми системами, т.е. системами, использующими принцип управления с обратной связью (ОС).

В системе с ОС производится непрерывное измерение выходной (регулируемой) величины. Управляющее воздействие на объект регулирования формируется путем вычисления и математической обработки разности между заданным и фактическим (измеренным) значениями регулируемой величины.

Устройство для измерения физической величины называется *измерительным преобразователем (ИП)*. Например, в робототехнических системах применяются ИП положения (потенциометры, поворотные шифраторы), на тепловых станциях и в промышленности – ИП давления, уровня, температуры и т.д.

Устройство, непосредственно оказывающее воздействие на объект, называется *исполнительным механизмом (ИМ)*. В робототехнических системах это электро-, пневмо- и гидроприводы кинематических пар, на тепловых станциях и в промышленности – нагревательные элементы, регулирующие клапаны, заслонки и задвижки с их приводами, другие механизмы.

И, наконец, устройства, производящие математическую обработку входных сигналов (в том числе сигнала ОС) и формирующие выходные сигналы (в том числе сигналы управления ИМ) называются *управляющими устройствами (УУ)*. В частном случае, когда УУ выполняет исключительно функции регулирования, их называют *регуляторами*. В настоящее время большинство УУ строится на базе микропроцессорной техники и обрабатывают сигналы в цифровом виде.

Для анализа систем управления используются их временные и частотные характеристики. Эти характеристики получают непосредственно по передаточной функции замкнутой системы:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{пр}(p)}{1 + W_{раз}(p)}.$$

где $W_{пр}(p)$ – передаточная функция прямого канала, $W_{раз}(p)$ - передаточная функция разомкнутой системы (под разомкнутой системой понимается последовательное соединение элементов прямого канала и элементов ОС).

В большинстве случаев при анализе и синтезе систем их описание приводится к структуре с единичной ОС, тогда

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)}.$$

9.1. Временные характеристики систем

Рассмотрим ряд примеров, в которых определяются переходная или импульсная характеристики.

Пример 9.1. Определить переходную характеристику системы, структурная схема которой представлена на рис. 9.1:

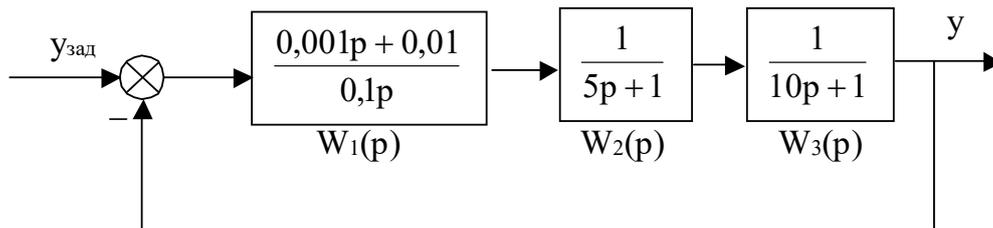


Рис.9.1. Структурная схема системы

Передаточная функция системы

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)} = \frac{0,001p + 0,01}{0,1p(5p + 1)(10p + 1) + (0,001p + 0,01)} = \\ &= \frac{0,001p + 0,01}{5p^3 + 1,5p^2 + 0,101p + 0,01}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Изображение переходной характеристики

$$\begin{aligned} h(p) &= \frac{0,001p + 0,01}{5p^3 + 1,5p^2 + 0,101p + 0,01} \times \frac{1}{p} = \\ &= \frac{0,0002p + 0,002}{p(p + 0,2513)(p^2 + 0,04871p + 0,007959)}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Представим $h(p)$ в виде суммы

$$h(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 0,2513} + \frac{A_3p + A_4}{p^2 + 0,04871p + 0,007959}. \quad (9.3)$$

Определим A_1 , A_2 , A_3 и A_4 из условия:

$$\begin{aligned} A_1(p + 0,2513)(p^2 + 0,04871p + 0,007959) + \\ + A_2p(p^2 + 0,04871p + 0,007959) + \\ + (A_3p + A_4)p(p + 0,2513) = 0,0002p + 0,002. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Получим:

$$\begin{aligned}
p^3(A_1 + A_2 + A_3) &= 0 \\
p^2((0,04871 + 0,2513)A_1 + 0,04871A_2 + 0,2513A_3 + A_4) &= 0 \\
p((0,007959 + 0,2513 \cdot 0,04871)A_1 + 0,007959A_2 + 0,2513A_4) &= 0,0002p \\
0,007959A_1 + 0,2513A_4 &= 0,002
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Решая эти уравнения совместно, получим значения коэффициентов:

$$A_1 = 1, A_2 = -0.1318, A_3 = -0.8682, A_4 = -0.0754.$$

Подставим A_3 и A_4 в последнее слагаемое (9.3) и представим его в виде

$$\begin{aligned}
\frac{-0,8682p - 0,0754}{p^2 + 0,04871p + 0,007959} &= \frac{-0,8682p - 0,0754}{\left(p + \frac{0,04871}{2}\right)^2 + 0,007959 - \left(\frac{0,04871}{2}\right)^2} = \\
&= \frac{-0,8682p - 0,0754}{(p + 0,02436)^2 + 0,007366} = \\
&= \frac{C_1 \sqrt{0,007366}}{(p + 0,02436)^2 + 0,007366} + \frac{C_2(p + 0,02436)}{(p + 0,02436)^2 + 0,007366}.
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Из (9,6) найдем:

$$C_2 = -0,8682,$$

$$C_1 = (-0,0754 + 0,8682 \cdot 0,02436) / \sqrt{0,007366} = -0,6321.$$

Окончательно запишем:

$$\begin{aligned}
h(p) &= \frac{1}{p} - \frac{0,1318}{p + 0,2513} - \frac{0,6321 \sqrt{0,007366}}{(p + 0,02436)^2 + 0,007366} - \\
&\quad - \frac{0,8682(p + 0,02436)}{(p + 0,02436)^2 + 0,007366}.
\end{aligned} \tag{9.7}$$

Оригинал $h(p)$:

$$\begin{aligned}
h(t) &= 1 - 0,1318e^{-0,2513t} - \\
&\quad - e^{-0,02436t} (0,6321 \sin(0,08583t) + 0,8682 \cos(0,08583t)).
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Найдем оригинал также с помощью теоремы разложения.

Если в составе знаменателя есть множитель p , т.е. знаменатель имеет один нулевой корень, то изображение можно записать в виде:

$$A(p) = \frac{N(p)}{pD(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)},$$

где в составе $D(p)$ уже нет множителя p . Предполагая, что уравнение $D(p)=0$ имеет n различных и не равных нулю корней p_k ($k = 1, 2, \dots, n$), получим одну из форм записи теоремы разложения:

$$a(t) = \frac{N(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{p_k \cdot D'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{N(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{p_k \cdot M(p_k)} e^{p_k t} .$$

Здесь $D'(p_k) = \left. \frac{dD}{dp} \right|_{p=p_k} = M(p_k)$ – производная знаменателя $D(p)$ по p ,

в выражение которой подставлено значение k -го корня.

Применим теорему разложения к изображению переходной характеристики

$$H(p) = \frac{0,001p + 0,01}{p(5p^3 + 1,5p^2 + 0,101p + 0,01)} = \frac{N(p)}{pD(p)},$$

где $N(p) = 0,001p + 0,01$ и $D(p) = 5p^3 + 1,5p^2 + 0,101p + 0,01$,

1) Определяем корни полинома $D(p)$:

$$D = [5 \ 1.5 \ 0.101 \ 0.01] ;$$

$$R = \text{roots}(D)$$

$$p1 = R(1) ; p2 = R(2) ; p3 = R(3) ;$$

$$p1 = -0.2513$$

$$p2 = -0.0244 + 0.0858i$$

$$p3 = -0.0244 - 0.0858i$$

Итак, полином $D(p)$ имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня:

$$p_1 = -0,2513; \quad p_2 = -0,0244 + j0,0858 = 0,0892e^{j105,84^\circ};$$

$$p_3 = -0,0244 - j0,0858 = 0,0892e^{-j105,84^\circ} .$$

2) Находим производную полинома $D(p)$ по p :

$$M(p) = \frac{dD}{dp} = 15p^2 + 3p + 0,101.$$

3). Подставляем корни в числитель изображения и производную полинома и найдем $N(0)$ и $D(0)$:

$$N(p_1) = 0,001p_1 + 0,01 = 0,001(-0,2513) + 0,01 = 0,0097;$$

$$N(p_2) = 0,001p_2 + 0,01 = 0,001(-0,0244 + j0,0858) + 0,01 = 0,0100 + j0,0001 = 0,01e^{j0,49^\circ} ;$$

$$N(p_3) = 0,001p_3 + 0,01 = 0,001(-0,0244 - j0,0858) + 0,01 = 0,0100 - j0,0001 = 0,01e^{-j0,49^\circ};$$

$$M(p_1) = 15p_1^2 + 3p_1 + 0,101 = 15(-0,2513)^2 + 3(-0,2513) + 0,101 = 0,2943;$$

$$M(p_2) = 15p_2^2 + 3p_2 + 0,101 = 15(-0,0244 + j0,0858)^2 + 3(-0,0244 + j0,0858) + 0,101 = -0,0737 + j0,1948 = 0,2082e^{j110,72^\circ};$$

$$M(p_3) = 15p_3^2 + 3p_3 + 0,101 = 15(-0,0244 - j0,0858)^2 + 3(-0,0244 - j0,0858) + 0,101 = -0,0737 - j0,1948 = 0,2082e^{-j110,72^\circ};$$

$$N(0) = 0,101;$$

$$D(0) = 0,101.$$

4) Находим оригинал:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{N(0)}{D(0)} + \frac{N(p_1)}{p_1 \cdot M(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{p_2 \cdot M(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{N(p_3)}{p_3 \cdot M(p_3)} e^{p_3 t} = \\ &= \frac{0,101}{0,101} + \frac{0,0097}{(-0,2513) \cdot 0,2943} e^{-0,2513t} + \\ &+ \frac{0,01e^{j0,49^\circ}}{0,0892e^{j105,84^\circ} \cdot 0,2082e^{j110,72^\circ}} e^{(-0,0244 + j0,0858)t} + \\ &+ \frac{0,01e^{-j0,49^\circ}}{0,0892e^{-j105,84^\circ} \cdot 0,2082e^{-j110,72^\circ}} e^{(-0,0244 - j0,0858)t} = 1 - 0,1318e^{-0,2513t} + \\ &+ 0,537e^{j143,93^\circ} e^{(-0,0244 + j0,0858)t} + 0,537e^{-j143,93^\circ} e^{(-0,0244 - j0,0858)t} = 1 - 0,1318e^{-0,2513t} + \\ &+ 0,537e^{-0,0244t} e^{j(0,0858t + 143,93^\circ)} + 0,537e^{-0,0244t} e^{-j(0,0858t + 143,93^\circ)} = 1 - 0,1318e^{-0,2513t} + \\ &+ 0,537e^{-0,0244t} [\cos(0,0858t + 143,93^\circ) + j \sin(0,0858t + 143,93^\circ)] + \\ &+ \cos(0,0858t + 143,93^\circ) - j \sin(0,0858t + 143,93^\circ) = 1 - 0,1318e^{-0,2513t} + \\ &+ 2 \cdot 0,537e^{-0,0244t} \cos(0,0858t + 143,93^\circ) = 1 - 0,1318e^{-0,2513t} + \\ &+ 1,074e^{-0,0244t} \sin(0,0858t + 53,93^\circ) = 1 - 0,1318e^{-0,2513t} + \\ &1,074e^{-0,0244t} (\cos 53,93^\circ \sin 0,0858t + \sin 53,93^\circ \cos 0,0858t) = \\ &= 1 - 0,1318e^{-0,2513t} - (0,6321 \sin 0,0858t + 0,8682 \cos 0,0858t) e^{-0,02436t}. \end{aligned}$$

С помощью MatLab построим переходную характеристику и определим перерегулирование (overshoot) и время установления колебаний (Settling Time):

```
s=tf('s')
H=(0.001*s+0.01)/(5*s^3+1.5*s^2+0.101*s+0.01)
step(H)
```

Первый максимум $h_m = 1.38$ наступает при $t = 40.4$ с, перерегулирование составляет $\sigma = 38.3\%$, время установления колебаний $t_y = 159$ с.

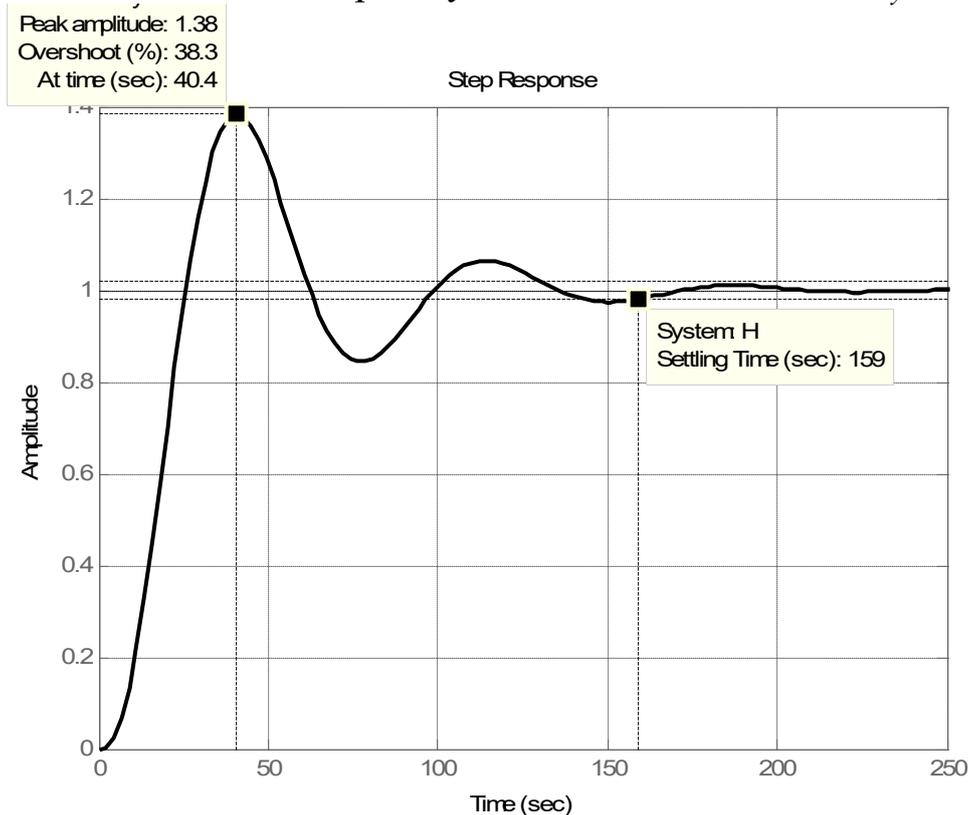


Рис. 9.2. Переходная характеристика системы

Пример 9.2. Определить импульсную характеристику СУ (рис. 9.3)

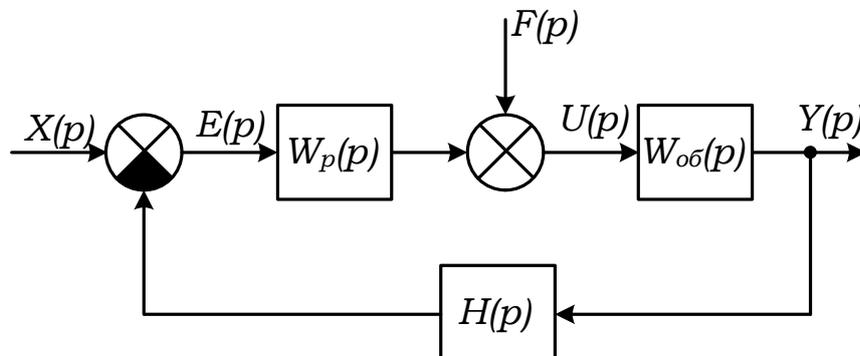


Рис. 9.3. Структурная схема замкнутой САУ

Передаточные функции блоков структурной схемы:

$$W_p(p) = \frac{5 \cdot 10^4}{p+1000}; \quad W_{об}(p) = \frac{1}{p(p+20)}; \quad H(p) = 1.$$

ПФ разомкнутой систем:

$$W(p) = W_p(p)W_{об}(p) = \frac{5 \cdot 10^4}{p+1000} \cdot \frac{1}{p(p+20)} = \frac{5 \cdot 10^4}{p^3 + 1020p^2 + 20 \cdot 10^3 p}.$$

ПФ по заданию замкнутой системы:

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{\frac{5 \cdot 10^4}{p^3 + 1020p^2 + 20 \cdot 10^3 p}}{1 + \frac{5 \cdot 10^4}{p^3 + 1020p^2 + 20 \cdot 10^3 p}} = \\ &= \frac{5 \cdot 10^4}{p^3 + 1020p^2 + 20 \cdot 10^3 p + 5 \cdot 10^4}. \end{aligned}$$

Для получения ИХ нужно найти оригинал ПХ. Найдем корни знаменателя:

```
P=[1 1020 20000 50000];
R=roots(P);
p1=R(1), p2=R(2), p3=R(3)
p1 = -1.0001e+003
p2 = -17.0096
p3 = -2.9394
```

ПФ замкнутой системы запишем в виде

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{5 \cdot 10^4}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} = \frac{5 \cdot 10^4}{(p+1000)(p+17)(p+2,94)} = \\ &= \frac{A_1}{p+1000} + \frac{A_2}{p+17} + \frac{A_3}{p+2,94}. \end{aligned}$$

Для получения первого коэффициента умножим обе части выражения на полином $(p+1000)$ и подставим в полученное выражение значение первого корня. Тогда в правой части останется только A_1 , а в левой – этот полином сократится. В результате получим:

$$A_1 = \frac{5 \cdot 10^4}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)} = \frac{5 \cdot 10^4}{(-1000 + 17)(-1000 + 2,94)} = 0,051.$$

Аналогично найдем остальные коэффициенты:

$$A_2 = \frac{5 \cdot 10^4}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)} = \frac{5 \cdot 10^4}{(-17 + 1000)(-17 + 2,94)} = -3,615.$$

$$A_3 = \frac{5 \cdot 10^4}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} = \frac{5 \cdot 10^4}{(-1000 + 17)(-1000 + 2,94)} = 3,564.$$

Следовательно:

$$T(p) = \frac{0,051}{p+1000} + \frac{-3,615}{p+17} + \frac{3,564}{p+2,94}.$$

Проверка правильности разложения:

```
P=[1 1020 20000 50000];
```

```
N=50000;
```

```
[r,p,k]=residue(N,P)
```

```
a = 0.0510
```

```
    -3.6149
```

```
    3.5639
```

```
p = 1.0e+003 *
```

```
    -1.0001
```

```
    -0.0170
```

```
    -0.0029
```

```
k = []
```

Запишем оригинал, т.е. импульсную характеристику:

$$w(t) = 0,051e^{-1000t} - 3,615e^{-17t} + 3,564e^{-2,94t}.$$

Построим график ИХ в Matlab:

```
N=50000;P=[1 1020 20000 50000];
```

```
T=tf(N,P)
```

```
impulse(T,1.2)grid
```

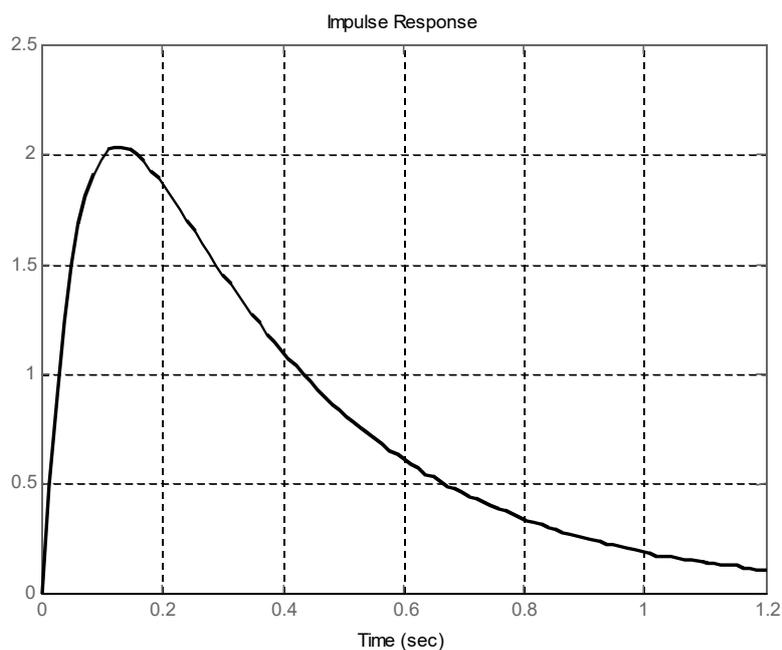


Рис. 9.4. Импульсная характеристика замкнутой САУ

9.2. Частотные характеристики

Рассмотрим пример, в котором определяются характеристики в частотной области.

Пример 9.3. Построить ВЧХ, МЧХ и годограф КЧХ системы из примера 9.1.

КЧХ (АФЧХ) системы:

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{0,001j\omega + 0,01}{5(j\omega)^3 + 1,5(j\omega)^2 + 0,101j\omega + 0,01} = \\
 &= \frac{0,001j\omega + 0,01}{-5j\omega^3 - 1,5\omega^2 + 0,101j\omega + 0,01} = \frac{0,001j\omega + 0,01}{(0,01 - 1,5\omega^2) + j(0,101\omega - 5\omega^3)} = \\
 &= \frac{(0,001j\omega + 0,01)((0,01 - 1,5\omega^2) - j(0,101\omega - 5\omega^3))}{(0,01 - 1,5\omega^2)^2 + (0,101\omega - 5\omega^3)^2} = \\
 &= \frac{(-0,005\omega^4 - 0,014899\omega^2 + 0,0001) + j(0,0485\omega^3 - 0,001\omega)}{(0,01 - 1,5\omega^2)^2 + (0,101\omega - 5\omega^3)^2}.
 \end{aligned} \tag{9.9}$$

Вещественная частотная характеристика:

$$P(\omega) = \frac{-0,005\omega^4 - 0,014899\omega^2 + 0,0001}{(0,01 - 1,5\omega^2)^2 + (0,101\omega - 5\omega^3)^2}. \tag{9.10}$$

Мнимая частотная характеристика:

$$Q(\omega) = \frac{0,0485\omega^3 - 0,001\omega}{(0,01 - 1,5\omega^2)^2 + (0,101\omega - 5\omega^3)^2}. \tag{9.11}$$

Задаваясь частотами в диапазоне от 0 до 0,5 рад/сек, рассчитаем $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ и построим АФЧХ как зависимость $Q(\omega)$ от $P(\omega)$ (рис.3)

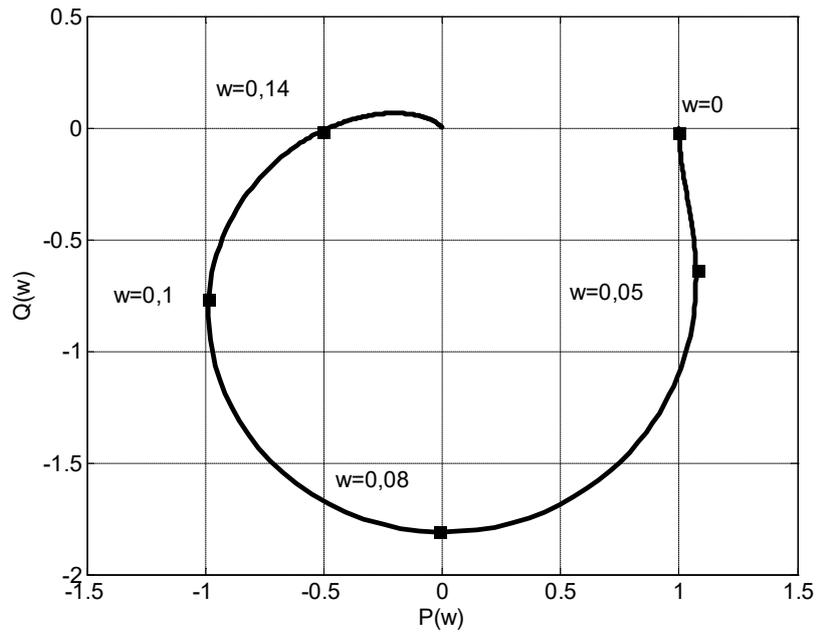


Рис. 9.3. АФЧХ системы

АЧХ и ФЧХ системы рассчитаем и построим по известным уравнениям

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \tag{12}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \tag{13}$$

используя ранее полученные значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ (рис. 9.4, 9.5).

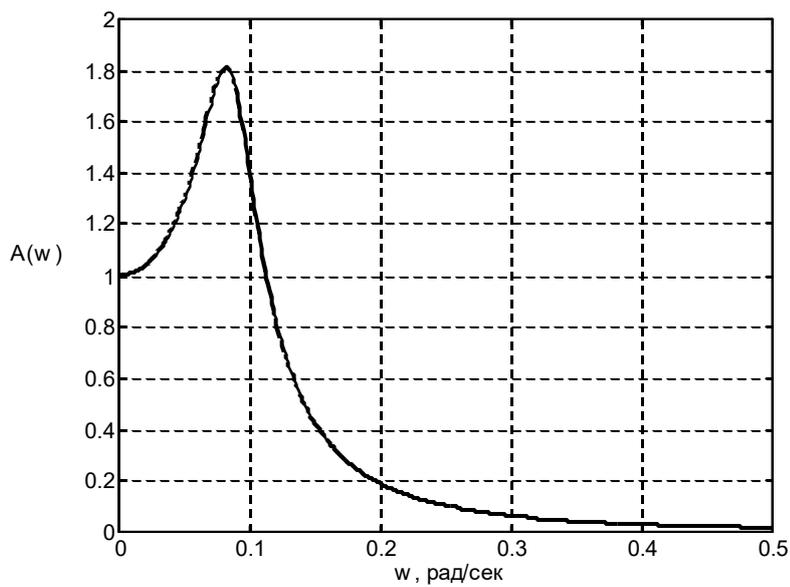


Рис.9.4. АЧХ системы.

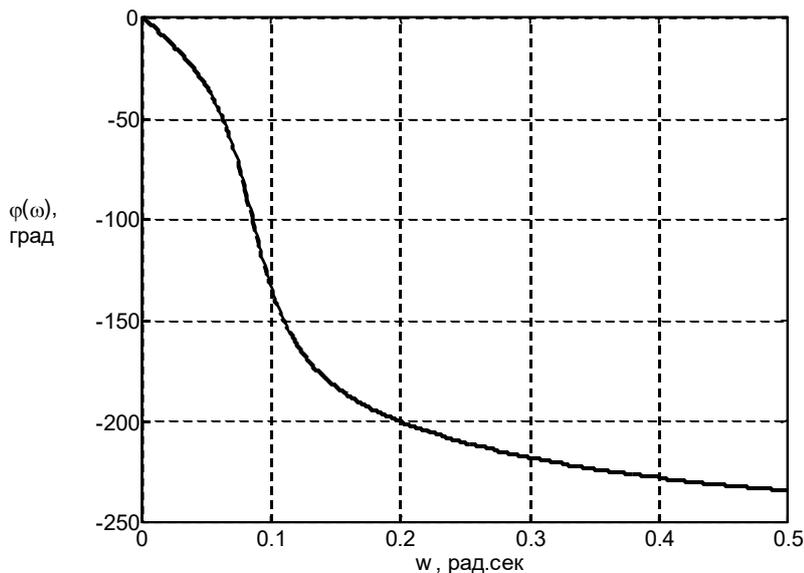


Рис. 9.5. ФЧХ системы

При расчете ФЧХ формулу (9,13) следует применять с учетом периодичности функции \arctg . Так, например, в нашем случае при $P(\omega) < 0$ и $Q(\omega) < 0$ АФЧХ лежит в третьем квадранте и $-90^\circ > \varphi(\omega) > -180^\circ$. Однако расчет по формуле (13) дает положительное значение $\varphi(\omega)$.

Для того, чтобы не ошибиться в определении ФЧХ, следует ориентироваться на график АФЧХ, корректируя полученные по (13) значения $\varphi(\omega)$ на величину, кратную -180° .

Домашнее задание. Передаточная функция разомкнутой системы приведена в домашнем задании к работе 8. Получить ПФ замкнутой системы с единичной ООС и построить для нее временные и частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ и годограф КЧХ). Переходную характеристику найти операторным методом, а импульсную – путем дифференцирования переходной характеристики.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Как показано выше в пособии, любую сложную передаточную функцию можно представить в виде произведения передаточных функций первого и второго порядков, разложив ее числитель и знаменатель по нулям и полюсам. Динамические звенья, которые описываются неразложимыми далее передаточными функциями, будем называть *элементарными*. Элементарных звеньев всего семь. Их передаточные функции имеют следующий вид:

1) $W(p) = K$ – нули и полюса отсутствуют;

2) $W(p) = \frac{1}{p}$ – нулевой полюс;

3) $W(p) = \frac{-\alpha}{p - \alpha}$ – вещественный полюс $p = \alpha$;

4) $W(p) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{p^2 - 2\alpha p + (\alpha^2 + \beta^2)}$ – пара комплексно сопряженных полюсов $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$;

5) $W(p) = p$ – нулевой нуль;

6) $W(p) = \frac{p - \alpha}{-\alpha}$ – вещественный нуль $z = \alpha$;

7) $W(p) = \frac{p^2 - 2\alpha p + (\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2}$ – пара комплексно сопряженных нулей

$z_{1,2} = \alpha \pm j\beta$;

Многие элементы реальных систем автоматического управления близки по своим динамическим свойствам элементарным звеньям, однако в большинстве случаев описать элемент одним элементарным звеном не удастся. Это связано в частности с тем обстоятельством, что реальные устройства помимо «основного», динамического преобразования (например, интегрирования) практически всегда выполняют и статическое преобразование сигнала (усиление, преобразование одной физической величины в другую). Следует также отметить, что технические устройства, как правило, *устойчивы* или, как минимум, *нейтральны*, т.е. вещественные части полюсов их передаточных функций – отрицательные или нулевые.

На практике при описании элементов структурной схемы системы часто используют т.н. *типовые* звенья. Типовые звенья строятся из одного, двух или даже трех элементарных и поэтому позволяют описать многие реальные физические объекты и устройства.

Классификацию типовых звеньев можно осуществить, рассматривая частные формы дифференциального уравнения второго порядка

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t),$$

которому соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

В табл. П1 приведены значения коэффициентов в уравнении (ДУ) и названия для наиболее часто встречающихся звеньев.

Таблица П1 – Значения коэффициентов ДУ типовых звеньев

№	Наименование звена	a_2	a_1	a_0	b_1	b_0
1	Безынерционное (усилительное, пропорциональное)	0	0	1	0	k
2	Идеальное интегрирующее	0	1	0	0	k
3	Апериодическое 1-го порядка	0	T	1	0	k
4	Реальное интегрирующее	T	1	0	0	k
5	Апериодическое 2-го порядка	$T_1 T_2$	$T_1 + T_2$	1	0	k
6	Колебательное	T^2	$2\xi T$	1	0	k
7	Идеальное дифференцирующее	0	0	1	k	0
8	Реальное дифференцирующее	0	T	1	k	0
9	Форсирующее	0	0	1	kT	k
10	Изодромное	0	T	0	kT	k
11	Интегро-дифференцирующее	0	T_1	1	KT_2	k

Звенья, у которых $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$, обладают статизмом, т.е. обладают однозначной связью между входом и выходом в статическом режиме: при подаче на вход постоянной величины с течением времени устанавливается постоянное значение выходной величины. К их названиям часто добавляются слова *статическое* или *позиционное*.

Кроме перечисленных в таблице П1 к типовым звеньям относят также звено запаздывания.

Ниже приведено описание типовых звеньев, включая их переходные и частотные характеристики.

1. Безынерционное (усилительное пропорциональное) звено

описывается уравнением

$$x_{вых} = kx_{вх}.$$

Коэффициент k называется коэффициентом усиления, если $x_{вх}$ и $x_{вых}$ – сигналы одной физической природы, или коэффициентом передачи, если физическая природа этих сигналов различна. Согласно уравнению звена выходной сигнал повторяет входной, усиленный по модулю в k раз. Строго говоря, реальных безынерционных звеньев не бывает – любые процессы преобразования энергии или информации занимают некоторое время. Однако если инерционность некоторого звена системы намного меньше инерционности других звеньев, ею целесообразно пренебречь, так как это упростит математическое описание системы, не снижая его адекватности или достоверности. Например, присутствующие во многих САР полупроводниковые усилители можно считать безынерционными звеньями, так как время преобразования (усиления) сигнала в них на несколько порядков меньше времени реакции на управляющий сигнал объектов управления и исполнительных механизмов.

Передаточная функция усилительного звена не имеет нулей и полюсов:

$$W(p) = k.$$

Амплитудно-частотная характеристика усилительного звена:

$$W(j\omega) = k.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20 \lg k.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = 0.$$

2. Идеальное интегрирующее звено

описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = kx_{\text{вх}}.$$

Выходной сигнал интегрирующего звена пропорционален интегралу от входного:

$$x_{\text{вых}} = k \int_0^t x_{\text{вх}}(\tau) d\tau.$$

При $x_{\text{вх}} = \text{const}$ коэффициент k представляет собой отношение скорости изменения выходного сигнала к величине входного.

Передаточная функция звена не имеет нулей, но имеет один нулевой полюс:

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Переходная характеристика звена определяется уравнением

$$x_{\text{вых}} = kt$$

и представляет собой линейно возрастающий во времени сигнал.

Амплитудно-частотная характеристика звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

Это прямая с наклоном -20 Дб/дек, пересекающая ось абсцисс при частоте $\omega = k$

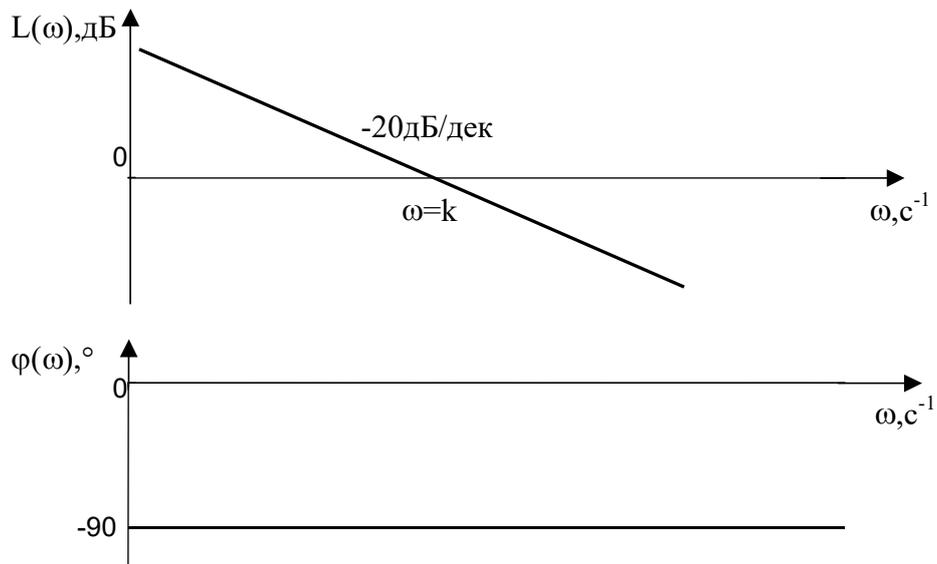


Рис. П.1. Логарифмические частотные характеристики интегрирующего звена.

3. Апериодическое звено первого порядка

описывается дифференциальным уравнением вида

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}},$$

где T – постоянная времени звена с^{-1} ; k – его коэффициент передачи (усиления).

Передаточная функция апериодического звена:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Она имеет единственный полюс $p = -1/T$.

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

График переходной характеристики показан на рис. П.3

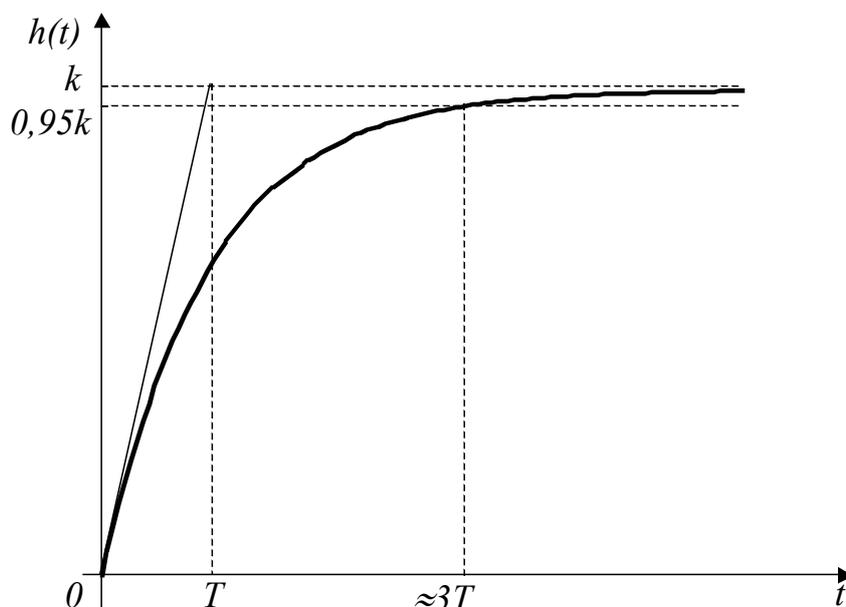


Рис. П.2. Переходная характеристика аperiodического звена первого порядка

Постоянная времени аperiodического звена имеет определенный физический смысл – это время, в течение которого выходная величина достигла бы установившегося значения, если бы изменялась с постоянной начальной скоростью. Действительно, из (84) при $x_{вх} = 1$, $x_{вых} = 0$ получаем

$$\frac{dx_{вых}}{dt}(0) = \frac{k}{T}.$$

Откуда время достижения установившегося состояния

$$t_y = k / \frac{dx_{вых}}{dt}(0) = T.$$

Амплитудно-частотная характеристика аperiodического звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\arctg(T\omega).$$

Логарифмируя, получим ЛАЧХ аperiodического звена:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

- 1) при $\omega \rightarrow 0$, $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$;
- 2) при $\omega \rightarrow \infty$, $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k - 20 \lg(T\omega)$.

Первая асимптота – горизонтальная линия на уровне $20lgk$, вторая – прямая с наклоном -20 дБ/дек.

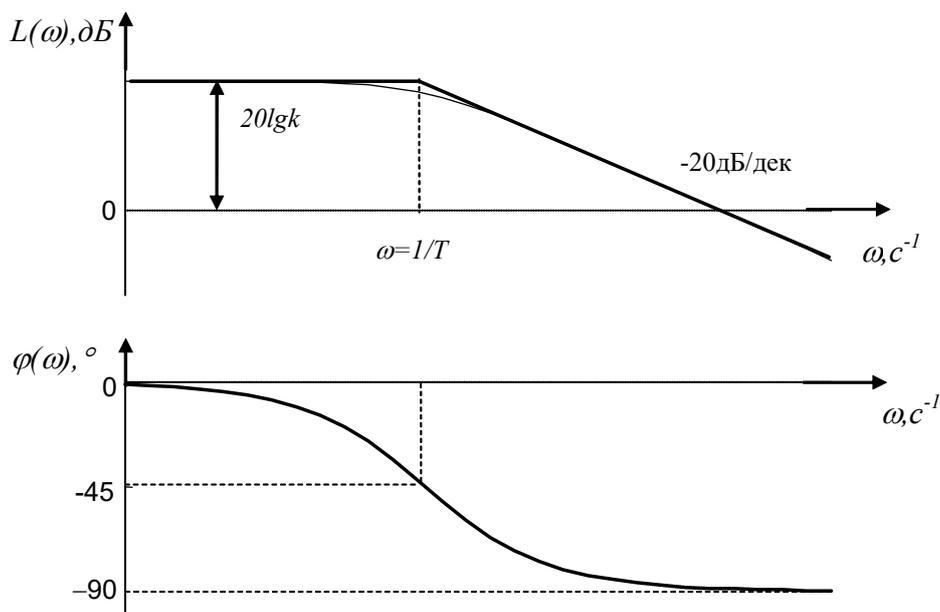


Рис. П.3. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена.

Пересекаются асимптоты в точке $\omega=1/T$. На этой же частоте сама ЛАХ в наибольшей степени отличается от асимптот (отличие $\Delta L \approx 3$ дБ).

4. Реальное интегрирующее звено

описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = kx_{\text{вх}}.$$

где T – постоянная времени звена c^{-1} .

Передаточная функция звена имеет два полюса $p_1 = 0$ и $p_2 = -1/T$:

$$W(p) = \frac{k}{Tp^2 + p} = \frac{k}{p(Tp + 1)}.$$

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = kt + kT \left(e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right).$$

График переходной характеристики приведен на рис. П.4.

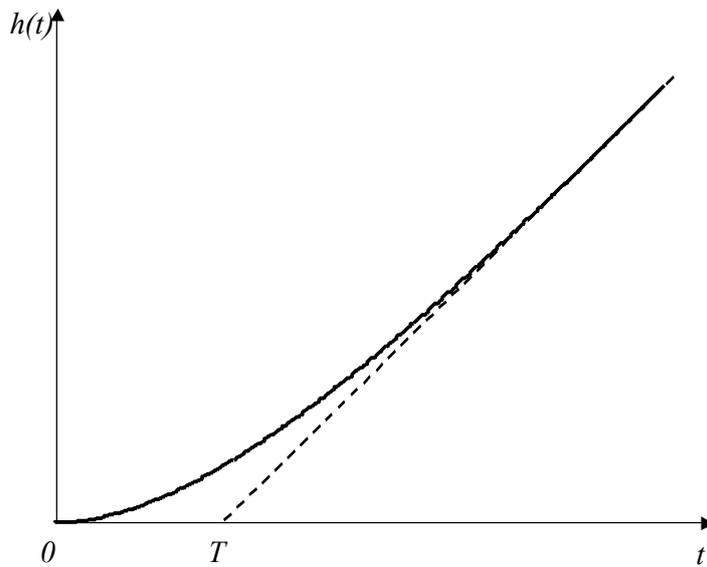


Рис. П.4. Переходная характеристика реального интегрирующего звена

При $t \rightarrow \infty$ $h(t) \rightarrow kt - kT$.

Амплитудно-частотная характеристика реального интегрирующего звена есть произведение АЧХ идеального интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} = \frac{k}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}.$$

Фазочастотная характеристика есть сумма ФЧХ идеального интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg(T\omega).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется выражением:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

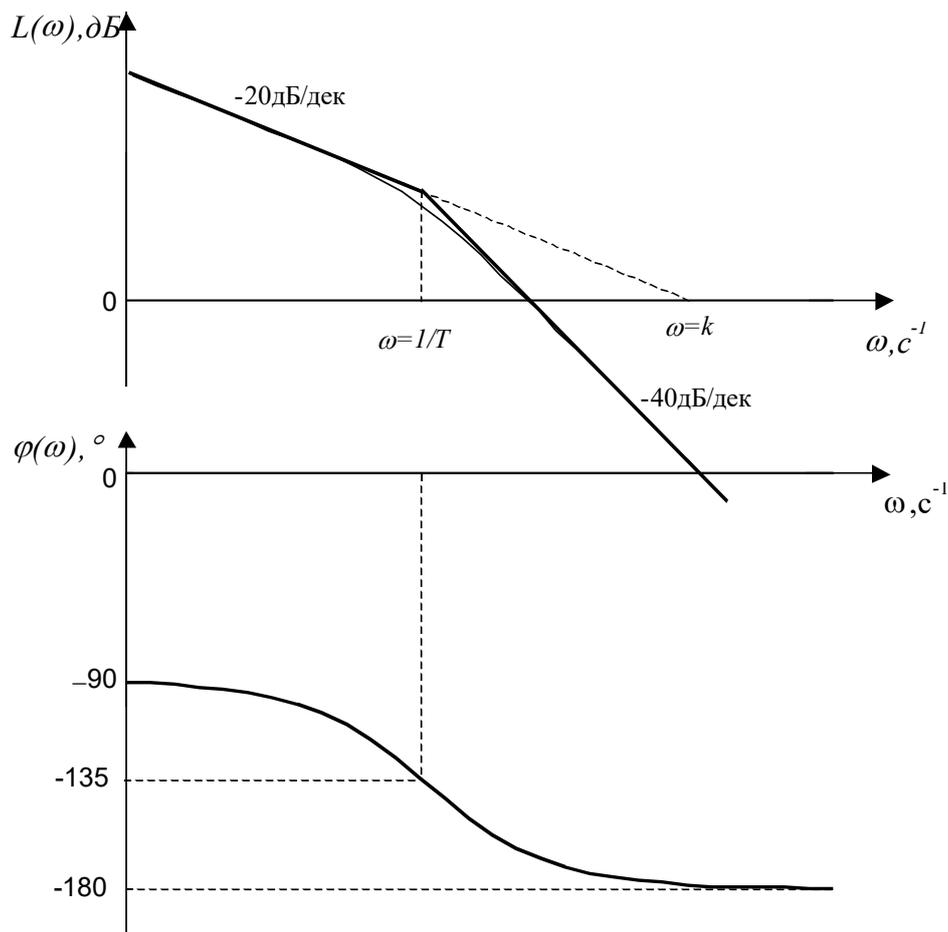


Рис. П.6. Логарифмические частотные характеристики реального интегрирующего звена.

5. Аперiodическое звено второго порядка

описывается дифференциальным уравнением вида

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = k x_{\text{вх}},$$

где T_1, T_2 – постоянные времени звена c^{-1} ; k – его коэффициент передачи (усиления).

Передаточная функция аперiodического звена:

$$W(p) = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Она имеет два полюса $p_1 = -1/T_1$ и $p_2 = -1/T_2$.

Уравнение переходной характеристики звена при $T_1 \neq T_2$:

$$h(t) = k \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

При $T_1 = T_2 = T$

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

График переходной характеристики показан на рис. П.7.



Рис. П.7. Переходная характеристика апериодического звена второго порядка

В отличие от переходной характеристики апериодического звена первого порядка характеристика звена второго порядка имеет выраженный начальный участок, на котором скорость изменения выходного сигнала увеличивается от нуля до своего максимального значения. Если одна из постоянных времени значительно меньше другой, длительность этого участка мала и характеристика близка к характеристике, приведенной на рис. П.2.

Амплитудно-частотная характеристика звена есть произведение АЧХ двух звеньев первого порядка:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} \times \frac{1}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}} = \frac{k}{\sqrt{(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)}}.$$

Фазочастотная характеристика есть сумма ФЧХ двух звеньев первого порядка:

$$\varphi(\omega) = -\arctg(T_1 \omega) - \arctg(T_2 \omega).$$

ЛАЧХ звена:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}.$$

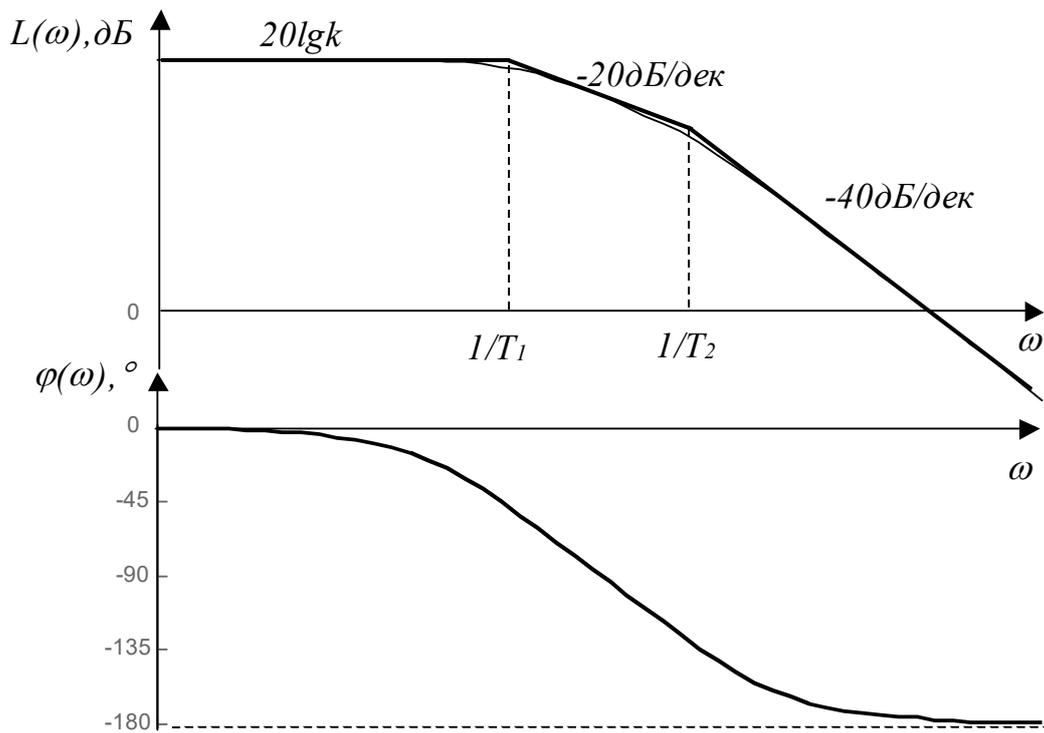


Рис. П.8. Логарифмические частотные характеристики апериодического звена второго порядка ($T_1 > T_2$)

6. Колебательное звено

описывается дифференциальным уравнением второго порядка, которое можно привести к виду

$$T^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + 2T\xi \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}, \quad 0 \leq \xi < 1,$$

где T – постоянная времени звена, с^{-1} ; k – коэффициент передачи звена; ξ – коэффициент демпфирования.

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Передаточная функция имеет пару комплексно сопряженных полюсов

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta,$$

где

$$\alpha = -\frac{\xi}{T}, \quad \beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}.$$

Переходная характеристика колебательного звена может быть выражена через его полюса:

$$h(t) = k \left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{\alpha t} \sin \left(\beta t - \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right) \right)$$

или через параметры передаточной функции:

$$h(t) = k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right).$$

Переходная характеристика колебательного звена представляет собой сумму постоянной величины, равной коэффициенту передачи k , и затухающей синусоиды с частотой β . Скорость затухания синусоиды определяется вещественной частью полюсов α .

Переходные характеристики колебательных звеньев при различных значениях постоянных времени и коэффициента демпфирования показаны на рис. П.9.

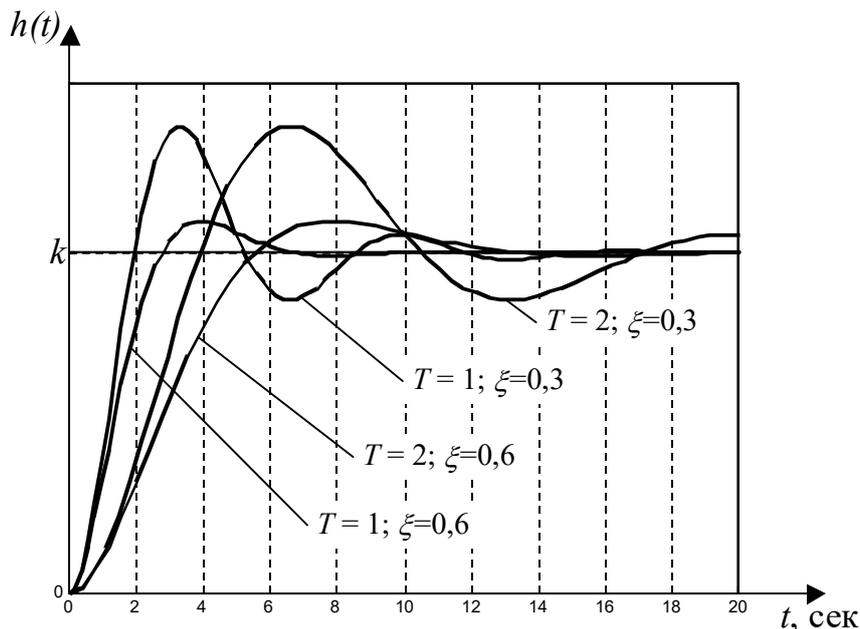


Рис. П.9. Переходные характеристики колебательных звеньев

Увеличение постоянной времени T ведет к снижению скорости затухания и частоты колебаний, что в свою очередь дает увеличение длительности переходной характеристики. Размах колебаний остается неизменным.

Увеличение коэффициента демпфирования ξ ведет к увеличению скорости затухания колебаний и уменьшению их размаха и частоты, т.е. к подавлению (демпфированию) колебаний.

Отметим, что при $\xi \geq 1$ полюса звена становятся отрицательными вещественными числами:

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T},$$

и, следовательно, звено становится аperiodическим второго порядка.

С другой стороны, при $\xi = 0$:

$$h(t) = k \left(1 - \sin \left(\frac{1}{T}t + \frac{\pi}{2} \right) \right) = k \left(1 - \cos \left(\frac{1}{T}t \right) \right).$$

Это уравнение незатухающих колебаний относительно уровня $h = k$ с частотой $\omega = 1/T$ и амплитудой, равной коэффициенту передачи.

Звено, у которого $\xi = 0$, называется *консервативным*.

Амплитудно-частотная характеристика колебательного звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}}.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(j\omega) = -\arctg \left(\frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} \right).$$

ЛАЧХ звена имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}.$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

а) при $\omega \rightarrow 0$, $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$;

б) при $\omega \rightarrow \infty$, $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k - 40 \lg T\omega$.

Первая асимптота является горизонтальной прямой, уровень которой $20 \lg k$, вторая – прямая с наклоном -40 дБ/дек (рис.П.10).

При значениях коэффициента демпфирования $0,5 < \xi < 1$ характеристика близка к ломаной, образованной двумя этими асимптотами. Если же $\xi < 0,5$, то имеет место заметный «горб» в ЛАЧХ на частоте

$$\omega_k = \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2},$$

который может быть рассчитан следующим образом:

$$\Delta L = 20 \lg \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}.$$

В упрощенных расчетах можно принять

$$\Delta L = 20 \lg \frac{1}{2\xi}, \quad \omega_k = \frac{1}{T}.$$

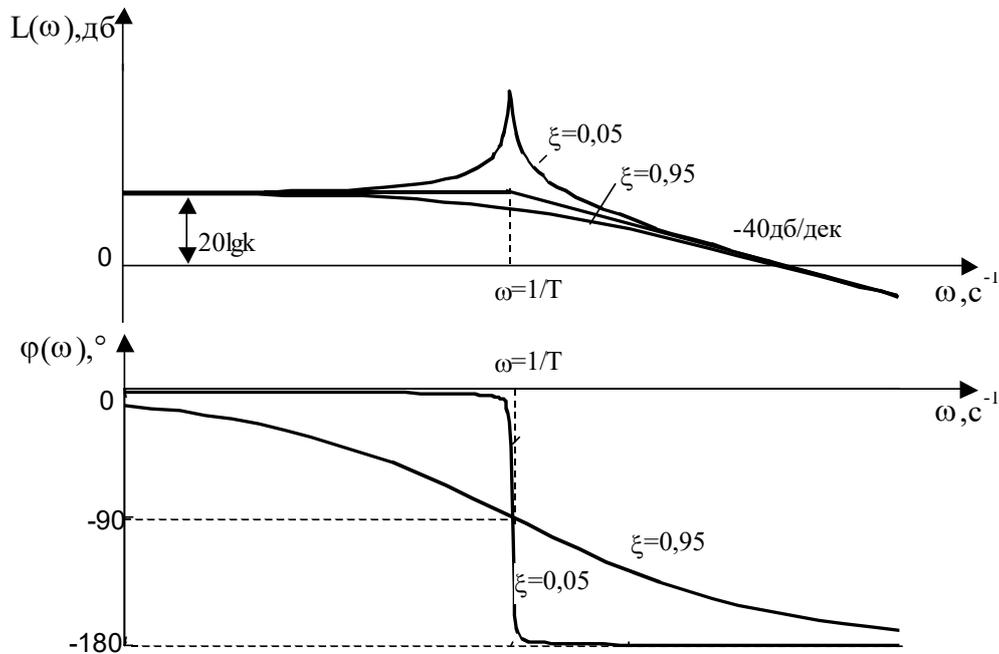


Рис. П.10. Логарифмические частотные характеристики колебательного звена

7. Идеальное дифференцирующее звено

описывается дифференциальным уравнением:

$$x_{\text{вых}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}.$$

Его передаточная функция

$$W(p) = kp.$$

Поскольку звено физически нереализуемо, ее переходная характеристика не приводится.

Амплитудно-частотная характеристика идеального дифференцирующего звена:

$$A(\omega) = k\omega.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega.$$

Это прямая с наклоном 20 дБ/дек, проходящая через ось абсцисс при частоте $\omega = 1/k$.

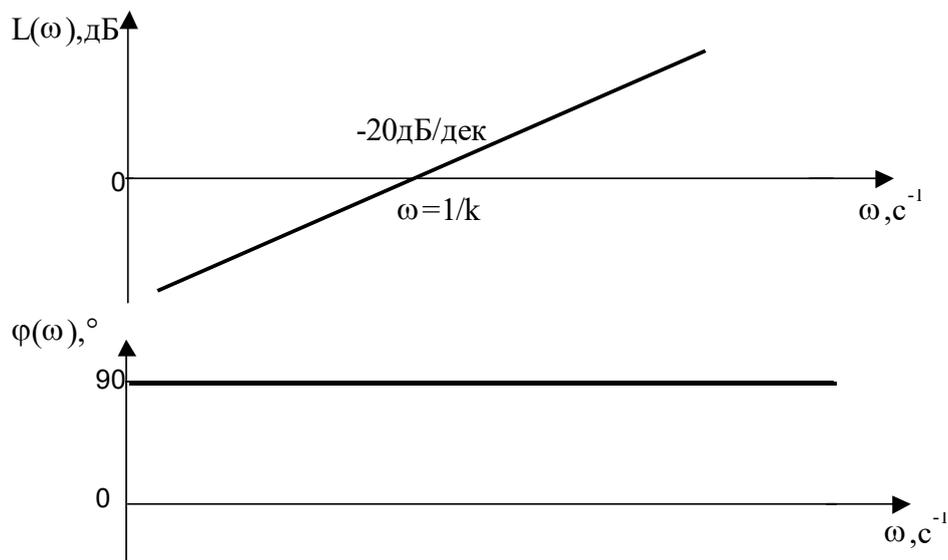


Рис. П.11. Логарифмические частотные характеристики идеального дифференцирующего звена

8. Реальное дифференцирующее звено

описывается уравнением

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt},$$

где T – постоянная времени звена с^{-1} .

Передаточная функция звена имеет один полюс $p_1 = -1/T$ и один нуль $z = 0$.

$$W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}.$$

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

График переходной характеристики приведен на рис. П.12.

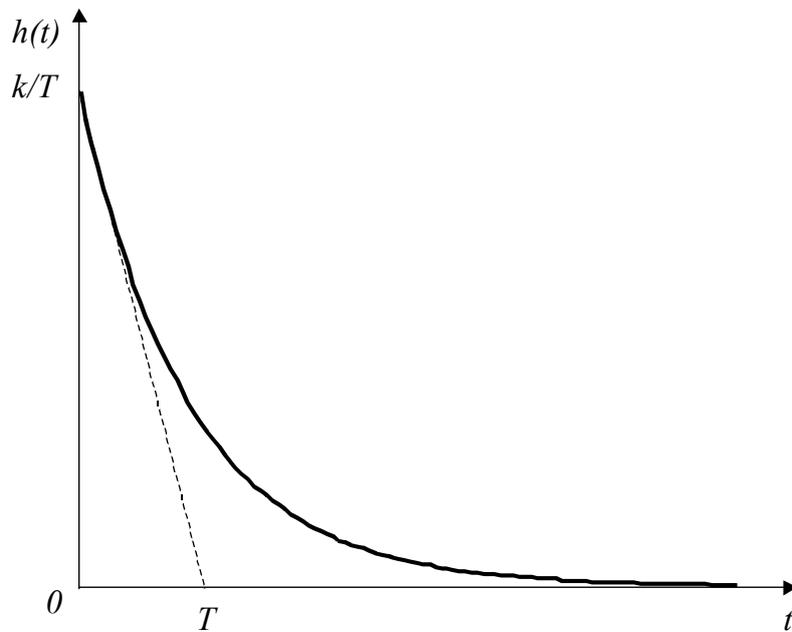


Рис. П.12. Переходная характеристика реального дифференцирующего звена

Амплитудно-частотная характеристика звена есть произведение АЧХ идеального дифференцирующего звена и апериодического звена первого порядка:

$$A(\omega) = k\omega \times \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = \frac{k\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}.$$

Фазочастотная характеристика есть сумма ФЧХ указанных звеньев:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(T_2\omega).$$

ЛАЧХ звена:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

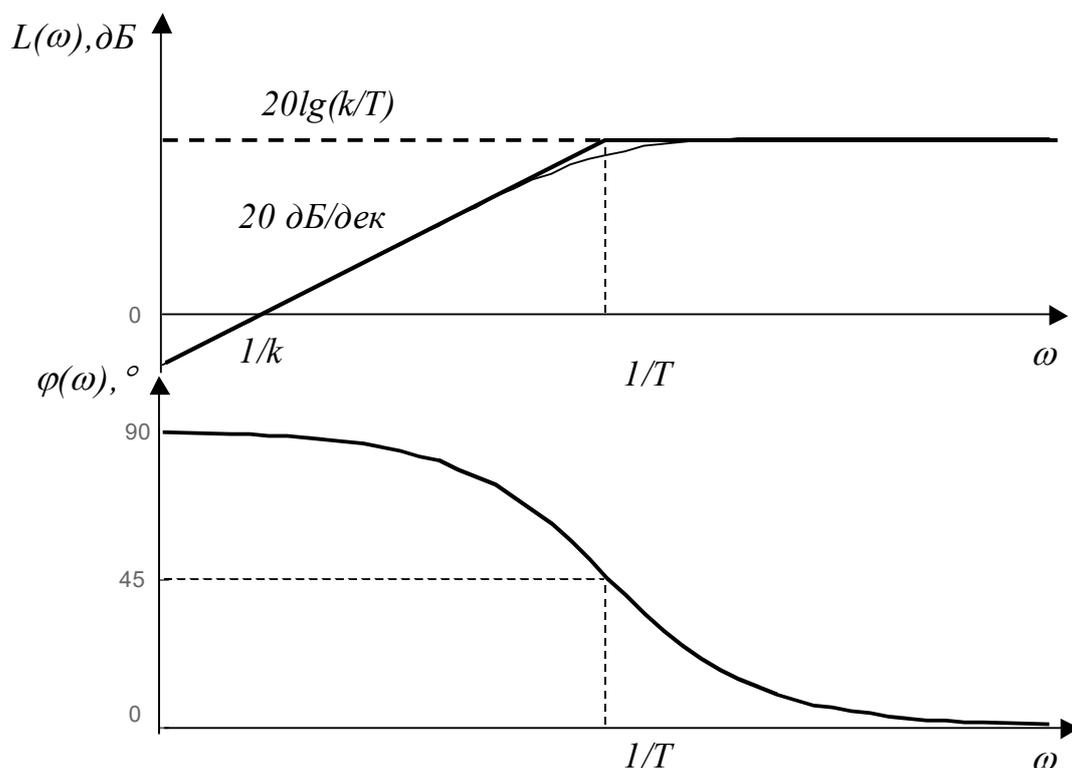


Рис. П.12. Логарифмические частотные характеристики реального дифференцирующего звена

9. Идеальное форсирующее звено

описывается дифференциальным уравнением

$$x_{\text{вых}} = k \left(T \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + 1 \right).$$

Звено имеет передаточную функцию

$$W(p) = k(Tp + 1).$$

Поскольку звено физически нереализуемо, ее переходная характеристика не приводится.

Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = k \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \arctg(T\omega).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg T\omega.$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

1) при $\omega \rightarrow 0$, $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$;

2) при $\omega \rightarrow \infty$, $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k + 20 \lg T \omega$.

Первая асимптота – горизонтальная прямая, вторая – прямая с наклоном +20 дБ/дек (рис.П.13).

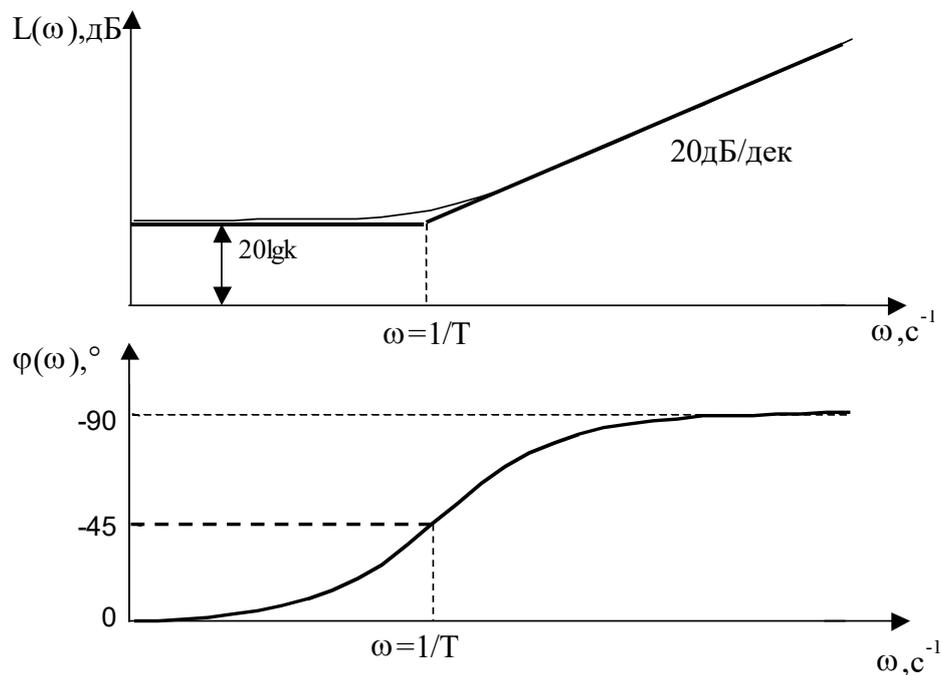


Рис. П.14. Логарифмические частотные характеристики форсирующего звена.

Пересекаются асимптоты в точке $\omega = 1/T$. Наибольшее отличие ЛАЧХ от асимптот наблюдается на частоте $\omega = 1/T$ и составляет $\Delta L \approx 3$ дБ.

10. Изодромное звено

описывается уравнением

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = k \left(T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{ex}} \right).$$

где T – постоянная времени звена с^{-1} (*постоянная изодрома*).

Передаточная функция звена имеет один нулевой полюс и один нуль $z = -1/T$:

$$W(p) = \frac{k(Tp + 1)}{Tp} = k \left(1 + \frac{1}{Tp} \right).$$

Реакция звена на входной сигнал складывается из пропорциональной и интегральной составляющих.

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = k \left(1 + \frac{t}{T} \right).$$

График переходной характеристики приведен на рис. П.15.

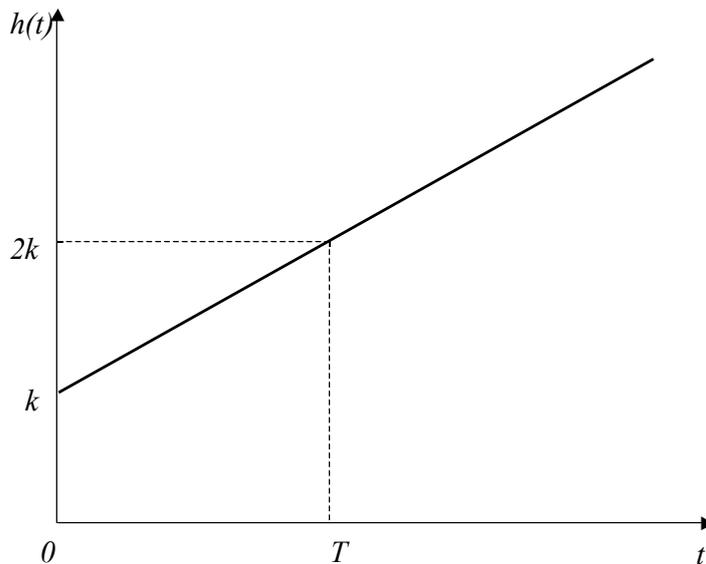


Рис. П.15. Переходная характеристика реального интегрирующего звена

Физический смысл постоянной времени изодрома: это время в течение которого интегральная составляющая выходного сигнала достигнет значения пропорциональной составляющей при нулевых начальных условиях и постоянном сигнале на входе звена.

Амплитудно-частотная характеристика изодромного звена есть произведение АЧХ идеального интегрирующего и форсирующего звеньев:

$$A(\omega) = \frac{k}{T\omega} \times \sqrt{T^2\omega^2 + 1} = \frac{k\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}{T\omega}.$$

Фазочастотная характеристика есть сумма ФЧХ указанных звеньев:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(T\omega).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется выражением:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg(k/T) - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

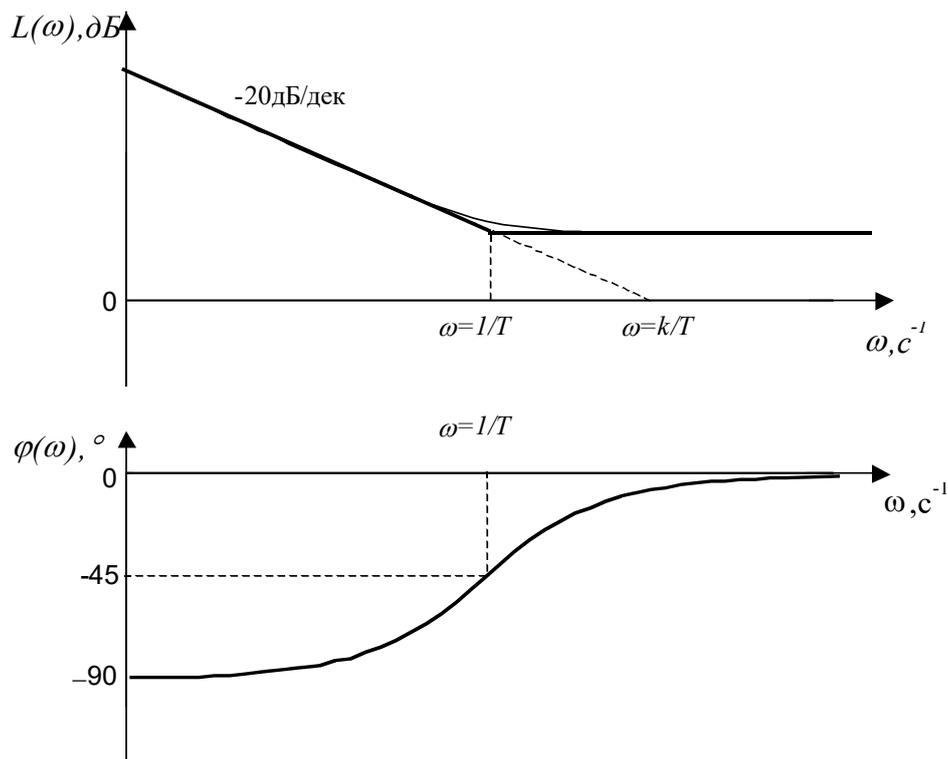


Рис. П.16. Логарифмические частотные характеристики изодромного звена

11. Интегро-дифференцирующее звено

описывается уравнением

$$T_1 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = k(T_2 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + x_{\text{вх}}).$$

Передаточная функция звена имеет один полюс $z = -1/T_1$ и один нуль $z = -1/T_2$:

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)}.$$

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}).$$

В зависимости от соотношения постоянных времени переходная характеристика может быть как возрастающей (рис. П.17), так и убывающей функцией.

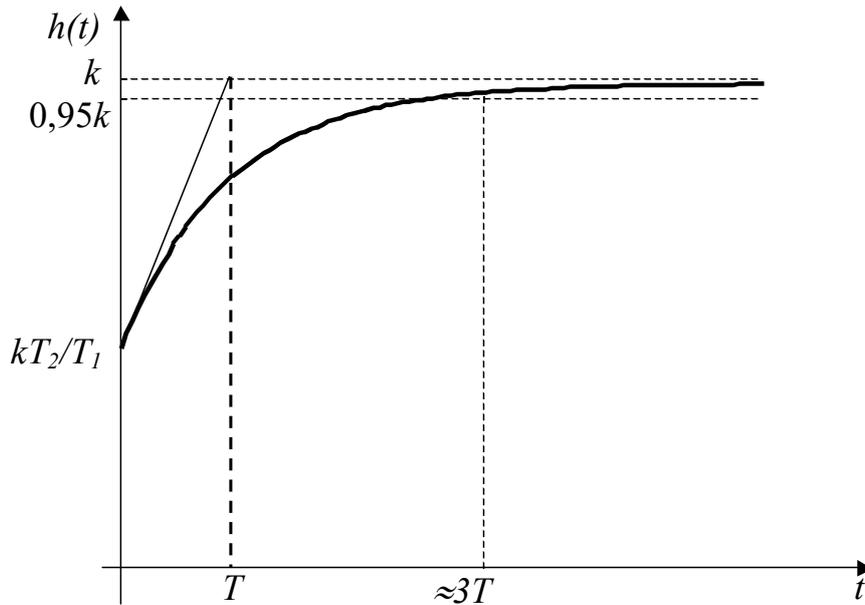


Рис. П.17. Переходная характеристика интегро-дифференцирующего звена (при $T_1 > T_2$)

Амплитудно-частотная характеристика интегро-дифференцирующего звена есть произведение АЧХ форсирующего и апериодического первого порядка звеньев:

$$A(\omega) = \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1} \times \frac{k}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} = k \sqrt{\frac{T_2^2 \omega^2 + 1}{T_1^2 \omega^2 + 1}}.$$

Фазочастотная характеристика есть сумма ФЧХ указанных звеньев:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(T_2 \omega) - \text{arctg}(T_1 \omega).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется выражением:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}.$$

В зависимости от соотношения постоянных времени ЛАЧХ может быть как возрастающей (при $T_1 < T_2$), так и убывающей (при $T_1 > T_2$) функцией. ФЧХ может иметь как максимум (при $T_1 < T_2$), так и минимум (при $T_1 > T_2$). На рис. П.18. приведены логарифмические характеристики звена для случая, когда $T_1 > T_2$.

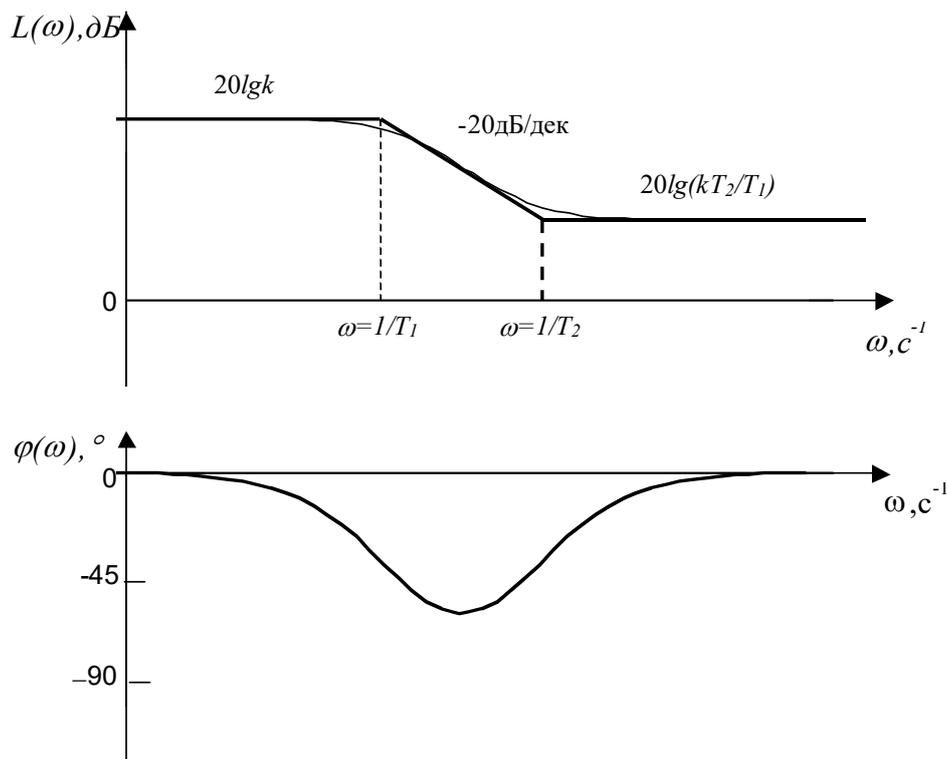


Рис. П.18. Логарифмические частотные характеристики интегро-дифференцирующего звена (при $T_1 > T_2$)

12. Звено запаздывания

– это звено, у которого сигнал на выходе пропорционален сигналу на входе, но отстает от него на время τ :

$$x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}(t - \tau).$$

Таким звеном, например, может быть описан транспортер, перемещающий сыпучий материал, если в качестве входной величины принять положение шибера (заслонки), регулирующего подачу этого материала, а в качестве выходной – сигнал электронных весов, расположенных на некотором расстоянии от зоны загрузки транспортера.

Согласно теореме операционного исчисления о запаздывании оригинала изображение по Лапласу правой части уравнения имеет вид:

$$x_{\text{вх}}(t - \tau) \Rightarrow x_{\text{вх}}(p)e^{-\tau p}.$$

Следовательно, передаточная функция звена:

$$W(p) = \frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = ke^{-\tau p}.$$

Переходная характеристика звена представляет собой ступенчатый сигнал величины k , «сдвинутый» от нулевого момента времени вправо на величину τ .

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau).$$

Частотные характеристики звена можно получить с помощью преобразования:

$$W(j\omega) = ke^{-j\tau\omega} = k(\cos(\tau\omega) - j \sin(\tau\omega)).$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики звена:

$$P(\omega) = k \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -k \sin(\tau\omega).$$

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики:

$$A(\omega) = k, \quad \varphi(\omega) = -\tau\omega.$$

Таким образом, звено характеризуется отрицательным фазовым сдвигом, пропорциональным величине запаздывания τ и частоте ω .

Запаздывание часто появляется в математическом описании многих процессов в результате аппроксимации их динамических характеристик, полученных экспериментальным путем, передаточными функциями низких порядков. Например, динамические характеристики многих тепловых объектов приближенно получают обработкой так называемой *кривой разгона* – экспериментально снятой кривой реакции выходной величины на ступенчатое изменение входной (рис. П.19).

В простейшем случае объект описывают передаточной функцией первого порядка с запаздыванием:

$$W(p) = \frac{\Delta x_{\text{вых}}(p)}{\Delta x_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{Tp + 1} e^{-\tau p}.$$

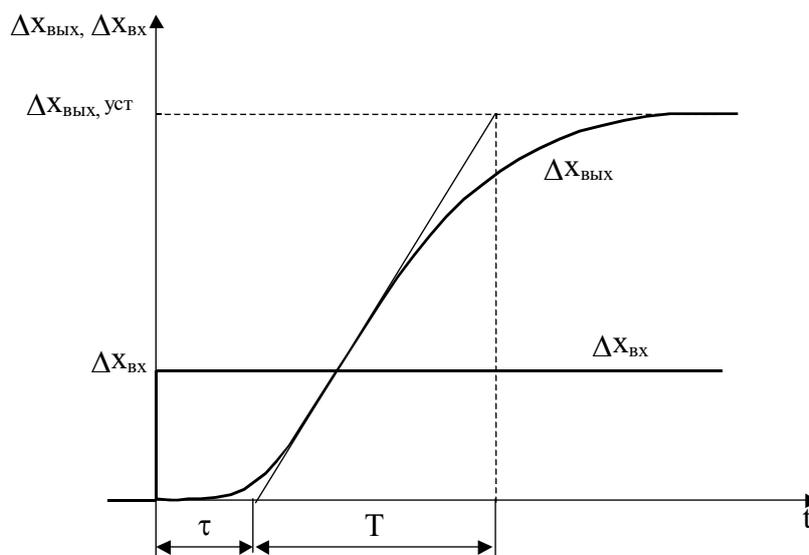


Рис. П.19. Использование запаздывания для аппроксимации разгонных характеристик

Временные параметры передаточной функции τ и T определяют непосредственно по разгонной кривой (рис. 22), а коэффициент передачи рассчитывают как

$$k = \frac{\Delta x_{\text{вых,уст}}}{\Delta x_{\text{вх}}}.$$

Классы пакета Control Matlab TF, SS, ZPK поддерживают запаздывание в составе динамических систем. Один из вариантов описание звена с запаздыванием приведен в следующем примере в следующем примере.

Пример П.1. Построить в Matlab годограф и переходную характеристику колебательного звена

$$W(p) = \frac{2600}{p^2 + 20p + 2600}$$

с запаздыванием на входе $\tau = 0.05$ с.

ПФ звена с запаздыванием на входе записывается в виде:

$$W_k(p) = \frac{2600e^{-0.05p}}{p^2 + 20p + 2600}.$$

Следующий фрагмент программы вводит звено с запаздыванием и строит его переходную характеристику:

```
Wk=tf(2600,[1 20 2600],'InputDelay',0.05)
figure(1)
step(H,Wk),grid
```

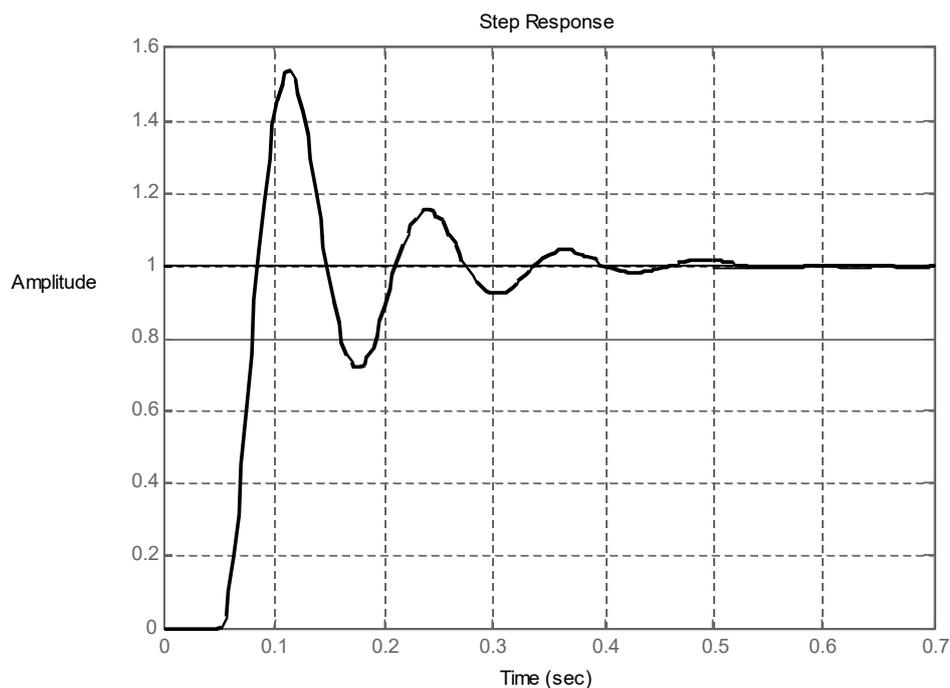


Рис. П.29. Переходная характеристика звена с запаздыванием

Иногда необходимо описать запаздывание дробно-рациональной передаточной функцией. Для этого следует воспользоваться аппроксимацией e^{-pT} с помощью функции `pade`:

$$e^{-pT} = 1 - pT + \frac{1}{2!}(pT)^2 + \dots \approx \frac{\text{num}(p)}{\text{den}(p)} .$$

В программе Matlab функция `pade` подсчитывает Pade аппроксимацию временного запаздывания в виде дробно-рациональной ПФ.

Вызов функции:

```
[num, den] = pade (T, N)
```

Векторы-строки **num** (числитель) и **den** (знаменатель) содержат коэффициенты числителя и знаменателя в порядке уменьшения степеней оператора p . Оба полинома имеют порядок, равный N . Временная задержка обозначена через T .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А.М. Александров и др. Линейные одномерные системы автоматического управления: Учебное пособие по курсу «Теория автоматического управления»/ А.М. Александров, С.И. Губаренко, И.В. Меркурьев – М.: Изд.-во МЭИ, 1998 – 86 с.
2. В.А. Бессекерский. Теория автоматического управления: Учебное пособие/ В.А. Бессекерский, Е.П. Попов. – СПб: Профессия, 2004 – 750 с.
3. А.А. Ерофеев. Теория автоматического управления: Учеб. Рек. Мин. образ. РФ/ А.А. Ерофеев – 2 изд., доп. и перераб. – СПб: Политехника, 2003 – 303 с.
4. Теория автоматического управления: Учебник. Рек. Мин. образ. РФ/ В.И. Брюханов, М.Г. Косов, С.П. Протопопов и др.: Ред. Ю.М. Соломенцев. – 4 изд., стер. М.: Высшая школа, 2003 – 270 с.
5. А.Н. Рыбалев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию. Учебное пособие. Благовещенск, Амурский гос. ун-т, 2004, 145 с.
6. Е.Л. Еремин. Динамические модели и S-моделирование систем. Моногр. АмГУ. Фак. мат. и информ. Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2003, 338 с.,
7. Е.Л. Еремин. Моделирование динамических систем (практикум на языке MATLAB): Учеб. пособие. АмГУ. Фак. мат. и информ. Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2004, 152 с. – для углубленного изучения вопросов моделирования динамических систем.
8. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т.: Учебник. Рек. Минобразования РФ/ Ред. Н.Д. Егупов. М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та, 2000 – для углубленного изучения некоторых направлений теории автоматического управления.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. 4-е изд. Ростов н/Д: изд-во Феникс, 1998. 512 с.

Андрей Николаевич Рыбалев,
заведующий кафедрой АПП и Э АмГУ;

Валентин Иванович Усенко,
доцент кафедры АПП и Э АмГУ;

Владислав Леонидович Русинов,
ассистент кафедры АПП и Э АмГУ.

Теория автоматического управления. Часть 1. Математические основы управления. Учебное пособие.

Изд-во АмГУ. Подписано к печати 15.02.11. Формат 60x84/16. Усл. печ. 11,62.
Тираж 50. Заказ 186.