

*Министерство образования Российской Федерации*  
*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*  
Энергетический факультет

А.Н. Рыбалев

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*ПОСОБИЕ К КУРСОВОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ*

*Учебное пособие*

Благовещенск  
2004

ББК 32.965я73  
Р93

*Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
энергетического факультета  
Амурского государственного  
университета*

А.Н. Рыбалев

Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию. Учебное пособие. Благовещенск, Амурский гос. ун-т, 2004, 145 с.

Предназначено для студентов специальности 210200 и других, изучающих дисциплину «Теория автоматического управления» и выполняющих по данной дисциплине курсовой проект. Может быть использовано также при выполнении других работ, связанных с расчетами и моделированием систем автоматического управления.

*Рецензенты:*

С.Н. Воякин – и.о. зав. кафедрой электропривода, электроники и электрооборудования автомобилей и тракторов ДальГАУ, канд. техн. наук, доцент;

В.И. Усенко – доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники АмГУ, канд. техн. наук.

## ВВЕДЕНИЕ

Пособие включает задание на курсовой проект по курсу «Теория автоматического управления» и краткие теоретические сведения. Проект охватывает следующие темы, изучаемые в данном курсе: математическое описание объектов управления и систем управления; анализ линейных систем, в т. ч. определение устойчивости и построение переходных и частотных характеристик; синтез линейных систем, в т. ч. расчет регуляторов и корректирующих устройств; анализ нелинейных систем управления.

В первой главе представлены расчетные схемы, исходные данные и задание.

Во второй главе кратко излагаются основные понятия теории автоматического управления, описываются структура и состав типовых систем.

Третья глава посвящена математическому описанию линейных объектов и систем управления. Рассматриваются основные формы описания (уравнения в пространстве состояний, передаточные функции) и основные характеристики (переходные и частотные) линейных систем. Представляются также элементарные составляющие математического описания и их свойства, методы построения описания систем в целом.

В четвертой главе рассматриваются вопросы анализа линейных систем автоматического регулирования. Даются определения показателей качества систем в стационарных статическом и динамическом режимах. Приводятся понятие и критерии устойчивости линейных систем. Описываются прямые и косвенные показатели качества переходных процессов.

Пятая глава посвящена синтезу линейных систем. Кратко рассматриваются постановка задачи синтеза и типовые законы регулирования. Приводятся методы расчета типовых регуляторов на заданные частотный и корневой показатели колебательности, а также метод расчета корректирующих устройств по логарифмическим частотным характеристикам.

В шестой главе обсуждаются некоторые проблемы анализа нелинейных систем. Рассматриваются вопросы реализации и моделирования систем с ограничением внутренних координат, особенности динамики релейных систем. Описывается метод гармонической линеаризации, предназначенный для исследования автоколебаний в нелинейных системах.

Седьмая глава – применение программы Matlab для анализа и синтеза систем автоматического управления. Рассматриваются возможности системы по моделированию систем и исследованию моделей. Приведены методы синтеза систем, ориентированные на численное решение.

# 1. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

## 1.1. Расчетные схемы системы автоматического регулирования

Курсовой проект формируется из трех частей. В первых двух рассматривается система непрерывного автоматического регулирования угла поворота исполнительного вала электропривода с двигателем постоянного тока и преобразователем напряжения (рис.1). Система обеспечивает отработку заданного угла поворота (задача слежения) и стабилизацию угла при нагрузках двигателя вплоть до номинального момента. Элементы схемы описаны ниже.

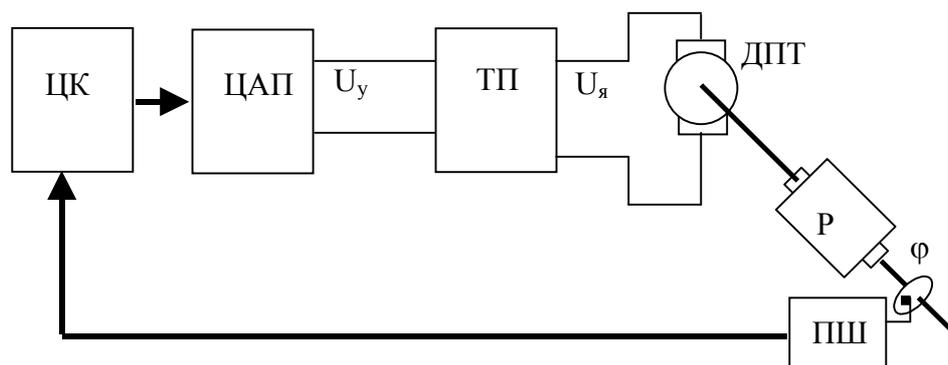


Рис. 1. Схема непрерывной следящей системы.

ДПТ – двигатель постоянного тока с независимым возбуждением серии 2П. Параметры двигателя для всех вариантов приведены в табл.1 [6]. Суммарный приведенный к валу момент инерции принимается равным 120% от момента инерции вала двигателя. Благодаря применению независимой вентиляции, возможно нахождение машины под номинальным током при нулевой скорости вращения якоря.

ТП – тиристорный преобразователь (управляемый выпрямитель). Построен на базе двух трехфазных выпрямительных тиристорных мостов. Обеспечивает работу двигателя в четырех квадрантах (двигательный и генераторный режимы работы машины с вращением в обоих направлениях). Максимальное выпрямленное напряжение 514 В. Допускает внешнее задание выходного напряжения аналоговым сигналом  $-10...+10$  В. Имеет выходной индуктивно-емкостный фильтр. Описывается дифференциальным уравнением первого порядка (апериодическое звено). Постоянная времени определяется вариантом (см. табл.1). Коэффициент передачи определяется исходя из линейности регулировочной характеристики.

Р – редуктор. Передаточное число рассчитывается исходя из того, что при номинальной скорости двигателя максимальный угол поворота ( $320^\circ$ ) выходного вала  $\varphi_{\max}$  должен быть отработан за заданное время, определяемое вариантом.

ПШ – поворотный шифратор – высокоточный датчик абсолютного значения угла поворота выходного вала. Выдает цифровой сигнал.

ЦК – цифровой контроллер. Принимает сигнал датчика поворота и формирует через ЦАП сигнал управления тиристорным преобразователем. Обладает высокой производительностью и может очень точно реализовать любые законы регулирования. Допускает локальное задание угла поворота оператором и внешнее задание через промышленную сеть.

ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь. Преобразует цифровой сигнал контроллера в сигнал напряжения постоянного тока от  $-10$  до  $+10$ В.

Тактовые частоты и разрядность ЦК и ЦАП таковы, что сигнал  $U_y$  можно считать непрерывным.

В третьей части рассматриваются два варианта нелинейных систем: сначала та же техническая система, но уже с учетом всех ограничений, присущих ее элементам, далее – релейная система автоматического регулирования (рис. 2).

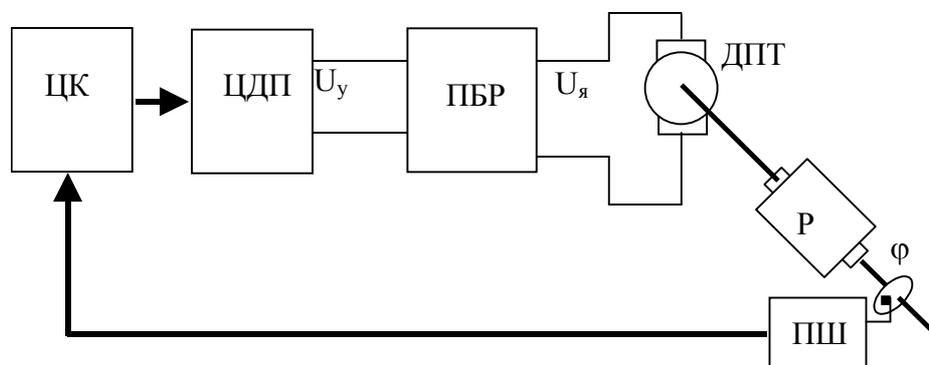


Рис. 2. Схема релейной следящей системы.

На рис. 2. присутствуют следующие обозначения:

ЦАП – цифро-дискретный преобразователь, преобразует выходные коды ЦК (включения, выключения, реверса) в сигнал управления электронным пускателем ПБР;

ПБР – пускатель бесконтактный реверсивный, служит для коммутации питания ДПТ. Уровни выходного напряжения  $-220, 0, +220$  В.

Исходные данные для расчета приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Исходные данные к курсовому проекту по вариантам

№ вар.	Мощность, КВт	Номинальная частота вращения, об/мин	Сопротивление обмотки при 15° С, Ом		Индуктивность якоря, мГн	Момент инерции ротора, кг×м <sup>2</sup>	Постоянная времени ТП, сек.	Время полного поворота, сек.
			якоря	добавочных полюсов				
1	2	3	4	5	6	6	7	8
Тип 2ПБ100МУХЛ4, 2ПБ100МГУХЛ4								
1	0,26	800	12,76	8,35	461	0,011	0,02	20
2	0,37	1000	8,49	5,14	313		0,08	12
3	0,6	1600	4,38	2,62	150		0,06	11

1								
4	0,85	2360	1,99	1,22	78		0,09	30
5	1,2	3150	1,325	0,7	45		0,04	15
Тип 2ПБ112МУХЛ4, 2ПБ112МГУХЛ4								
6	0,34	750	8,72	7,07	106	0,015	0,06	40
7	0,45	1060	5,07	4,5	66		0,09	35
8	0,75	1500	2,48	2,13	31		0,07	22
9	1,1	2200	1,29	1,12	16		0,10	25
10	1,4	3000	0,788	0,682	11		0,09	15
Тип 2ПФ132МУХЛ4, 2ПФ132МГУХЛ4								
11	2	750	1,693	1,26	33	0,038	0,11	40
12	3	1060	0,906	0,692	18,5		0,10	24
13	4	1500	0,472	0,308	9,7		0,12	16
14	6	2360	0,226	0,166	1,6		0,09	36
15	7,5	3000	0,14	0,094	2,85		0,13	22
Тип 2ПФ132ЛУХЛ4, 2ПФ132ЛГУХЛ4								
16	2,8	750	1,08	0,915	23	0,048	0,12	28
17	4,2	1000	0,67	0,445	14		0,14	34
18	5,5	1600	0,269	0,22	5,7		0,11	18
19	7,5	2120	0,167	0,124	3,5		0,15	15
20	11	3000	0,08	0,066	1,8		0,14	10
Тип 2ПФ160МУХЛ4, 2ПФ160МГУХЛ4								
21	4,2	750	0,516	0,407	14	0,083	0,08	22
22	6	1000	0,326	0,208	9		0,09	18
23	7,5	1500	0,145	0,101	4		0,11	10
24	13	2240	0,081	0,056	2,2		0,10	12
25	16	3150	0,037	0,024	0,99		0,15	9
Тип 2ПФ160ЛУХЛ4, 2ПФ160ЛГУХЛ4								
26	5,6	800	0,328	0,227	10,5	0,1	0,07	16
27	8	1000	0,216	0,175	7		0,13	18
28	11	1500	0,096	0,073	3,1		0,12	10
29	16	2360	0,044	0,031	1,4		0,10	8
30	18,5	3150	0,024	0,017	0,78		0,16	5
Тип 2ПФ180МУХЛ4, 2ПФ180МГУХЛ4								
31	9	750	0,286	0,206	22	0,2	0,15	24
32	12	1060	0,15	0,092	4,9		0,14	25
33	15	1500	0,084	0,056	2,7		0,09	16
34	26	3150	0,022	0,015	0,68		0,16	8
Тип 2ПФ180ЛУХЛ4, 2ПФ180ЛГУХЛ4								
35	10	750	0,203	0,145	7,3	0,23	0,10	18
36	14	1000	0,136	0,084	4,4		0,13	24
37	18,5	1500	0,065	0,044	2,2		0,11	14
38	25	2120	0,042	0,03	0,81		0,17	12
Тип 2ПФ200МУХЛ4, 2ПФ200МГУХЛ4								
39	22	1600	0,047	0,029	1,6	0,25	0,14	10
Тип 2ПФ200ЛУХЛ4, 2ПФ200ЛГУХЛ4								
40	15	750	0,125	0,08	4,6	0,3	0,13	18
41	20	1000	0,083	0,053	3,2		0,12	18
42	30	1500	0,031	0,02	1,2		0,15	8

Номинальное напряжение питания двигателя для всех вариантов 220 В.

## 1.2. Задание

### 1.2.1. Математическое описание линейной системы и ее анализ

1. Построить модель системы в пространстве состояний, принимая в качестве входных величин заданный угол поворота выходного вала  $\varphi_{\text{зад}}$  (задание) и приведенный к валу двигателя момент сил сопротивления нагрузки (возмущение). Выходная величина – действительный угол поворота выходного вала  $\varphi$ .

Переменными состояний будут напряжение якоря ДПТ, ток якоря, угловая скорость двигателя и угол  $\varphi$ .

При построении модели считать напряжение управления преобразователем  $U_y$  пропорциональным ошибке регулирования:

$$U_y = k_p e = k_p (\varphi_{\text{зад}} - \varphi), \quad (1)$$

где  $k_p$  – неизвестный пока коэффициент передачи пропорционального регулятора.

Для определения коэффициента  $K_e$  двигателя (см. 3.1) следует рассмотреть естественную механическую характеристику машины (зависимость скорости от момента при номинальном напряжении питания в установившемся режиме). Эту характеристику можно получить из уравнений динамики двигателя, приведенных в 3.1, если в них принять все производные равными нулю. Коэффициент  $K_e$  определяется исходя из того, что при номинальном моменте  $M_n$  двигатель должен развивать номинальную угловую скорость  $\omega_n$ . Номинальная скорость и номинальный момент устанавливаются через номинальные частоту вращения и номинальную мощность двигателя, приведенные в табл.1. При этом

$$M_n [\text{Н}\cdot\text{м}] = P_n [\text{Вт}] / \omega_n [\text{рад/с}]. \quad (2)$$

2. По уравнениям в пространстве состояний получить передаточную матрицу системы, состоящую из передаточных функций по заданию и возмущению.

3. Получить передаточные функции элементов системы – преобразователя, двигателя, редуктора. Построить структурную схему замкнутой системы с единичной обратной связью и регулятором.

Следует учесть, что ДПТ описывается двумя передаточными функциями: по каналу напряжение якоря – скорость, по каналу момент сопротивления – скорость.

Напряжение управления преобразователем формируется согласно (1).

4. По структурной схеме путем необходимых преобразований (см. 3.5.2) определить передаточные функции системы по заданию и возмущению.

5. Построить АФЧХ разомкнутой системы при  $k_p = 1$ , по которой определить критический коэффициент  $k_{p,кp}$ , соответствующий нахождению системы на границе устойчивости (см. 4.2.2).

6. Определить влияние коэффициента  $k_p$  на следующие показатели системы:

статическая ошибка при возмущении номинальным моментом нагрузки двигателя (см. 4.1.2);

ошибка по задающему воздействию, изменяющемуся со скоростью 1 град/сек (см. 4.1.3);

прямые показатели качества переходных процессов (время регулирования и перерегулирование, см. 4.2.3);

корневые показатели качества (степень устойчивости и показатель колебательности, см. 4.2.3);

частотные показатели качества (запасы устойчивости по фазе и амплитуде, частотный показатель колебательности, резонансная частота и частота среза, см. 4.2.3).

Построить соответствующие графики при изменении коэффициента передачи регулятора от  $k_p \rightarrow 0$  до  $k_p = k_{p,кр}$ .

7. Построить корневой годограф замкнутой системы в том же диапазоне изменения  $k_p$ . На годографе отметить расчетные точки (см. 4.2.4).

8. При фиксированных значениях коэффициента регулятора, соответствующих запасам устойчивости по амплитуде 0,2; 0,4; 0,6; 0,8, рассчитать и построить статическую характеристику системы по нагрузке (зависимость ошибки регулирования от приведенного момента сопротивления на валу). Максимальный момент сопротивления принять равным номинальному моменту двигателя.

9. При фиксированных значениях коэффициента регулятора, соответствующих запасам устойчивости по амплитуде 0,2; 0,4; 0,6; 0,8, рассчитать и построить переходные характеристики по заданию и возмущению и определить их показатели (время регулирования и перерегулирование).

### **1.2.2. Синтез линейной системы**

В общем случае к синтезируемой системе предъявляются следующие требования:

статическая ошибка по возмущению номинальным моментом нагрузки не более 1 угл. мин;

ошибка по задающему воздействию, изменяющемуся со скоростью 1 град/сек, не более 1 угл. мин;

время регулирования – не более 150% от времени процесса с П-регулятором, для которого перерегулирование составляет 20-30%;

перерегулирование не более 30%.

Синтез системы предполагает расчет параметров настройки типового ПИД-регулятора различными методами, и определение структуры и параметров корректирующего устройства по ЛАЧХ.

Требуется:

1. Определить коэффициент передачи П-регулятора, обеспечивающий выполнение требований к точности системы в стационарных режимах. Проверить устойчивость системы при этих значениях коэффициента.

2. Рассчитать настройки ПИД-регулятора, применение которого гарантирует отсутствие статической ошибки по возмущению и ошибки по задаю-

щему воздействию, изменяющемуся с постоянной скоростью (см. 4.1.2, 4.1.3). Дополнительно к перечисленным требованиям настройки регулятора должны обеспечивать максимальное подавление низкочастотных возмущений (см. 5.2.2).

Метод расчета регулятора выбирается в зависимости от варианта: на заданное значение частотного показателя колебательности (см. 5.2.3);

на заданное значение корневого показателя колебательности (см. 5.2.4).

В качестве ориентира можно принять:

по первому методу: значение частотного показателя колебательности 1,2, диапазон постоянных времени изодрома 0,3...0,7;

по второму методу: значение корневого показателя колебательности 0,3, диапазон расчетных частот 0,5 ... 5.

Возможно, в ходе выполнения задания возникнет необходимость в пересчетах, что естественно для задач синтеза.

Рассчитать и построить переходные характеристики системы с рассчитанным регулятором по задающему воздействию и возмущению.

3. С помощью логарифмических амплитудно-частотных характеристик рассчитать статическое (без интегрирующих звеньев) последовательное корректирующее устройство (см. 5.3).

Рассчитать и построить переходные характеристики скорректированной системы по задающему воздействию и возмущению.

4\*. Рассчитать настройки ПИД-регулятора на заданный частотный показатель колебательности для системы в случае, когда тиристорный преобразователь характеризуется запаздыванием  $\tau = 0,02$  сек.

5\*. Рассчитать настройки ПИД-регулятора на заданный частотный показатель колебательности численным методом (см. 7.3.2).

6\*. Вывести уравнения настроек ПИД-регулятора на заданный корневой показатель колебательности (см. 5.2.4).

7\*. Рассчитать корректирующее устройство методом динамической компенсации и упростить его оптимизационным методом в Matlab (см. 7.3.4).

8\*. Определить настройки ПИД-регулятора на заданное быстродействие и перерегулирование в Simulink с помощью блок-схемы NCD (см. 7.4.2).

*\*Примечание:* отмеченные пункты задания необязательны и вводятся преподавателем по его усмотрению.

### ***1.2.3. Анализ нелинейной САР***

1. Построить Simulink-модель рассчитанной системы с ПИД-регулятором или корректирующим устройством, с учетом ограничений по максимальному уровню сигнала управления тиристорным преобразователем и по току двигателя (трехкратный от номинального).

Ограничение по току двигателя реализовать с помощью «отсечки» (см. 6.2). Параметры «отсечки» выбрать экспериментально.

С помощью построенной модели исследовать переходные процессы в системе. Определить максимальное рассогласование, при котором система ведет себя как линейная. Показать работу всех ограничений при больших рассогласованиях. Определить влияние рассогласования на показатели качества переходных процессов (быстродействие и перерегулирование) и построить соответствующие графики.

2. Построить Simulink-модель релейной следящей системы (рис. 2).

ЦК, ЦДП и ПБР в данной системе совместно реализуют функцию идеального трехпозиционного реле.

3. С помощью метода гармонической линеаризации (см. 6.4) определить влияние зоны нечувствительности реле на качество процессов в системе (отсутствие или наличие автоколебаний и их параметры – частоту и амплитуду). Построить соответствующие графики. Проверить достоверность результатов расчетов моделированием.

Определить предельную зону нечувствительности, при которой автоколебания отсутствуют. Определить для нее максимальную ошибку слежения и исследовать процессы в системе при наличии возмущения. Определить влияние момента нагрузки двигателя на амплитуду и частоту колебаний. Построить соответствующие графики.

4. Ввести в релейную систему ограничение тока двигателя с помощью «отсечки», параметры которой подобрать экспериментально. Исследовать влияние ограничения на показатели качества переходных процессов при различных рассогласованиях. Построить соответствующие графики.

5\*. Построить двухконтурную систему непрерывного регулирования с внутренним токовым контуром и ограничением сигнала задания этому контуру (см. 6.2). Рассчитать настройки регуляторов тока и угла поворота. Построить и исследовать Simulink-модель.

6\*. Выполнить пункт 3 для реального двухпозиционного реле с зоной неоднозначности, равной 20% от зоны нечувствительности.

*\*Примечание:* отмеченные пункты задания являются необязательными и вводятся преподавателем по его усмотрению.

## 2. УПРАВЛЕНИЕ И РЕГУЛИРОВАНИЕ

### 2.1. Основные понятия

Управление каким либо объектом – это процесс воздействия на него с целью обеспечения требуемого течения процессов в объекте или требуемого изменения его состояния. Основой управления является переработка информации о состоянии объекта в соответствии с целью управления. Управление, осуществляемое без участия человека, называется *автоматическим управлением*. Техническое устройство, с помощью которого осуществляется автоматическое управление объектом, называется *управляющим устройством*. Совокупность объекта управления и управляющего устройства образует *систему автоматического управления (САУ)*.

Для управления любым объектом, а также для построения системы автоматического управления необходимо знать *математическую модель объекта* и *цель управления*. Математическая модель объекта показывает, как можно управлять объектом, а цель управления – как (или для чего) нужно им управлять.

В общем случае объект управления представляется в следующем виде (рис. 3).

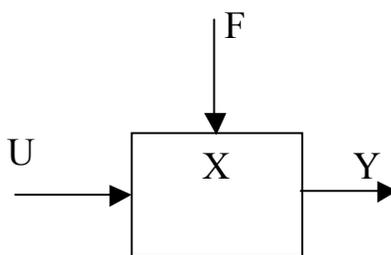


Рис. 3. К определению математического описания объекта управления

На рис. 3:

$X$  – вектор переменных, характеризующих состояние объекта;

$U$  – вектор управляющих воздействий, оказываемых на объект управляющим устройством;

$F$  – вектор возмущающих воздействий, оказываемых на объект внешней средой (другими системами);

$Y$  – вектор выходных (или измеряемых) переменных объекта.

Математическая модель объекта связывает между собой векторы  $X$ ,  $U$ ,  $F$ ,  $Y$ , т.е. показывает, как состояние объекта зависит от управляющих и возмущающих воздействий и как это отражается на измеряемых переменных объекта.

Теория автоматического управления в основном имеет дело с *динамическими объектами*, т.е. такими, состояние которых не только зависит от

входных воздействий, но и является функцией времени. Это обусловлено, прежде всего, *инерционностью* объектов, связанной с их способностью накапливать энергию или вещество. Именно инерционность объектов создает основную трудность при построении системы управления, так как объекты реагируют на изменение управляющих воздействий не мгновенно, а с некоторой задержкой. С другой стороны, инерционность объектов является благоприятным фактором, поскольку препятствует быстрой реакции объектов на возмущающие воздействия. Это позволяет управляющему устройству скорректировать свое поведение и нейтрализовать действие возмущения прежде, чем оно вызовет значительное отклонение состояния объекта от желаемого.

Динамические объекты, как показано в следующей главе, описываются дифференциальными уравнениями и передаточными функциями.

Цель управления – это информация, с помощью которой можно определить желаемое состояние объекта в каждый момент времени. В общем случае цель управления формируется в виде определенного значения  $J^*$  некоторого функционала  $J$ , который называется критерием управления:

$$J = J(X, U, F). \quad (3)$$

Таким образом, цель управления можно представить как  $J = J^*$ .

На практике достичь точного выполнения цели управления чаще всего не удается и достаточно, чтобы модуль разности между достигнутым значением критерия  $J$  и желаемым  $J^*$  не превышал некоторой величины  $\delta$ :

$$|J - J^*| = |\Delta J| \leq \delta. \quad (4)$$

Величина  $\Delta J$  при этом характеризует качество управления.

В так называемых системах оптимального управления цель управления состоит в поиске максимума или минимума критерия, который в данном случае представляет собой критерий оптимальности. Таким образом, в оптимальных системах цель управления можно сформулировать как

$$J = J(X, U, F) \rightarrow \max(\min). \quad (5)$$

Зная цель управления и математическую модель объекта, можно решить *задачу управления*: найти и реализовать такие управляющие воздействия, чтобы обеспечивалось выполнение цели управления.

В системах автоматического управления управляющие воздействия формируются управляющим устройством, которое реализует так называемый *закон управления* – зависимость вида:

$$U = U(t, Y, F). \quad (6)$$

Таким образом, в общем случае управление формируется в функции времени, выходных переменных объекта и, возможно, возмущений, если последние измеряются.

Управление в функции времени подразумевает не только непосредственную зависимость управляющего воздействия от времени (управление по

программе), но и динамическую природу самого управляющего устройства. При этом в отличие от объекта динамические свойства управляющего устройства формируются «сознательно», с целью придания всей системе управления желаемых динамических свойств.

То, что управление осуществляется также в функции выходных (измеряемых) переменных объекта, является принципиально важным фактом. Большинство САУ являются *замкнутыми системами*, в которых «прямое» воздействие управляющего устройства на объект сопровождается «обратным» воздействием объекта на управляющее устройство. Это позволяет управляющему устройству получать информацию о текущем состоянии объекта, предсказывать его изменение, оценивать результаты управления и корректировать собственное поведение. Управление в функции выходных переменных объекта реализуется с помощью *обратных связей*, которые практически представляют собой измерительные преобразователи (датчики) и каналы передачи данных.

Формирование управления в функции возмущающих воздействий позволяет эффективно им противодействовать. При этом, если возмущения доступны для измерения, в ряде случаев теоретически возможно построить систему, вообще нечувствительную к ним.

Регулирование – частный случай управления, цель которого – поддержание заданного состояния объекта или его изменение в соответствии с заданием. Важно то, что в данном случае вектор желаемого состояния объекта в каждый момент времени известен. На практике желаемое состояние объекта вычисляется системами более высокого уровня или человеком. Системы автоматического регулирования (САР) находятся на самом нижнем уровне автоматизации производства.

Критерий регулирования можно записать в следующем виде:

$$J = e(t) = X^*(t) - X(t) \rightarrow \min, \quad (7)$$

где  $X^*(t)$  – вектор желаемого (заданного) состояния объекта;  $e(t)$  – так называемая *ошибка регулирования*.

Следовательно, цель регулирования состоит в минимизации ошибки регулирования, т.е. разницы между заданным и текущим состояниями объекта, в любой момент времени.

Системы автоматического регулирования разделяют на несколько классов по виду изменения задания.

В системах стабилизации заданное состояние объекта неизменно. Задача системы – поддержать это состояние, противодействуя возмущающим воздействиям, стремящимся его изменить. Системы стабилизации работают обычно в узком диапазоне изменения переменных объекта, что позволяет использовать для его описания простые модели.

В системах воспроизведения задание изменяется во времени. Задача системы – насколько это возможно, более быстрое и точное воспроизведение объектом заданного состояния. Системы воспроизведения делятся на *программные*, в которых заранее известна программа изменения переменных объ-

екта, и *следящие*, в которых эта программа неизвестна. Следящие системы являются наиболее сложными для проектирования, так как в данном случае математическое описание объекта должно быть адекватным во всем диапазоне изменения переменных, что во многих случаях требует применения сложных моделей.

## 2.2. Структура систем автоматического регулирования

Для наглядного представления системы автоматического регулирования как совокупности элементов и связей между ними используются структурные схемы. Под структурой системы понимают совокупность образующих ее частей, на которые система разделяется по тем или иным признакам, и связей между ними. Графическое изображение структуры называют структурной схемой.

В технике распространены три вида структурных схем:

- 1) *конструктивные*;
- 2) *функциональные*;
- 3) *алгоритмические*.

Составная часть конструктивной схемы – конструктивный блок, т.е. объединение ряда элементов в конструктивное целое.

Допустим, рассматривается система регулирования давления воды в трубопроводе на насосной станции (рис. 4).

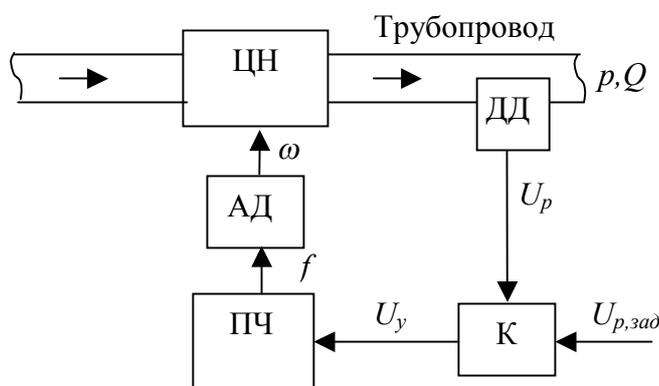


Рис. 4. Конструктивная схема САР.

Объектом регулирования являются трубопровод и подключенные к нему потребители воды. Регулируемая величина – давление в трубопроводе  $p$ . На объект оказывается возмущение в виде изменения расхода (потребления) воды  $Q$ , которое сказывается на давлении. При увеличении расхода давление падает и наоборот. Цель регулирования состоит в стабилизации давления для снижения числа аварий на трубопроводах и качественного водоснабжения потребителей.

Регулируют давление путем изменения производительности центробежного насоса ЦН, приводимого в движение асинхронным двигателем АД. Изменение угловой скорости вращения  $\omega$  двигателя осуществляется с помощью преобразователя частоты ПЧ, выходная частота которого  $f$  пропорцио-

нальна входному управляющему сигналу  $U_y$ . Этот сигнал формируется контроллером К в функции ошибки регулирования, т.е. разности между заданием по давлению  $U_{p,зад}$  и выходным сигналом  $U_p$  датчика давления ДД, пропорциональным действительному давлению в трубопроводе.

В функциональной схеме в блоки объединяются элементы, участвующие в выполнении определенной единой функции (сравнение, измерение, усиление, коррекция и т.п.). Таким образом, функциональная схема показывает, из каких функциональных элементов состоит САУ и как эти элементы связаны друг с другом.

На рис. 5 изображена функциональная схема типичной САУ, которая подходит и для рассмотренной выше системы.

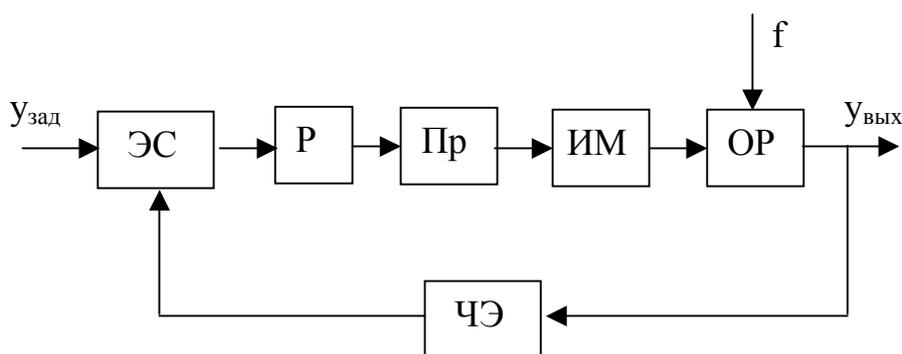


Рис. 5. Функциональная схема САУ.

На рис. 5 используются следующие обозначения.

ОР – объект регулирования, его состояние характеризуется выходной величиной  $u_{вых}$ ;

ИМ – исполнительный механизм – техническое устройство, предназначено для непосредственного воздействия на объект; в нашем случае в качестве исполнительного механизма применяется центробежный насос, включая и приводящий его в движение асинхронный двигатель;

Пр – преобразователь, служит для управления исполнительным механизмом, его функцию в рассмотренной САУ выполняет, очевидно, преобразователь частоты;

ЧЭ – чувствительный элемент, измерительное устройство, состоящее из первичного (датчика) и вторичного измерительных преобразователей, служащих для измерения выходной величины объекта; в нашем случае чувствительным элементом является датчик давления;

ЭС – элемент сравнения, сравнивает сигнал задания  $u_{зад}$  с сигналом чувствительного элемента и выдает сигнал разности между ними;

Р – регулятор, предназначен для формирования сигнала управления преобразователем.

Функции элемента сравнения и регулятора выполняет контроллер.

Частью алгоритмических структурных схем (или просто структурных схем) являются динамические звенья с выполняемыми ими математическими преобразованиями (рис. 6). Структурная схема составляется по уравнениям

звеньев системы, и по ней могут быть восстановлены уравнения всей САР. На структурной схеме звенья изображаются прямоугольниками; воздействия на них – подходящими к одной из сторон прямоугольника (входу) стрелками; выходные величины – стрелками, отходящими от противоположной стороны прямоугольника (выхода). Звену ставится в соответствие оператор преобразования входной величины в выходную (на рис.6 в качестве операторов используются *передаточные функции* звеньев, см. 3.2).

Сумматоры сигналов изображаются кружками, разделенными на секторы, слагаемые – стрелками, подходящими к секторам, сумма – стрелкой, отходящей от одного из секторов. Отрицательные слагаемые отмечаются или знаком минус у острия стрелки, или зачернением сектора, к которому подходит стрелка.

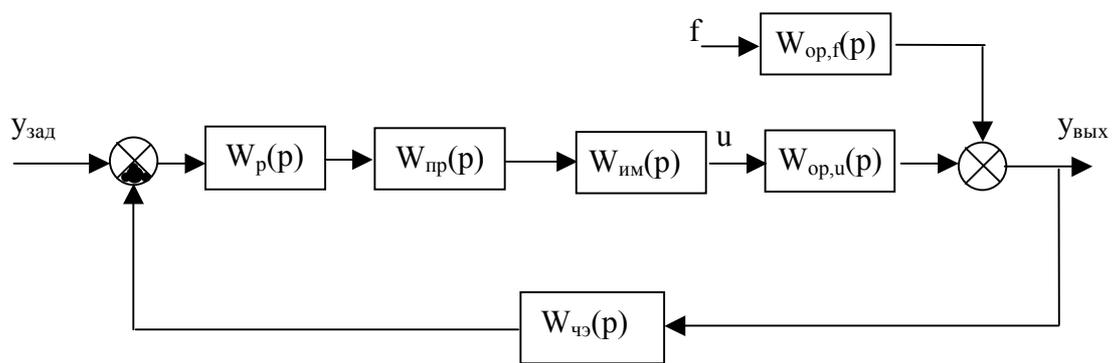


Рис. 6. Алгоритмическая схема САР.

Алгоритмическая схема может походить на функциональную. Но иногда для упрощения математических преобразований при исследовании ее изменяют, и внешнее сходство с функциональной схемой утрачивается.

### 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

#### 3.1. Уравнения в пространстве состояний

Любой объект (система) описывается в пространстве состояний уравнениями вида:

$$\dot{X} = F_1(X, U), \quad (8)$$

$$Y = F_2(X, U), \quad (9)$$

где  $X$  – вектор независимых координат объекта (системы), однозначно описывающих его (ее) состояние (вектор переменных состояния);  $Y$  – вектор выходных (измеряемых) величин;  $U$  – вектор входных воздействий. В общем случае вектор  $U$  может включать как управляющие (задающие), так и возмущающие воздействия, однако часто возмущения «выносятся» в отдельный вектор.

Для линейных объектов и систем уравнения (8,9) принимают вид:

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (10)$$

$$Y = CX + DU, \quad (11)$$

где  $A$  – квадратная матрица состояний;  $B$  – матрица управления;  $C$  – матрица выхода;  $D$  – так называемая матрица «прямого обхода» (управление  $U$  как бы «в обход» внутренних состояний непосредственно действует на выход  $Y$ ). Для реальных объектов и систем практически всегда  $D = 0$ .

Размеры матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  определяются размерностями векторов состояния, управления и выхода. Если  $X \in R^n$ ,  $U \in R^m$ ,  $Y \in R^\ell$ , то матрицы имеют следующие размеры:  $A - [n \times n]$ ,  $B - [n \times m]$ ,  $C - [\ell \times n]$ ,  $D - [\ell \times m]$ .

В качестве примера описания линейного объекта в пространстве состояний рассмотрим двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, регулируемый путем изменения напряжения якоря.

Ток якоря  $i$  и угловая скорость двигателя  $\omega$  измеряются датчиками, выходные сигналы которых прямо пропорциональны измеряемым величинам:

$$u_i = k_i i, \quad (12)$$

$$u_\omega = k_\omega \omega. \quad (13)$$

Нагрузка двигателя характеризуется моментом сил статического сопротивления  $M_c$  и суммарным приведенным моментом инерции  $J$ .

Уравнение электрического равновесия якорной цепи двигателя имеет вид:

$$u_{\text{я}} = L \frac{di}{dt} + Ri + C_e \Phi \omega = L \frac{di}{dt} + Ri + K_e \omega, \quad (14)$$

где  $L$ ,  $R$  – индуктивность и активное сопротивление якоря;  $\Phi$  – магнитный поток, создаваемый обмоткой возбуждения двигателя, который в нашем случае является постоянным;  $C_e$  – конструктивный коэффициент машины.

Уравнение механического равновесия моментов на валу двигателя:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}(M - M_c) = \frac{1}{J}(C_e \Phi i - M_c) = \frac{1}{J}(K_e i - M_c), \quad (15)$$

где  $M$  – электромагнитный момент двигателя.

Анализ уравнений (14), (15) показывает, что в совокупности они описывают поведение двух непрерывно изменяющихся величин: тока якоря  $i$  и угловой скорости двигателя  $\omega$ . Эти величины и примем в качестве переменных состояния:

$$X = \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Управление двигателем осуществляется путем изменения напряжения, приложенного к якорю, в качестве возмущения примем момент сопротивления на валу, поэтому вектор входных величин

$$U = \begin{pmatrix} u_y \\ M_c \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Выходными (измеряемыми) величинами являются выходные напряжения датчиков тока и скорости:

$$Y = \begin{pmatrix} u_i \\ u_\omega \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Преобразуем уравнения (14), (15) к виду:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{K_e}{L}\omega + \frac{1}{L}u_y, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{K_e}{J}i - \frac{1}{J}M_c. \end{cases} \quad (19)$$

В матричной форме система (19) представляется

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_e}{J} & 0 \end{pmatrix} \times X + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix} \cdot U. \quad (20)$$

Уравнение выхода:

$$Y = \begin{pmatrix} k_i & 0 \\ 0 & k_\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}, \quad D = 0. \quad (21)$$

По уравнениям (20), (21) составим структурную схему системы в пространстве состояний (рис. 7).

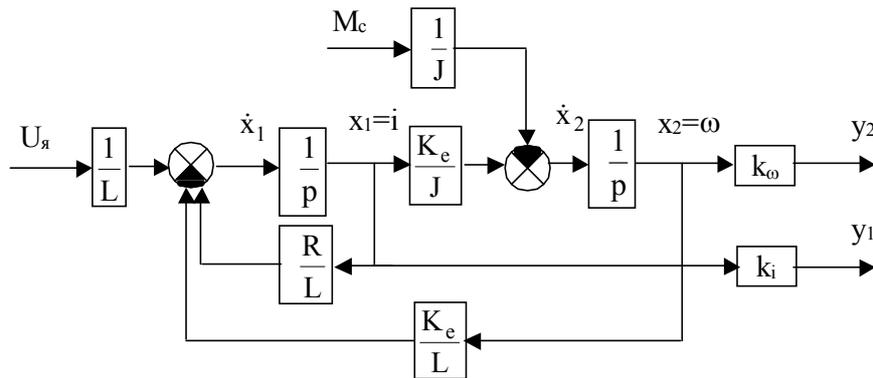


Рис. 7. Схема модели ДПТ.

Структурные схемы, подобные приведенной на рис. 7, строятся следующим образом. Сначала по числу переменных состояния системы выставляются блоки интегрирования (*интеграторы*), условно обозначенные на рис. 7 дробями  $1/p$ . Смысл данного обозначения будет понятен ниже. В общем случае рекомендуется располагать интеграторы вертикально один под другим, однако часто структура модели такова, что интеграторы располагаются «последовательно», как на рис. 7. На выходе каждого интегратора формируется соответствующая переменная состояния, а на входе – ее производная. Производные переменных состояний определяются правыми частями уравнений состояний, которые, в свою очередь, представляют суммы сигналов. Поэтому перед интеграторами обычно ставятся сумматоры. На эти сумматоры через соответствующие блоки коэффициентов подаются входные сигналы и сигналы состояния (обратные связи). Для формирования выходных сигналов системы также используются блоки коэффициентов.

### 3.2. Передаточные функции

Передаточной функцией звена или системы называют отношение изображения по Лапласу выходной переменной к изображению по Лапласу входной переменной при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(p)}{x_{\text{ВХ}}(p)} \quad (22)$$

при

$$x_{\text{ВЫХ}}(0) = \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt}(0) = \frac{d^2x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2}(0) = \dots = \frac{d^{n-1}x_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}}(0) = 0, \quad (23)$$

где  $n$  – порядок дифференциального уравнения, описывающего звено или систему;  $p$  – оператор Лапласа.

Как известно [1], изображение по Лапласу функции  $f(t)$  находят по формуле:

$$f(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (24)$$

Обратное преобразование вычисляется следующим образом:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} f(p)e^{pt} dp. \quad (25)$$

Зная передаточную функцию звена (системы) и входное воздействие  $x_{\text{вх}}(t)$ , можно определить его (ее) реакцию на это воздействие при нулевых начальных условиях. Для этого нужно, предварительно рассчитав по (24) изображение входной величины  $x_{\text{вх}}(p)$ , определить изображение выходной величины

$$x_{\text{вых}}(p) = x_{\text{вх}}(p)W(p) \quad (26)$$

и далее с помощью обратного преобразования (25) вычислить  $x_{\text{вых}}(t)$ .

Линейные звенья и системы автоматического регулирования описываются дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x_{\text{вых}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{\text{вых}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + a_0 x_{\text{вых}} = \\ = b_m \frac{d^m x_{\text{вх}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_{\text{вх}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + b_0 x_{\text{вх}}. \end{aligned} \quad (27)$$

В соответствии с одной из теорем операционного исчисления изображение  $k$ -й производной функции  $f(t)$  при нулевых начальных условиях:

$$\frac{d^k f}{dt^k} \Rightarrow p^k f(p) \quad (28)$$

при

$$f(0) = \frac{df}{dt}(0) = \frac{d^2 f}{dt^2}(0) = \dots = \frac{d^{k-1} f}{dt^{k-1}}(0) = 0. \quad (29)$$

Кроме того, известно, что изображение линейной комбинации функций равно линейной комбинации изображений.

Поэтому, преобразовав по Лапласу левую и правую части уравнения (27), получим:

$$\begin{aligned}
 a_n p^n x_{\text{ВЫХ}}(p) + a_{n-1} p^{n-1} x_{\text{ВЫХ}}(p) + \dots + a_1 p x_{\text{ВЫХ}}(p) + a_0 x_{\text{ВЫХ}}(p) = \\
 = b_m p^m x_{\text{ВХ}}(p) + b_{m-1} p^{m-1} x_{\text{ВХ}}(p) + \dots + b_1 p x_{\text{ВХ}}(p) + b_0 x_{\text{ВХ}}(p),
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

откуда

$$W(p) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(p)}{x_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.
 \tag{31}$$

Таким образом, зная дифференциальное уравнение линейного звена (системы), можно легко получить его передаточную функцию, и наоборот. С этой точки зрения дифференциальные уравнения и передаточные функции, – эквивалентные понятия. Однако, как мы увидим далее, передаточными функциями легче оперировать при построении математического описания системы по описанию его элементов.

Как видно из (31), передаточная функция представляет собой отношение двух полиномов и поэтому может быть представлена в виде

$$W(p) = k \frac{\prod_i^m (p + z_i)}{\prod_j^n (p + p_j)},
 \tag{32}$$

где  $z_i$  – корни числителя передаточной функции, называемые ее нулями;  $p_j$  – корни ее знаменателя, называемые полюсами;  $k = \frac{b_m}{a_n}$  – «согласующий» коэффициент.

Нули и полюса передаточной функции полностью определяют динамику звена (системы). Они могут быть действительными числами или парами комплексно сопряженных чисел  $\alpha \pm j\beta$  (рис. 8). Нули и полюса, расположенные в левой части комплексной плоскости (имеющие отрицательные вещественные части), называются левыми, расположенные в правой полуплоскости – правыми. На рис. 8 левыми являются  $z_1, p_1, p_2$  и  $p_3$ , а правым –  $z_2, p_7$ . Кроме левых и правых, нули и полюса могут быть чисто мнимыми ( $p_4, p_5$ ) и нулевыми ( $p_6$ ).

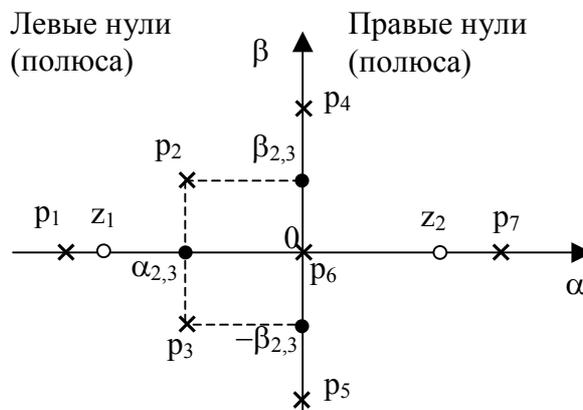


Рис. 8. Нули и полюса системы.

Имея передаточную функцию звена или системы, можно получить его (ее) описание в пространстве состояний в форме уравнений (10,11). Но поскольку передаточная функция не несет информации о внутренних координатах системы (переменных состояния), а лишь связывает ее входы и выходы, такое описание будет иметь формальный характер. Одной и той же передаточной функции соответствует бесконечное множество вариантов ее представлений уравнениями (10,11), различающихся набором переменных состояния (базисом). Выбор базиса зависит от метода преобразований.

Известно несколько таких методов. Рассмотрим один из них – метод прямого программирования, позволяющий получить уравнения в пространстве состояния с базисом, состоящим из *фазовых* координат. Фазовыми называют координаты, связанные между собой процедурами интегрирования–дифференцирования. Так, если речь идет о системе, одной из координат которой является перемещение (линейное или угловое), то другими будут скорость, ускорение и т.д. Число координат определяется порядком передаточной функции.

Пусть, например, имеется система с одним выходом и одним входом, описываемая передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{p^2 + 2p + 4}{2p^2 + p + 4}. \quad (33)$$

Преобразования выполняются в несколько шагов.

1. Числитель и знаменатель  $W(p)$  разделим на слагаемое знаменателя, имеющее максимальную степень при  $p$ . Тем самым перейдем от операции дифференцирования к операции интегрирования:

$$W(p) = \frac{0,5 + p^{-1} + 2p^{-2}}{1 + 0,5p^{-1} + 2p^{-2}}. \quad (34)$$

2. Введем вспомогательную переменную  $E(p)$ , равную частному от деления изображения входа  $U(p)$  на знаменатель (34):

$$E(p) = \frac{U(p)}{1 + 0,5p^{-1} + 2p^{-2}}. \quad (35)$$

Из (35) получим:

$$E(p) = U(p) - 0,5p^{-1}E(p) - 2p^{-2}E(p). \quad (36)$$

3. Выразим выход системы через переменную  $E(p)$ . Для этого умножим эту переменную на числитель передаточной функции:

$$Y(p) = 0,5 \cdot E(p) + p^{-1}E(p) + 2p^{-2}E(p). \quad (37)$$

4. На основании (36) и (37) построим структурную схему системы.

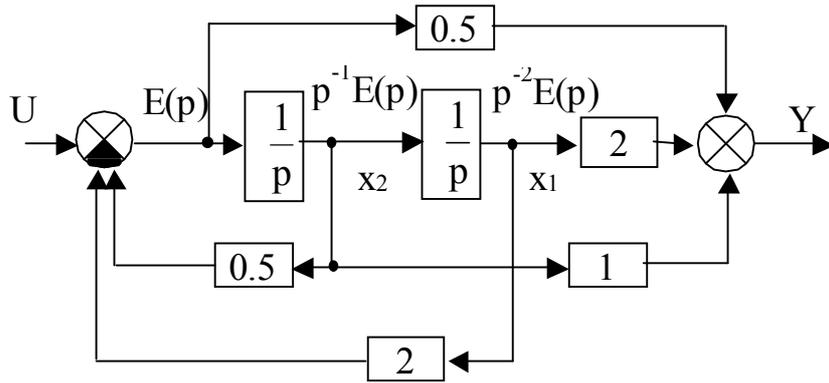


Рис. 9. Структурная схема системы.

На схеме обозначим сигналы на выходах интеграторов переменными  $x_1$  и  $x_2$  (порядок расстановки в общем случае произволен, однако рекомендуется принять его таким, как на схеме). Эти сигналы и будут сигналами по переменным состояниям.

По структурной схеме составим уравнения в виде (10,11):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 0,5x_2 + U, \\ Y = 2x_1 + x_2 + 0,5\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + 0,5 \cdot (-2x_1 - 0,5x_2 + U) = \\ = x_1 + 0,75x_2 + 0,5U. \end{cases} \quad (38)$$

Эти же уравнения в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{pmatrix} \times X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times U, \\ Y = (1 \quad 0,75) \times X + 0,5 \cdot U. \end{cases} \quad (39)$$

Следовательно, матрицы описания объекта в пространстве состояний будут следующими:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0,75), \quad D = 0,5. \quad (40)$$

Ценность рассмотренного метода состоит в том, что он позволяет понять принципы преобразования и построить структурную схему системы. На практике, если порядок числителя передаточной функции меньше порядка ее знаменателя, можно определить матрицы A, B, C и D непосредственно по передаточной функции, пользуясь знанием *канонического представления системы* с одним входом и одним выходом в пространстве состояний.

Система с одним входом и одним выходом с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{c_n p^{n-1} + c_{n-1} p^{n-2} + \dots + c_2 p + c_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1} \quad (41)$$

может быть описана уравнениями в пространстве состояний (10,11) с матрицами вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n), \quad D = 0. \quad (42)$$

Такое описание и является каноническим представлением.

### 3.3. Переходная и частотные характеристики

Переходная характеристика звена (системы)  $h(t)$  – это реакция системы на *единичное ступенчатое воздействие*  $I(t)$  при нулевых начальных условиях. Единичное ступенчатое воздействие описывается функцией времени:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (43)$$

Изображение такого входного сигнала [1]:

$$I(p) = \frac{1}{p}. \quad (44)$$

Следовательно, изображение переходной характеристики:

$$h(p) = \frac{W(p)}{p}. \quad (45)$$

Переходные характеристики полностью определяются свойствами звена или системы и поэтому используются для анализа качества переходных процессов. Для *устойчивых* линейных звеньев и систем (см. 4.2.1) они имеют вид, показанный на рис. 10.

Характеристики типа 1 называются *апериодическими*, характеристики типа 2 – *колебательными*.

Установившееся значение переходной характеристики можно определить непосредственно из дифференциального уравнения или передаточной функции звена. В первом случае в уравнении необходимо приравнять к нулю все производные входной и выходной величин. Тогда из (27), например, получим:

$$a_0 x_{\text{вых,уст}} = b_0 x_{\text{вх,уст}}, \quad (46)$$

где  $x_{\text{вх,уст}}$  и  $x_{\text{вых,уст}}$  – установившиеся значения входного и выходного сигналов звена (системы).

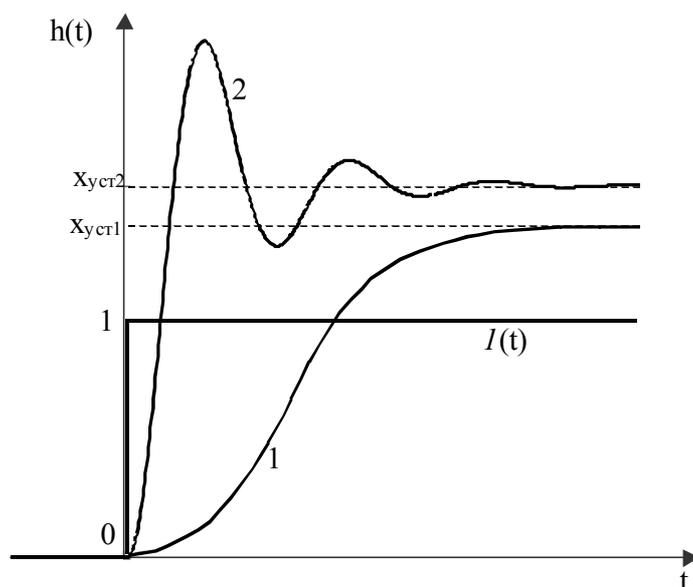


Рис. 10. Переходные характеристики устойчивых звеньев и систем.

Из (46) следует, что

$$x_{\text{вых,уст}} = \frac{b_0}{a_0} x_{\text{вх,уст}} = k x_{\text{вх,уст}}. \quad (47)$$

Величина  $k$  называется *коэффициентом передачи* звена (системы). В нашем случае  $x_{\text{вх,уст}}=1$ , откуда следует важный факт: *установившееся значение переходной характеристики равно коэффициенту передачи системы.*

Чтобы определить установившееся значение переходной характеристики по передаточной функции, необходимо положить в ней  $p=0$  и тем самым получить коэффициент передачи.

Частными случаями, следующими из уравнения (47), являются:

1)  $b_0 = 0$ ,  $k = 0$ , т.е. переходная характеристика со временем стремится к нулю. Такие характеристики могут иметь системы автоматического регулирования, когда под  $x_{\text{вх}}$  понимается возмущающее воздействие, и это означает отсутствие влияния возмущения на установившееся значения выходной величины системы;

2)  $a_0 = 0$ ,  $k = \infty$ , т.е. переходная характеристика неограниченно возрастает во времени. В данном случае в структуре математического описания звена присутствует хотя бы один так называемый *свободный интегратор*, который непрерывно увеличивает входной сигнал, интегрируя постоянный по уровню сигнал на входе. Такие звенья называются *нейтральными* (см. 4.2.1).

Частотные характеристики описывают вынужденные колебания на выходе элемента (системы), вызванные гармоническим воздействием на его (ее) вход:

$$x_{\text{вх}} = x_{\text{вх,макс}} \sin(\omega t), \quad (48)$$

где  $x_{\text{вх,макс}}$  – амплитуда;  $\omega$  – частота колебаний.

Вынужденные колебания на выходе линейного элемента (системы) будут иметь ту же частоту, что и на входе, но отличаться амплитудой и фазой:

$$x_{\text{ВЫХ}} = x_{\text{ВЫХ,макс}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (49)$$

Амплитудно-частотной характеристикой  $A(\omega)$  называется зависимость отношения амплитуд  $x_{\text{ВЫХ,макс}}/x_{\text{ВХ,макс}}$  от частоты  $\omega$ :

$$A(\omega) = \frac{x_{\text{ВЫХ,макс}}(\omega)}{x_{\text{ВХ,макс}}(\omega)}. \quad (50)$$

Фазочастотной характеристикой ФЧХ называется зависимость от частоты фазового сдвига выходных колебаний по отношению к входным –  $\varphi(\omega)$ .

На рис. 11 показаны АЧХ и ФЧХ звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p + 1}.$$

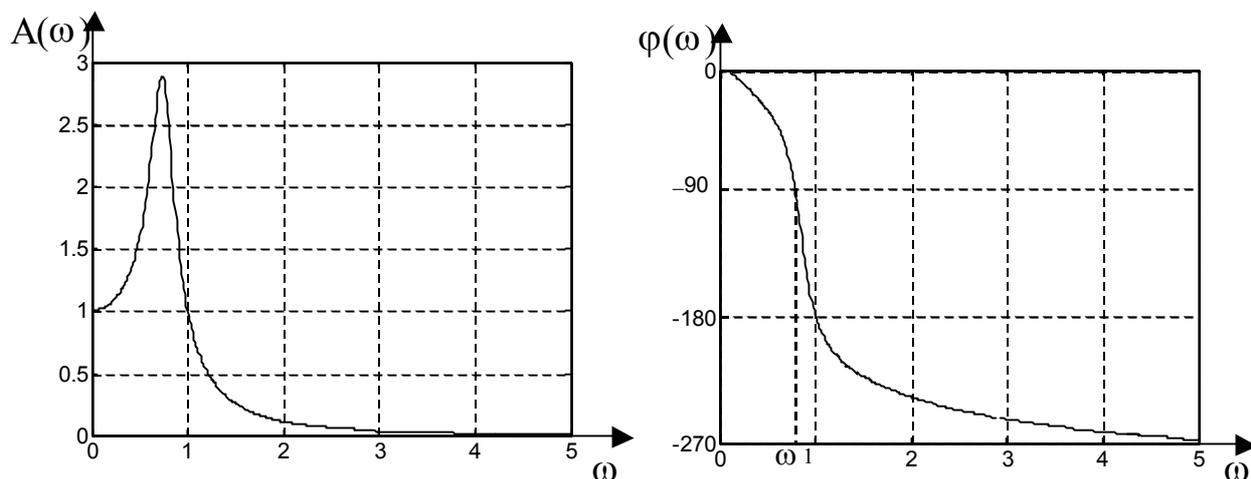


Рис. 11. АЧХ и ФЧХ звена.

Амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики можно объединить в одну амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ), используя их в качестве полярных координат (рис. 12):

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (51)$$

Характеристики  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  называются соответственно вещественной и мнимой частотными характеристиками.

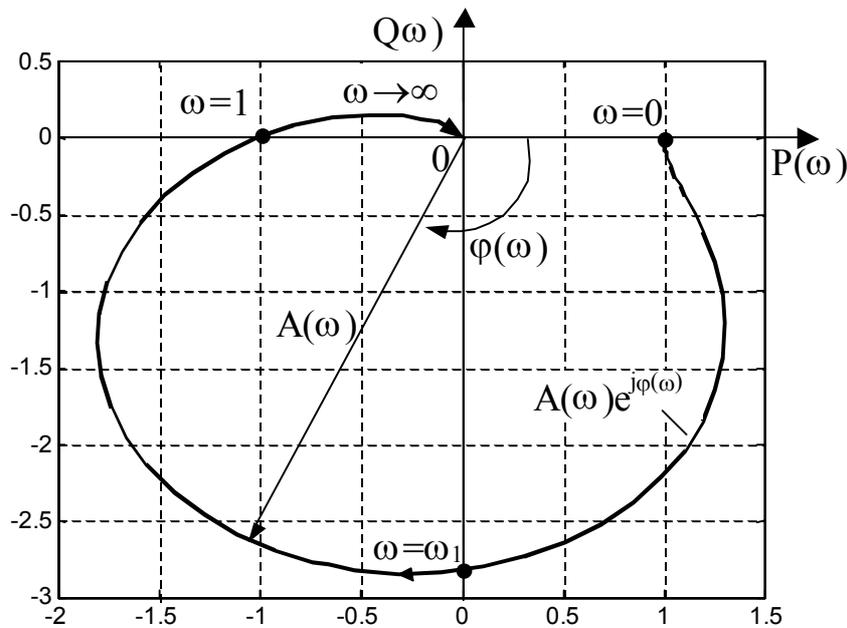


Рис. 12. АФЧХ звена.

Связь между характеристиками  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ , с одной стороны, и  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , – с другой, очевидна:

$$\begin{cases} P(\omega) = A(\omega) \cos(\varphi(\omega)); \\ Q(\omega) = A(\omega) \sin(\varphi(\omega)). \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \\ \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \end{cases} \quad (53)$$

АФЧХ звена или системы можно получить непосредственно по передаточной функции, которая, как показано, представляет собой отношение двух полиномов

$$W(p) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(p)}{x_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}. \quad (54)$$

Если под оператором «р» понимать оператор дифференцирования, то дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции (54), можно записать следующим образом:

$$x_{\text{ВЫХ}} D(p) = x_{\text{ВХ}}(p) N(p). \quad (55)$$

Представим колебания на входе и выходе звена в виде:

$$x_{\text{ВХ}} = x_{\text{ВХ, max}} e^{j\omega t}, \quad (56)$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = x_{\text{ВЫХ, max}} e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (57)$$

Подставим (56) и (57) в (55). При этом учтем следующие очевидные выражения для  $k$ -х производных входного и выходного сигналов:

$$p^k x_{\text{ВХ}} = (j\omega)^k x_{\text{ВХ,макс}} e^{j\omega t}, \quad (58)$$

$$p^k x_{\text{ВЫХ}} = (j\omega)^k x_{\text{ВЫХ,макс}} e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (59)$$

Так как слева и справа в уравнении (55) стоят суммы производных, то в результате получим

$$D(j\omega)x_{\text{ВЫХ,макс}} e^{j(\omega t + \varphi)} = N(j\omega)x_{\text{ВХ,макс}} e^{j\omega t}, \quad (60)$$

откуда

$$\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{x_{\text{ВЫХ,макс}} e^{j(\omega t + \varphi)}}{x_{\text{ВХ,макс}} e^{j\omega t}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (61)$$

Следовательно:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (62)$$

Таким образом, АФЧХ линейного звена или САР в целом можно получить путем замены в передаточной функции оператора « $p$ » на оператор « $j\omega$ ».

Порядок преобразований при этом следующий. После подстановки  $p = j\omega$  получаем

$$W(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{P_N(\omega) + jQ_N(\omega)}{P_D(\omega) + jQ_D(\omega)}. \quad (63)$$

Освобождаясь от мнимости в знаменателе, окончательно имеем

$$W(j\omega) = \frac{(P_N(\omega) + jQ_N(\omega))(P_D(\omega) - jQ_D(\omega))}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (64)$$

где

$$\begin{cases} P(\omega) = \frac{P_N(\omega)P_D(\omega) + Q_N(\omega)Q_D(\omega)}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)}, \\ Q(\omega) = \frac{Q_N(\omega)P_D(\omega) - P_N(\omega)Q_D(\omega)}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)}. \end{cases} \quad (65)$$

При исследовании динамических свойств и синтезе систем автоматического регулирования вместо АЧХ часто используется *логарифмическая амплитудно-частотная характеристика* (ЛАЧХ), получаемая через десятичный логарифм АЧХ. В таком случае ЛАЧХ и ФЧХ представляются совместно в виде графиков в прямоугольной системе координат. По оси абсцисс откладывается частота  $\omega$  в логарифмическом масштабе, а по оси ординат – значения

ЛАЧХ в децибелах и углов ЛФХ в градусах (или радианах) в равномерном масштабе (рис. 13).

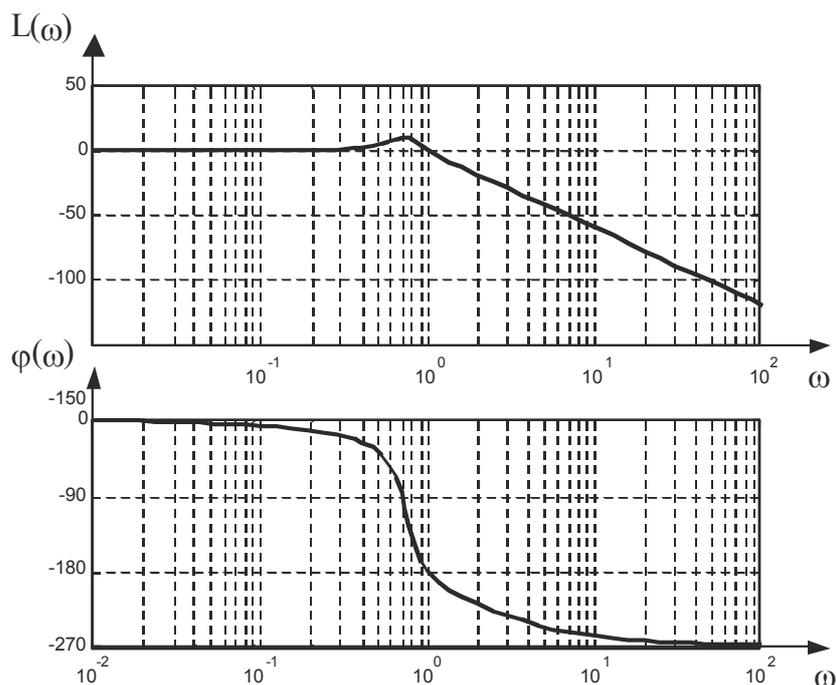


Рис. 13. Логарифмические частотные характеристики звена.

Терминология, которой пользуются при построении логарифмических частотных характеристик, заимствована теорией автоматического регулирования из акустики.

Для измерения отношения двух величин, изменяющихся в широком диапазоне, используется логарифмическая шкала, на которой равномерной единицей является *октава* или *декада*.

Если две частоты отличаются друг от друга в два раза, т.е.  $\omega_2/\omega_1 = 2$ , то говорят, что частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  отличаются друг от друга на одну октаву. Если это отношение равно десяти, т.е.  $\omega_2/\omega_1 = 10$ , то говорят, что эти частоты отличаются на одну декаду.

При измерении отношений двух мощностей  $N_1$  и  $N_2$  говорят, что они отличаются на один «бел», если  $\lg \frac{N_2}{N_1} = 1$ . Это сравнительно большая единица измерения. При рассмотрении конкретных задач приходится иметь дело с более мелкой единицей, называемой децибелом. Данная величина определяется следующим равенством:

$$10 \lg \frac{N_2}{N_1} = 1. \quad (66)$$

В этом случае говорят, что  $N_1$  и  $N_2$  отличаются на один децибел. От измерения мощности можно перейти к измерению амплитуды сигнала. Как известно, мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды:

$$N_1 \equiv x_1^2; N_2 \equiv x_2^2. \quad (67)$$

Если

$$10 \lg \frac{N_2}{N_1} = 10 \lg \frac{x_2^2}{x_1^2} = 1, \quad (68)$$

то для отношения амплитуд сигналов, отличающихся на один децибел, получаем:

$$20 \lg \frac{x_2}{x_1} = 1. \quad (69)$$

Поэтому ЛАЧХ определяется следующим образом:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega). \quad (70)$$

Существует класс линейных систем, динамические свойства которых полностью описываются одной из двух характеристик:  $A(\omega)$  ( $L(\omega)$ ) или  $\varphi(\omega)$ . Другими словами, между этими характеристиками существует однозначная связь. Это класс так называемых *минимально-фазовых систем*. Свое название такие системы получили по той причине, что имеют минимальную (по модулю)  $\varphi(\omega)$  среди всех систем, обладающих одной и той же амплитудно-частотной характеристикой. Доказано, что минимально-фазовые системы описываются передаточными функциями, имеющими только левые нули и полюса. Отметим, что для всех линейных систем (необязательно минимально-фазовых) однозначно зависящими между собой характеристиками являются  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ .

### 3.4. Элементарные динамические звенья САР

Элементарными будем называть динамические звенья, имеющие неразложимые на множители передаточные функции первого или второго порядков. Часто такими звеньями представляются многие реальные элементы САР, хотя в большинстве случаев подобное описание является упрощенным.

Усилительное (безынерционное) звено описывается уравнением

$$x_{\text{ВЫХ}} = k x_{\text{ВХ}}. \quad (71)$$

Коэффициент  $k$  называется коэффициентом усиления, если  $x_{\text{ВХ}}$  и  $x_{\text{ВЫХ}}$  – сигналы одной физической природы, или коэффициентом передачи, если физическая природа этих сигналов различна. Согласно уравнению звена выходной сигнал повторяет входной, усиленный по модулю в  $k$  раз. Строго говоря, реальных безынерционных звеньев не бывает – любые процессы преобразования энергии или информации занимают некоторое время. Однако если инерционность некоторого звена системы намного меньше инерционности других

звеньев, его целесообразно пренебречь, так как это упростит математическое описание системы, не снижая его адекватности. Например, присутствующие во многих САР полупроводниковые усилители можно считать безынерционными звеньями, так как время преобразования (усиления) сигнала в них на несколько порядков меньше времени реакции на управляющий сигнал объектов управления и исполнительных механизмов.

Передаточная функция усилительного звена не имеет нулей и полюсов:

$$W(p) = k. \quad (72)$$

Амплитудно-частотная характеристика усилительного звена:

$$W(j\omega) = k. \quad (73)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20 \lg k. \quad (74)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = 0. \quad (75)$$

Интегрирующее звено описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = kx_{\text{ВХ}}. \quad (76)$$

Как видно из (76), выходной сигнал интегрирующего звена пропорционален интегралу от входного:

$$x_{\text{ВЫХ}} = k \int_0^t x_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau. \quad (77)$$

Передаточная функция звена не имеет нулей, но имеет один нулевой полюс:

$$W(p) = \frac{k}{p}. \quad (78)$$

Переходная характеристика звена определяется уравнением

$$x_{\text{ВЫХ}} = kt \quad (79)$$

и представляет собой линейно возрастающий во времени сигнал.

Амплитудно-частотная характеристика звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}. \quad (80)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (81)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \quad (82)$$

Это прямая, пересекающая ось абсцисс при частоте  $\omega = k$ . Определим ее наклон. Для этого сравним значения  $L(\omega)$  на двух частотах, отличающихся на одну декаду:  $\omega_1$  и  $\omega_2 = 10\omega_1$ .

$$L(\omega_1) - L(\omega_2) = -20 \lg(T\omega_1) + 20 \lg(T\omega_2) = -20 \lg(T\omega_1) + 20 + 20 \lg(T\omega_1) = 20. \quad (83)$$

Следовательно, наклон прямой равен  $-20$  дБ/дек (рис. 14).

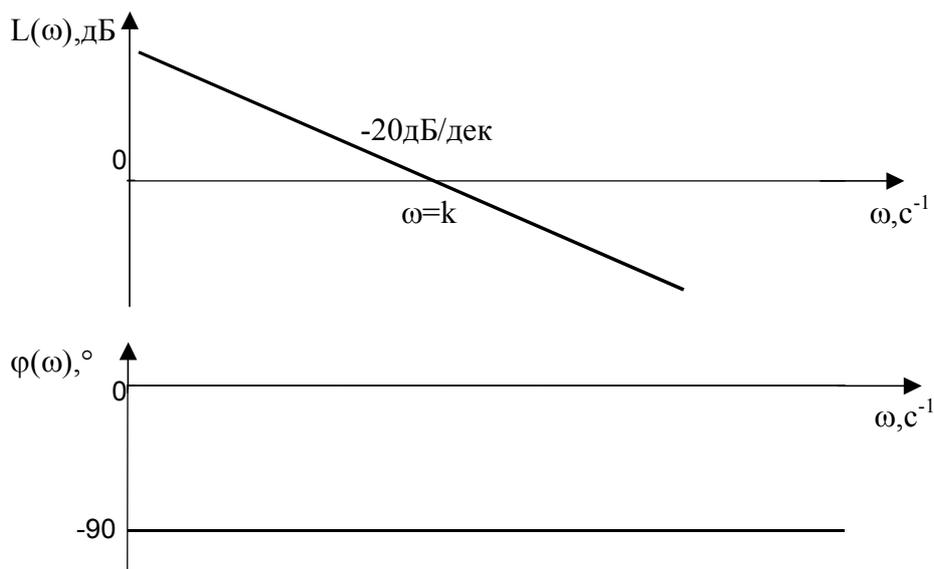


Рис. 14. Логарифмические частотные характеристики интегрирующего звена.

Апериодическое звено (инерционное звено первого порядка) описывается дифференциальным уравнением вида

$$T \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = kx_{\text{ВХ}}, \quad (84)$$

где  $T$  – постоянная времени звена  $c^{-1}$ ;  $k$  – его коэффициент передачи (усиления).

Передаточная функция аperiодического звена:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (85)$$

Она имеет единственный полюс  $p = -1/T$ .

Переходная характеристика звена показана на рис. 15.

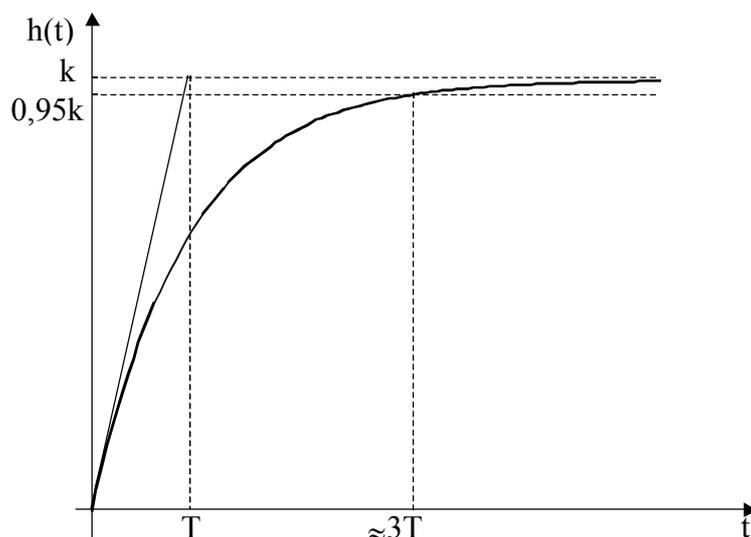


Рис. 15. Переходная характеристика аperiodического звена.

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (86)$$

Постоянная времени аperiodического звена имеет определенный физический смысл – это время, в течение которого выходная величина достигла бы установившегося значения, если бы изменялась с постоянной начальной скоростью. Действительно, из (84) при  $x_{\text{вх}} = 1$ ,  $x_{\text{вых}} = 0$  получаем

$$\frac{dx_{\text{вых}}}{dt}(0) = \frac{k}{T}. \quad (87)$$

Откуда время достижения установившегося состояния

$$t_y = k / \frac{dx_{\text{вых}}}{dt}(0) = T. \quad (88)$$

Амплитудно-частотная характеристика аperiodического звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}. \quad (89)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg}(T\omega). \quad (90)$$

Логарифмируя (89), получим ЛАЧХ аperiodического звена:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}. \quad (91)$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

- 1) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$  ;
- 2) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k - 20 \lg(T\omega)$ .

Первая асимптота – горизонтальная линия на уровне  $20\lg k$ , вторая – прямая с наклоном  $-20$  дБ/дек.

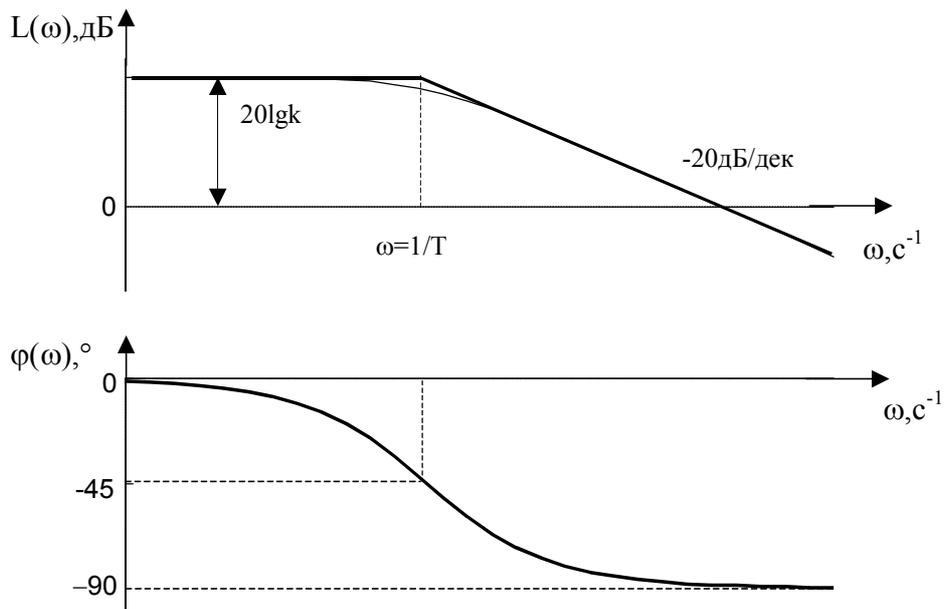


Рис. 16. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена.

Пересекаются асимптоты в точке  $\omega=1/T$ . На этой же частоте сама ЛАХ в наибольшей степени отличается от асимптот (отличие  $\Delta L \approx 3$  дБ).

Колебательное звено описывается дифференциальным уравнением второго порядка, которое можно привести к виду

$$T^2 \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + 2T\xi \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = kx_{\text{ВХ}}, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad (92)$$

где  $T$  – постоянная времени звена,  $c^{-1}$ ;  $k$  – коэффициент передачи звена;  $\xi$  – коэффициент демпфирования.

Из (92) получим передаточную функцию звена

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (93)$$

Передаточная функция имеет пару комплексно сопряженных полюсов

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \quad (94)$$

где

$$\alpha = -\frac{\xi}{T}, \quad \beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}. \quad (95)$$

Переходная характеристика колебательного звена может быть выражена через его полюса:

$$h(t) = k \left( 1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{\alpha t} \sin \left( \beta t - \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right) \right) \quad (96)$$

или через параметры передаточной функции:

$$h(t) = k \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T} t} \sin \left( \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \right). \quad (97)$$

Как видно из (96), переходная характеристика колебательного звена представляет собой сумму постоянной величины, равной коэффициенту передачи  $k$ , и затухающей синусоиды с частотой  $\beta$ . Скорость затухания синусоиды определяется вещественной частью полюсов  $\alpha$ .

Переходные характеристики колебательных звеньев при различных значениях постоянных времени и коэффициента демпфирования показаны на рис. 17.

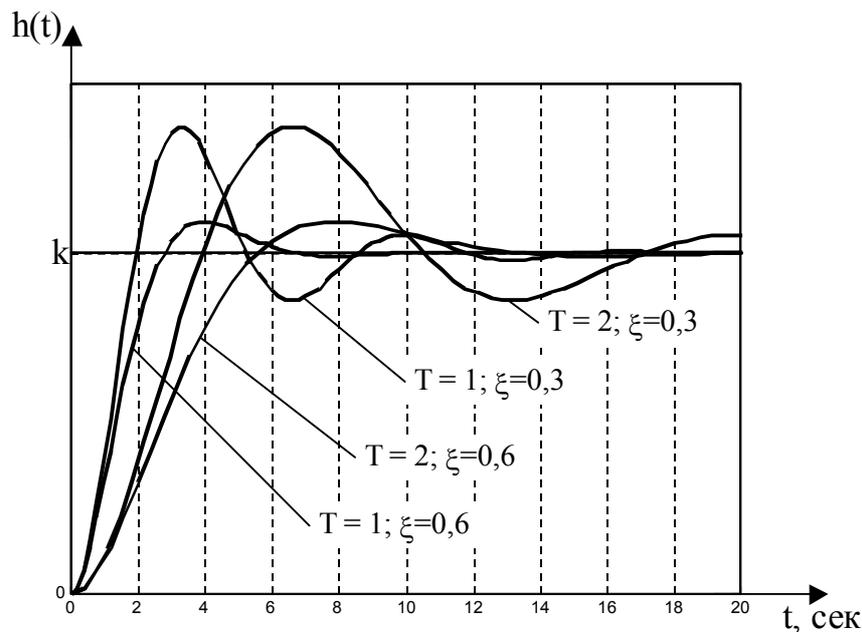


Рис. 17. Переходные характеристики колебательных звеньев.

Анализ выражения (97), а также рис. 17 показывают влияние параметров передаточной функции на вид переходной характеристики.

Увеличение постоянной времени  $T$  ведет к снижению скорости затухания и частоты колебаний, что в свою очередь дает увеличение длительности переходной характеристики. Размах колебаний остается неизменным.

Увеличение коэффициента демпфирования  $\xi$  ведет к увеличению скорости затухания колебаний и уменьшению их размаха и частоты, т.е. к подавлению (демпфированию) колебаний.

Отметим, что при  $\xi \geq 1$  полюса звена становятся отрицательными вещественными числами:

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T}, \quad (98)$$

и, следовательно, передаточную функцию (93) можно представить в виде произведения двух аperiодических звеньев:

$$W(p) = \frac{-kp_1}{p-p_1} \cdot \frac{-p_2}{p-p_2} = \frac{k}{T_1p+1} \cdot \frac{1}{T_2p+1}, \quad (99)$$

где  $T_1 = |1/p_1|$ ;  $T_2 = |1/p_2|$ .

Такое звено называется *aperиодическим второго порядка* и, очевидно, не является элементарным.

С другой стороны, при  $\xi=0$  из (97) получаем:

$$h(t) = k \left( 1 - \sin \left( \frac{1}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) \right) = k \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{T} t \right) \right). \quad (100)$$

Это уравнение незатухающих колебаний относительно уровня  $h = k$  с частотой  $\omega = 1/T$  и амплитудой, равной коэффициенту передачи.

Звено, у которого  $\xi=0$ , называется *консервативным*.

Амплитудно-частотная характеристика колебательного звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}. \quad (101)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(j\omega) = -\arctg \left( \frac{2\xi T \omega}{1-T^2\omega^2} \right). \quad (102)$$

ЛАЧХ звена имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}. \quad (103)$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

а) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$  ;

б) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k - 40 \lg T \omega$ .

Первая асимптота является горизонтальной прямой, уровень которой  $20 \lg k$ , вторая – прямая с наклоном  $-40$  дБ/дек (рис.18).

При значениях коэффициента демпфирования  $0,5 < \xi < 1$  характеристика близка к ломаной, образованной двумя этими асимптотами. Если же  $\xi < 0,5$ , то имеет место заметный «горб» в ЛАХ на частоте

$$\omega_k = \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad (104)$$

который может быть рассчитан следующим образом:

$$\Delta L = 20 \lg \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1-\xi^2}}. \quad (105)$$

В упрощенных расчетах можно принять

$$\Delta L = 20 \lg \frac{1}{2\xi}, \quad \omega_k = \frac{1}{T}. \quad (106)$$

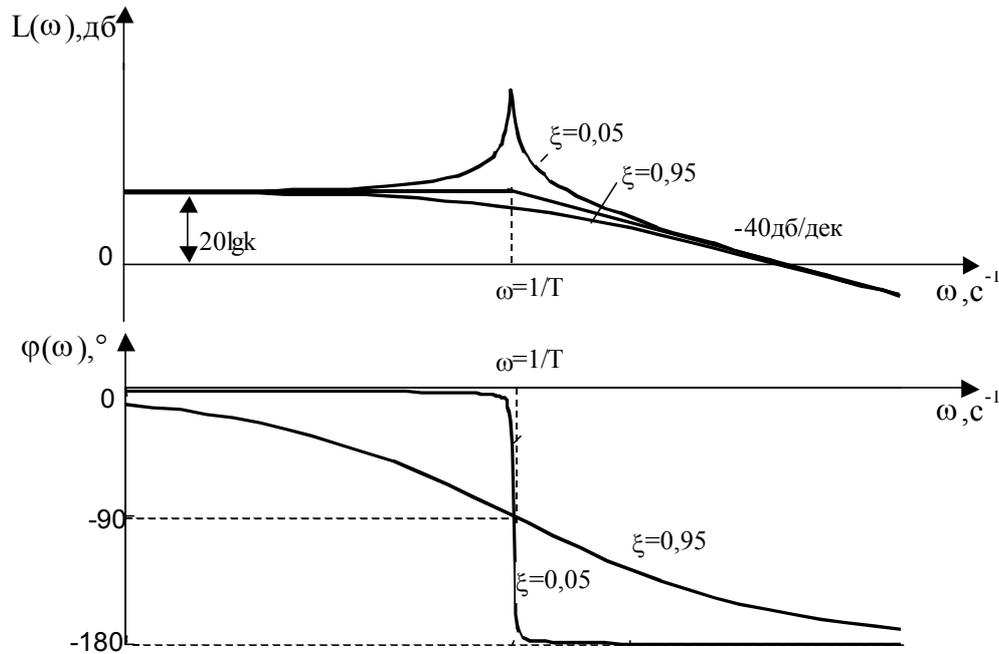


Рис. 18. Логарифмические частотные характеристики колебательного звена.

Выше рассмотрены элементарные звенья, передаточные функции которых имеют только полюса. Из них с помощью последовательного соединения может быть составлена система с передаточной функцией, заданной любым набором левых полюсов.

Далее рассмотрим звенья, передаточные функции которых имеют только нули. Это так называемые *дифференцирующие звенья*. Порядки числителей их передаточных функций больше порядков знаменателей, и, следовательно, «в чистом виде» эти звенья не реализуемы. Они не могут быть представлены в пространстве состояний, а их переходные характеристики в момент времени  $t = 0$  равны бесконечности. Однако поскольку в общем случае передаточные функции реальных звеньев или САР в целом имеют нули, дифференцирующие звенья представляют определенный интерес. В частности, представляют интерес их частотные характеристики, которыми в дальнейшем мы и ограничимся.

При этом необходимо заметить, что поскольку передаточные функции звеньев, имеющих только нули, обратны передаточным функциям, имеющим только полюса, в том же отношении стоят и их частотные характеристики. Действительно, пусть:

$$W_1(p) = \frac{1}{W_2(p)}. \quad (107)$$

Тогда

$$W_1(j\omega) = A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} = \frac{1}{W_2(j\omega)} = \frac{1}{A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)}} = (A_2(\omega))^{-1}e^{-j\varphi_2(\omega)}, \quad (108)$$

и, следовательно:

$$A_1(\omega) = (A_2(\omega))^{-1}; \quad (109)$$

$$\varphi_1(\omega) = -\varphi_2(\omega). \quad (110)$$

Из (109) очевидно, что  $L(\omega_1) = -L(\omega_2)$ .

Идеальное дифференцирующее звено описывается дифференциальным уравнением:

$$x_{\text{ВЫХ}} = k \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt}. \quad (111)$$

Его передаточная функция

$$W(p) = kp. \quad (112)$$

Амплитудно-частотная характеристика идеального дифференцирующего звена:

$$A(\omega) = k\omega. \quad (113)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (114)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega. \quad (115)$$

Это прямая с наклоном 20 дБ/дек, проходящая через ось абсцисс при частоте  $\omega=1/k$ .

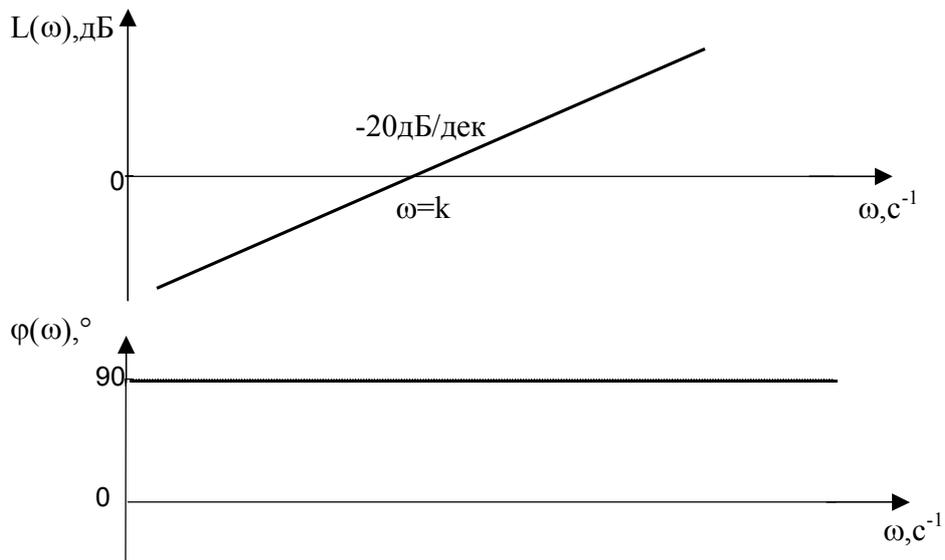


Рис. 19. Логарифмические частотные характеристики идеального дифференцирующего звена.

Идеальное форсирующее звено описывается дифференциальным уравнением

$$x_{\text{вых}} = k \left( T \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + 1 \right). \quad (116)$$

Звено имеет передаточную функцию

$$W(p) = k(Tp + 1). \quad (117)$$

Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = k \cdot \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}. \quad (118)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(T\omega). \quad (119)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg T\omega. \quad (120)$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

- 1) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$  ;
- 2) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k + 20 \lg T\omega$ .

Первая асимптота – горизонтальная прямая, вторая – прямая с наклоном +20 дБ/дек (рис.20).

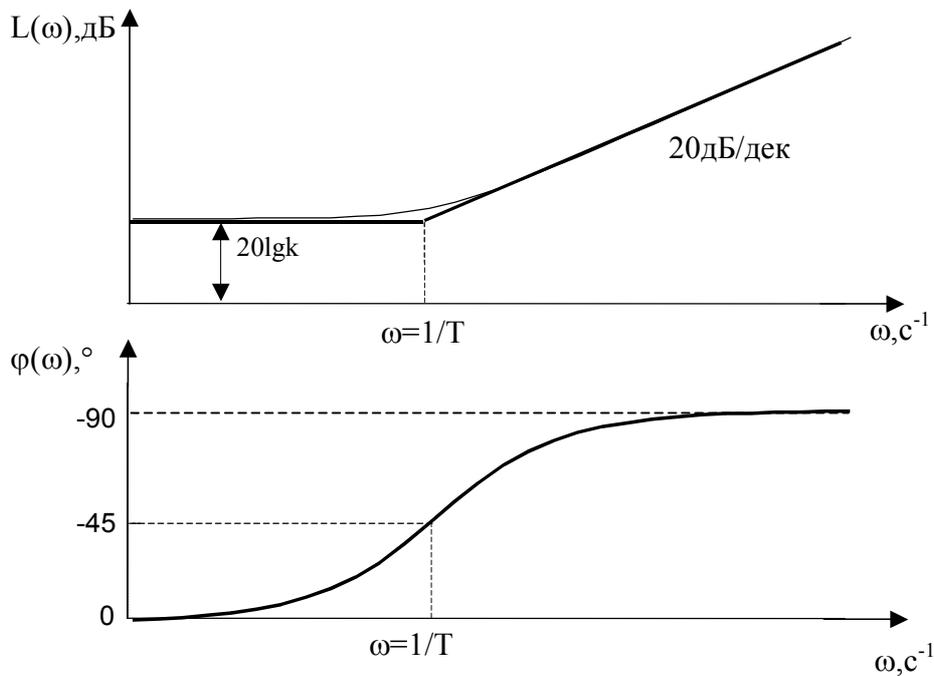


Рис. 20. Логарифмические частотные характеристики форсирующего звена.

Пересекаются асимптоты в точке  $\omega=1/T$ . Наибольшее отличие ЛАЧХ от асимптот наблюдается на частоте  $\omega=1/T$  и составляет  $\Delta L \approx 3\text{дБ}$ .

Идеальное форсирующее звено второго порядка описывается дифференциальным уравнением

$$x_{\text{ВЫХ}} = k \left( T^2 \frac{d^2 x_{\text{ВХ}}}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} + x_{\text{ВХ}} \right), \quad 0 \leq \xi < 1. \quad (121)$$

Передаточная функция такого звена:

$$W(p) = k(T^2 p + 2\xi T p + 1). \quad (122)$$

Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = k \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}. \quad (123)$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \left( \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} \right). \quad (124)$$

ЛАЧХ звена:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}. \quad (125)$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

- а) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$  ;
- б) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k - 40 \lg T \omega$ .

Первая асимптота является горизонтальной прямой, уровень которой  $20\lg k$ , вторая – прямая с наклоном 40 дБ/дек (рис.21).

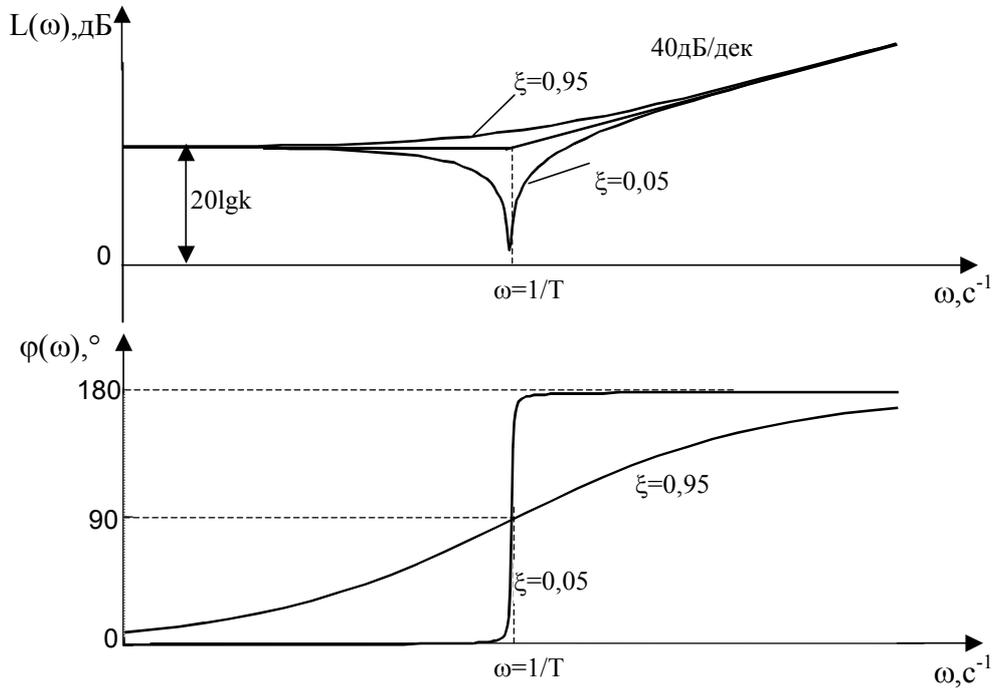


Рис. 21. Логарифмические частотные характеристики колебательного звена.

При значениях коэффициента демпфирования  $0,5 < \xi < 1$  характеристика близка к ломаной, образованной двумя этими асимптотами. При  $\xi < 0,5$  имеет место заметный отрицательный «горб» на частоте

$$\omega_k = \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad (126)$$

который может быть рассчитан как:

$$\Delta L = -20 \lg \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (127)$$

В упрощенных расчетах можно считать

$$\Delta L = -20 \lg \frac{1}{2\xi}, \quad \omega_k = \frac{1}{T}. \quad (128)$$

Кроме звеньев, описываемых линейными дифференциальными уравнениями и рассмотренных выше, к элементарным линейным звеньям можно также отнести *звено запаздывания*.

Звено запаздывания – это звено, у которого сигнал на выходе пропорционален сигналу на входе, но отстает от него на время  $\tau$ :

$$x_{\text{ВЫХ}} = kx_{\text{ВХ}}(t - \tau). \quad (129)$$

Таким звеном, например, может быть описан транспортер, перемещающий сыпучий материал, если в качестве входной величины принять положение шибера (заслонки), регулирующего подачу этого материала, а в качестве выходной – сигнал электронных весов, расположенных на некотором расстоянии от зоны загрузки транспортера.

Согласно теореме операционного исчисления о запаздывании оригинала [1] изображение по Лапласу правой части уравнения (129):

$$x_{\text{вх}}(t - \tau) \Rightarrow x_{\text{вх}}(p)e^{-\tau p}. \quad (130)$$

Следовательно, передаточная функция звена:

$$W(p) = \frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = ke^{-\tau p}. \quad (131)$$

Переходная характеристика звена представляет собой ступенчатый сигнал величины  $k$ , «сдвинутый» от нулевого момента времени вправо на величину  $\tau$ :

$$h(l) = k \cdot I(t - \tau). \quad (132)$$

Частотные характеристики звена можно получить с помощью преобразования:

$$W(j\omega) = ke^{-j\tau\omega} = k(\cos(\tau\omega) - j\sin(\tau\omega)). \quad (133)$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики звена:

$$P(\omega) = k \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -k \sin(\tau\omega). \quad (134)$$

Амплитудо-частотная и фазочастотная характеристики:

$$A(\omega) = k, \quad \varphi(\omega) = -\tau\omega. \quad (135)$$

Таким образом, звено характеризуется отрицательным фазовым сдвигом, пропорциональным величине запаздывания  $\tau$  и частоте  $\omega$ .

В заключение отметим, что запаздывание часто появляется в математическом описании многих процессов в результате аппроксимации их динамических характеристик, полученных экспериментальным путем, передаточными функциями низких порядков. Например, динамические характеристики многих тепловых объектов приближенно получают обработкой так называемой *кривой разгона* – экспериментально снятой кривой реакции выходной величины на ступенчатое изменение входной (рис. 22).

В простейшем случае объект описывают передаточной функцией первого порядка с запаздыванием:

$$W(p) = \frac{\Delta x_{\text{вых}}(p)}{\Delta x_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{Tp + 1} e^{-\tau p}. \quad (136)$$

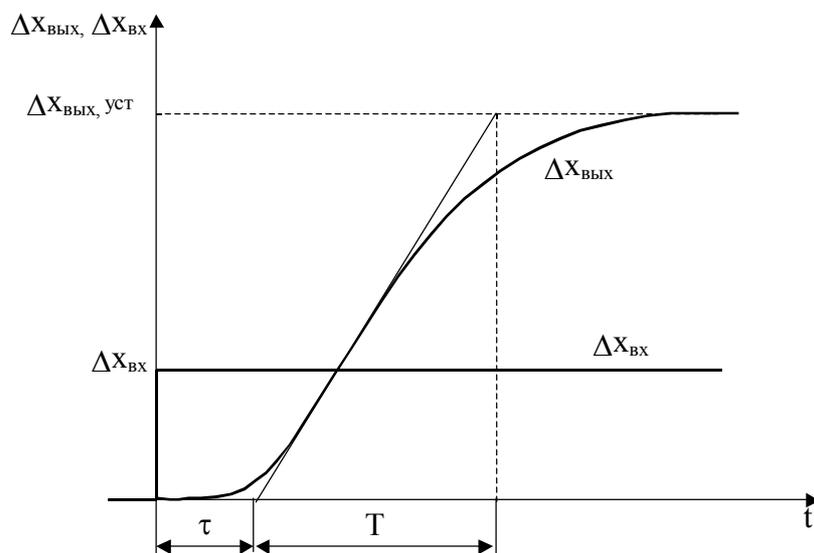


Рис. 22. Использование запаздывания для аппроксимации разгонных характеристик.

Временные параметры передаточной функции  $\tau$  и  $T$  определяют непосредственно по разгонной кривой (рис. 22), а коэффициент передачи рассчитывают как

$$k = \frac{\Delta X_{\text{ВЫХ, УСТ}}}{\Delta X_{\text{ВХ}}} \quad (137)$$

### 3.5. Определение математического описания САР

#### 3.5.1. Передаточная матрица системы

Как и любые реальные звенья, система автоматического регулирования в целом может быть описана уравнениями в пространстве состояний, связывающими переменные состояния, входные и выходные величины системы. Для построения такого описания достаточно объединить уравнения всех звеньев, входящих в систему, избавившись тем самым от «ненужных» в конечном итоге промежуточных входов и выходов отдельных элементов САР.

Для построения переходных и частотных характеристик могут потребоваться передаточные функции системы, связывающие ее входы и выходы. Эти передаточные функции формируют так называемую *передаточную матрицу*.

Передаточная матрица  $W(p)$  связывает между собой вектор изображений Лапласа входных величин  $U(p)$  и вектор изображений Лапласа выходных величин  $Y(p)$  при нулевых начальных условиях:

$$Y(p) = W(p) \cdot U(p) \quad (138)$$

При этом в качестве входных могут быть как задающие, так и возмущающие воздействия, а в качестве выходных – любые интересующие исследователя сигналы.

Если вектор  $U$  включает  $m$  компонентов, а вектор  $Y$  –  $\ell$  компонентов, размер передаточной матрицы  $[\ell \times m]$ :

$$\begin{pmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \\ \dots \\ y_\ell(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1(p)}{u_1(p)} & \frac{y_1(p)}{u_2(p)} & \dots & \frac{y_1(p)}{u_m(p)} \\ \frac{y_2(p)}{u_1(p)} & \frac{y_2(p)}{u_2(p)} & \dots & \frac{y_2(p)}{u_m(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_\ell(p)}{u_1(p)} & \frac{y_\ell(p)}{u_2(p)} & \dots & \frac{y_\ell(p)}{u_m(p)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ \dots \\ u_m(p) \end{pmatrix}. \quad (139)$$

Таким образом, элементами передаточной матрицы являются передаточные функции по отдельным каналам управления и возмущения.

Передаточную матрицу системы можно определить по ее уравнениям в пространстве состояний (10, 11). Запишем уравнение состояний (10) в операторной форме и выразим из него вектор изображений переменных состояния:

$$pX(p) = AX(p) + BU(p), \quad (140)$$

откуда

$$X(p) = (pE - A)^{-1}BU(p), \quad (141)$$

где  $E$  – единичная диагональная матрица размером  $[n \times n]$ .

Подставив (141) в уравнение выхода, получим:

$$Y(p) = C(pE - A)^{-1}BU(p) + DU(p) = (C(pE - A)^{-1}B + D)U(p), \quad (142)$$

откуда видно, что

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B + D, \quad (143)$$

или

$$W(p) = \frac{C(pE - A)^+ B + D \det(pE - A)}{\det(pE - A)}, \quad (144)$$

где  $(pE - A)^+$  – так называемая присоединенная к  $pE - A$  матрица. Знаменатель (144) представляет собой характеристический полином матрицы  $A$ . Так как этот полином – величина скалярная, знаменатели передаточных функций – элементов передаточной матрицы, т.е. знаменатели передаточных функций всех каналов управления и возмущения системы – будут одинаковыми:

$$\text{den}(p) = \det(pE - A). \quad (145)$$

Числители же определяются матрицей

$$\text{num}(p) = C(pE - A)^+ B + D \det(pE - A). \quad (146)$$

Это обстоятельство подчеркивает то, что внутренние свойства системы (ее динамика по переменным состояниям, устойчивость и т.д.) определяются только уравнением состояний (10), точнее, матрицей  $A$ .

Однако если система представляет собой объединение нескольких независимых подсистем, соответствующие элементы передаточной матрицы, – передаточные функции каналов управления, – должны иметь, очевидно, различные знаменатели, так как эти каналы принадлежат подсистемам с различными свойствами. В таком случае числители (146) и знаменатель (145) передаточных функций матрицы имеют общие множители–полиномы, сокращая которые, можно получить «реальные» числители и знаменатели.

### 3.5.2. Структурные преобразования модели САР

Рассмотренные ниже правила структурных преобразований позволяют получить передаточные функции САР по передаточным функциям ее звеньев, а также представить структуру системы в удобном для анализа виде.

Формулы преобразований легко выводятся путем сопоставления передаточных функций структур до и после преобразований.

#### 1. Последовательное соединение звеньев (рис. 23).

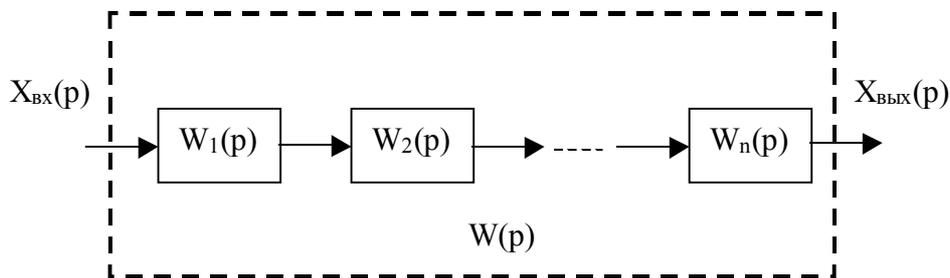


Рис. 23. Последовательное соединение звеньев.

Передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению их передаточных функций

$$W(p) = \prod_{i=1}^{i=n} W_i(p). \quad (147)$$

#### 2. Параллельное соединение звеньев (рис. 24).

Передаточная функция системы, состоящих из параллельно соединенных звеньев, равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \sum_{i=1}^{i=n} W_i(p). \quad (148)$$

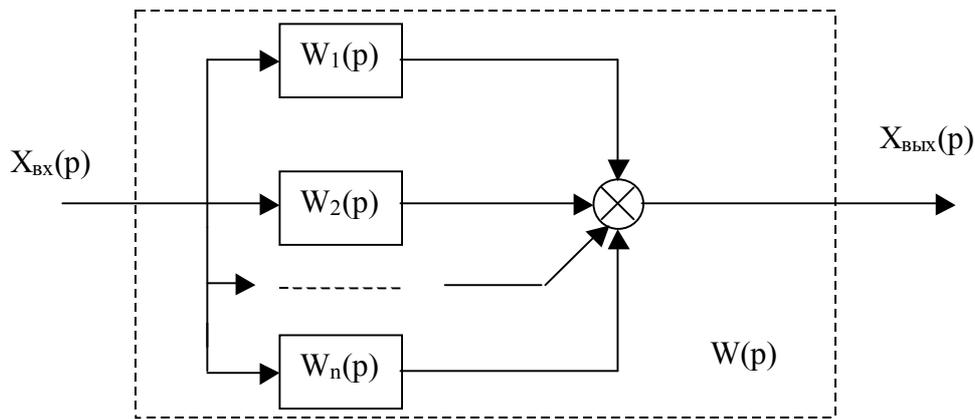


Рис. 24. Параллельное соединение звеньев.

3. Соединение звеньев в виде обратной связи (рис. 25).

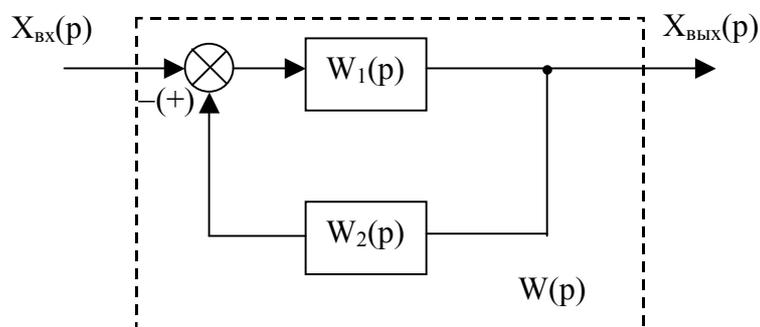


Рис. 25. Соединение звеньев в виде обратной связи.

Передаточная функция звена, охваченного обратной связью, равна дроби, числитель которой есть передаточная функция самого звена, а знаменатель – единица плюс /минус/ произведение передаточной функции звена и передаточной функции обратной связи:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_{oc}(p)}. \quad (149)$$

Знак «+» относится к отрицательной обратной связи, а знак «-» – к положительной.

4. Переносы сумматора.

а) с выхода звена на его вход (рис. 26).

Внешнее воздействие  $F(p)$ , приложенное к выходу звена с передаточной функцией  $W_1(p)$ , можно перевести на его вход, поместив между воздействием и сумматором дополнительное звено с передаточной функцией  $1/W_1(p)$ .

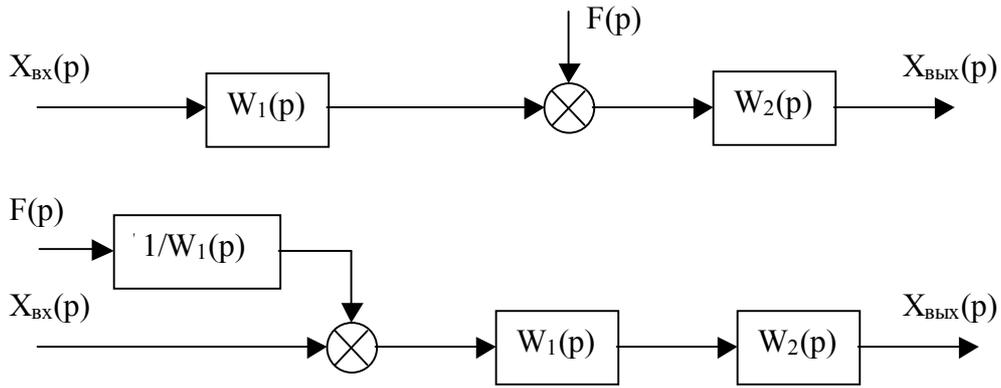


Рис. 26. Перенос сумматора с выхода на вход звена.

б) с входа звена на его выход (рис.27).

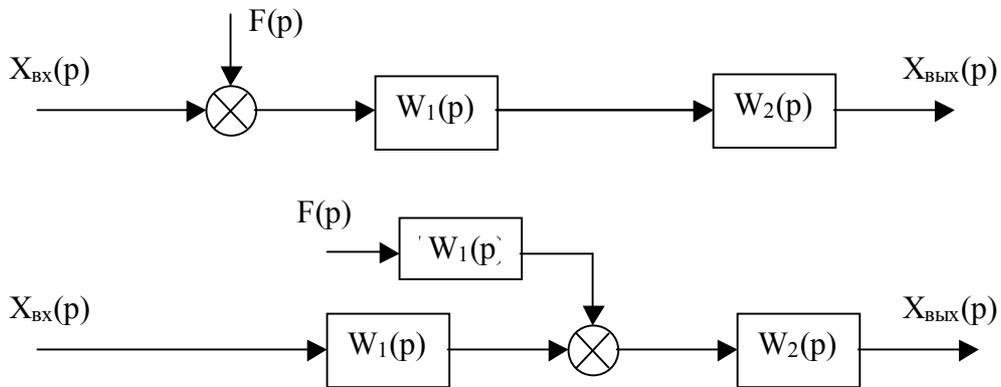


Рис. 27. Перенос сумматора с входа на выход звена.

Внешнее воздействие  $F(p)$ , приложенное к входу звена с передаточной функцией  $W_1(p)$ , можно перевести на его выход, поместив между воздействием и сумматором дополнительное звено с передаточной функцией  $W_1(p)$ .

### 5. Переносы линии связи.

а) с выхода звена на его вход (рис. 28).

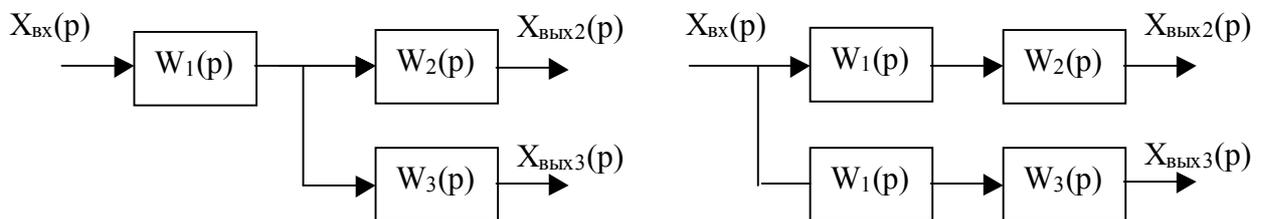
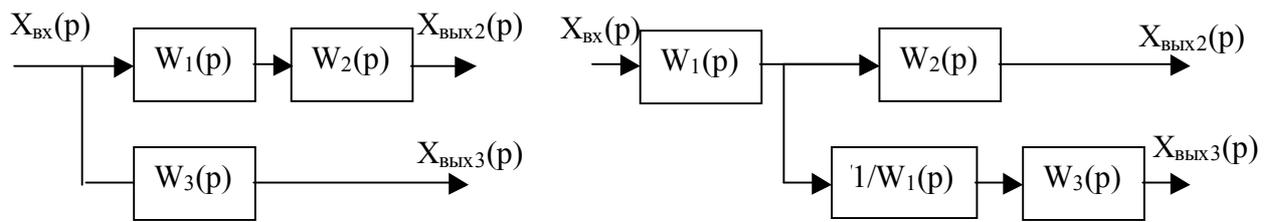


Рис. 28. Перенос линии связи с выхода звена на вход.

Точку присоединения любой структурной связи к выходу звена, имеющего передаточную функцию  $W_1(p)$ , можно перенести на его вход, включив в эту связь дополнительное звено с той же передаточной функцией  $W_1(p)$ .

б) с входа звена на его выход (рис.29).



*Рис. 29.* Перенос линии связи с входа звена на выход.

Точку присоединения любой структурной связи к входу звена, имеющего передаточную функцию  $W_1(p)$ , можно перенести на его выход, включив в эту связь дополнительное звено с той же передаточной функцией  $1/W_1(p)$ .

## 4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ САР

### 4.1. Показатели качества САР в стационарных режимах

#### 4.1.1. Определение стационарных режимов

Стационарные режимы работы систем автоматического регулирования разделяют на *случайные* и *детерминированные*.

В случайных стационарных режимах к системе приложены внешние воздействия, которые являются случайными, но стационарными функциями времени. Это означает, что характеристики случайных воздействий (параметры законов распределения, корреляционных функций и спектральных плотностей) остаются неизменными во времени.

В детерминированных стационарных режимах входные воздействия детерминированы. При этом рассматривается только вынужденное движение системы, свободное движение не учитывается.

Детерминированные режимы, в свою очередь, разделяют на *статические* и *динамические*.

В статических режимах система находится в состоянии покоя вследствие того, что внешние воздействия и параметры системы неизменны.

В динамических стационарных режимах система находится в состоянии вынужденного движения под действием возмущений, изменяющихся по установившемуся закону.

В этой работе рассматриваются только детерминированные стационарные режимы.

#### 4.1.2. Качество САР в статических режимах

Качество САР в статике оценивается величиной *статической ошибки* – разности между заданным значением выходной величины и ее действительным значением в установившемся режиме при постоянных внешних воздействиях.

Любую одноконтурную линейную САР можно описать структурной схемой, приведенной на рис. 30.

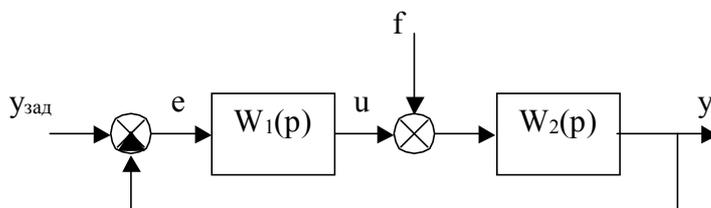


Рис. 30. Структура системы.

Получим зависимость статической ошибки от величины задающего воздействия, а также структуры и параметров передаточных функций системы. Для

этого положим  $f = 0$ . Передаточная функция ошибки по задающему воздействию:

$$W_e(p) = \frac{e(p)}{y_{\text{зад}}(p)} = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (150)$$

В статике

$$e = \frac{y_{\text{зад}}}{1 + W_1(0)W_2(0)}. \quad (151)$$

Если  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  не имеют нулевых полюсов, то

$$e = \frac{1}{1 + k_1 k_2} y_{\text{зад}}, \quad (152)$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты передачи звеньев  $W_1(p), W_2(p)$ , рассчитываемые как отношения свободных коэффициентов числителей к свободным коэффициентам знаменателей.

Из (152) видно, что статическая ошибка в данном случае тем меньше, чем больше общий коэффициент усиления в системе.

Системы, в которых есть статическая ошибка, называются *статическими*.

Если  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  имеют хотя бы один нулевой полюс, произведение  $W_1(0)W_2(0) = \infty$  и статическая ошибка равна нулю.

Отсутствие ошибки легко можно показать по структурной схеме системы. Вынесем один нулевой полюс из произведения передаточных функций  $W_1(p)W_2(p)$  в отдельный интегратор и представим схему системы в виде (рис. 31).

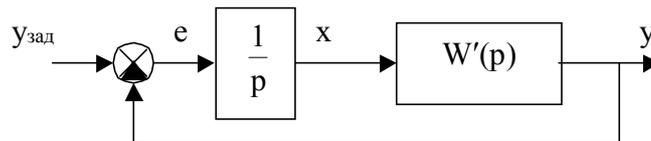


Рис. 31. Структура астатической системы.

В статике все переменные системы неизменны, поэтому выходной сигнал интегратора  $x = \text{const}$ . Это возможно только, если  $e = 0$ .

Системы, в которых статическая ошибка равна нулю, называются *астатическими*.

Рассмотрим теперь влияние возмущения на статическую ошибку. Положив  $y_{\text{зад}} = 0$ , получим  $e = -y$ .

Передаточная функция ошибки по возмущению:

$$W_e(p) = \frac{e(p)}{f(p)} = -\frac{y(p)}{f(p)} = -\frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (153)$$

В статике

$$e = -\frac{W_2(0)f}{1 + W_1(0)W_2(0)}. \quad (154)$$

Если  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  не имеют нулевых полюсов,

$$e = -\frac{k_2}{1 + k_1k_2} f. \quad (155)$$

Из (155) видно, что статическая ошибка в данном случае тем меньше (по модулю), чем больше коэффициент  $k_1$ .

Если  $W_1(p)$  не имеет нулевых полюсов, а  $W_2(p)$  имеет хотя бы один нулевой полюс, то, формально полагая  $W_2(0) = \infty$ , из (154) получим:

$$e = -\frac{1}{k_1} f. \quad (156)$$

Этого же результата можно добиться из анализа структурной схемы системы, которая в данном случае может быть приведена к следующему виду:

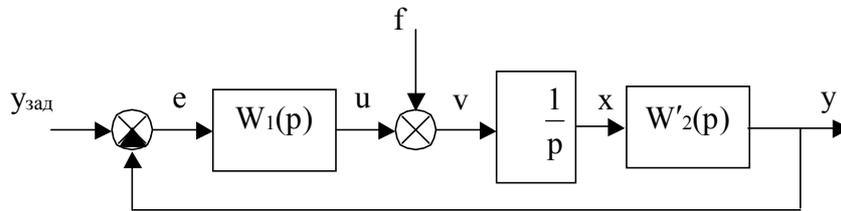


Рис. 32. К определению статической ошибки.

Действительно, в статике  $x = \text{const}$ ; следовательно:  $v = 0$ , откуда  $u = -f$  и  $e = u/k_1 = -f/k_1$ .

Если, наконец,  $W_1(p)$  имеет нулевые полюса, из (154) следует, что  $e = 0$ , независимо от того, имеются ли нулевые полюса в  $W_2(p)$  или нет. Это также видно по структурной схеме, приведенной на рис. 33.

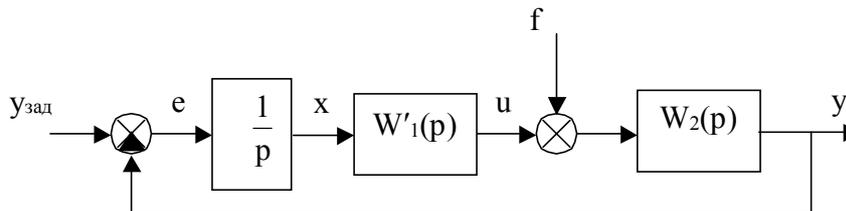


Рис. 33. К определению статической ошибки.

Действительно, в статике, когда  $x = \text{const}$ ,  $e = 0$  независимо от вида передаточной функции  $W_2(p)$ .

Таким образом, условием отсутствия установившейся ошибки, обусловленной возмущением, является наличие нулевых полюсов («свободных интеграторов») в звеньях системы, расположенных в прямом канале до места приложения возмущения.

### 4.1.3. Качество САР в стационарных динамических режимах

Стационарный динамический режим характеризуется вынужденным движением системы под влиянием воздействий, изменяющихся по установившемуся закону. В качестве такого закона рассматривают гармонический закон, закон изменения с постоянной скоростью, ускорением, высшими производными входного сигнала и др.

Реакция системы на гармонический сигнал описывается ее частотными характеристиками (см. 3.3).

Рассмотрим стационарный динамический режим, вызванный подачей на вход системы сигнала с постоянной  $k$ -й производной. Изображение по Лапласу такого сигнала при нулевых начальных условиях:

$$y_{\text{зад}}(p) = y_{\text{зад}}^{(k)}(p) \frac{1}{p^k} = \frac{c}{p} \frac{1}{p^k}, \quad (157)$$

где  $y_{\text{зад}}^{(k)}(p) = c/p$  – изображение  $k$ -й производной задающего воздействия;  $c = \text{const}$  – значение этой производной.

Величина  $k$  называется *порядком воздействия*. Так, при  $k = 0$  имеем постоянное воздействие, при  $k = 1$  – воздействие с постоянной скоростью,  $k = 2$  – воздействие с постоянным ускорением и т.д.

С учетом (157) структурную схему системы можно представить в виде изображенной на рис. 34.

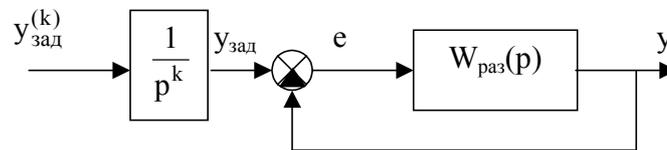


Рис. 34. Структурная схема САР при входном воздействии, изменяющемся с постоянной производной.

Определим передаточную функцию ошибки по  $k$ -й производной задающего сигнала:

$$W_e(p) = \frac{e(p)}{y_{\text{зад}}^{(k)}(p)} = \frac{1}{p^k} \times \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(p)}. \quad (158)$$

Предположим, что передаточная функция  $W_{\text{раз}}(p)$  имеет  $s$  нулевых полюсов (интегрирующих звеньев). Тогда ее можно представить следующим образом:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{1}{p^s} W'_{\text{раз}}(p), \quad (159)$$

а (158) переписать в виде

$$W_e(p) = \frac{1}{p^k + W'_{\text{раз}}(p)p^{k-s}}. \quad (160)$$

Величина  $s$  называется *порядком астатизма системы*.

Предположим, что в интересующем нас режиме ошибка постоянна и ограничена. Учитывая, что  $y_{\text{зад}}^{(k)} = c = \text{const}$ , можно считать, что система, входом которой является  $y_{\text{зад}}^{(k)}$ , а выходом – ошибка  $e$ , находится в статике. Поэтому

$$e = W_e(0) \times c = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{k'_{\text{раз}} p^{k-s}} \times c, \quad (161)$$

где  $k'_{\text{раз}} = W'_{\text{раз}}(0)$ .

Из (161) следует, что при  $k < s$   $e = 0$ .

Таким образом, *ошибка равна нулю, если порядок астатизма системы больше порядка воздействия*.

При  $k = s$

$$e = \frac{c}{k'_{\text{раз}}}. \quad (162)$$

*Ошибка конечна, прямо пропорциональна постоянной производной входного воздействия и обратно пропорциональна коэффициенту разомкнутой системы, если порядок астатизма системы равен порядку воздействия*.

При  $k > s$ , согласно (161),  $e \rightarrow \infty$ , и, следовательно, наше предположение не подтверждается. Фактически это означает, что в данном случае ошибка неограниченно возрастает.

На рис. 35 показаны возможные переходные процессы изменения выходной координаты системы, вызванные линейно нарастающим со скоростью  $v$  задающим сигналом ( $k = 1$ ), при различных порядках астатизма  $s$ .

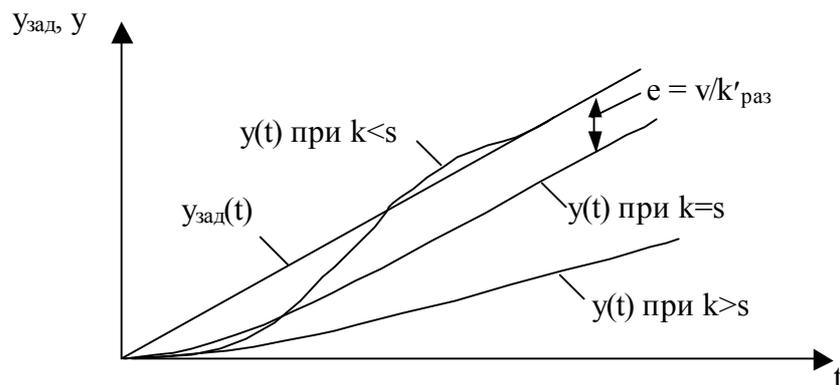


Рис. 35. Реакция системы на линейно нарастающий сигнал.

Аналогично можно провести анализ влияния на величину ошибки возмущений, изменяющихся с постоянной производной. В этом случае, как и для статических режимов, важно наличие интеграторов «до возмущения».

## 4.2. Устойчивость САР и показатели качества переходных процессов

### 4.2.1. Понятие устойчивости.

#### Условие устойчивости линейных САР.

Кроме необходимой точности в статике и в стационарных динамических режимах, система должна обладать хорошими динамическими характеристиками и, прежде всего, быть *устойчивой*.

Общее определение устойчивости можно сформулировать следующим образом.

*Система устойчива, если ее координаты (переменные состояния, выходные величины) остаются ограниченными в условиях действия на систему ограниченных по величине воздействий.*

Отметим, что неустойчивая система неработоспособна, так как любое внешнее воздействие приводит к теоретически неограниченному изменению ее переменных и поэтому САР не может выполнить ни задачу стабилизации, ни задачу слежения. На практике все переменные системы ограничены своими предельными значениями, что, однако, не меняет сути дела.

Для линейных систем справедливы следующие утверждения:

1. Устойчивость системы – ее внутреннее свойство, которое не зависит от величины и характера приложенных к системе воздействий.

2. Устойчивость определяется для системы в целом: не может одна часть системы быть устойчивой, а другая – неустойчивой. Если все же такой эффект имеет место, то это свидетельствует о том, что исследуется не одна, а две системы – либо полностью независимые друг от друга, либо с односторонним влиянием устойчивой системы на неустойчивую.

Приведенные утверждения становятся понятными, если вспомнить, что любая линейная система может быть описана линейными дифференциальными уравнениями, каждое из которых связывает между собой один вход и один выход системы. Эти уравнения непосредственно определяются из ее передаточной матрицы, причем, поскольку все элементы последней имеют один и тот же знаменатель, левые части всех уравнений будут одинаковыми.

Известно, что решение линейного дифференциального уравнения состоит из двух частей. Первая представляет собой решение соответствующего однородного уравнения и описывает свободное движение выходной координаты:

$$y_{св}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (163)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – постоянные интегрирования;  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – корни характеристического уравнения.

Кратным корням  $p_i = p_{i+1} = p_{i+2} = \dots = p_{i+k}$  в решении соответствует сумма

$$C_i e^{p_i t} + C_{i+1} t e^{p_i t} + C_{i+2} t^2 e^{p_i t} + \dots + C_n t^k e^{p_i t}. \quad (164)$$

Корни характеристического уравнения могут быть вещественными и комплексно сопряженными:  $p_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ . В последнем случае в решении появляются слагаемые вида

$$C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t) + C_{i+1} e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t). \quad (165)$$

Из (163) видно, что независимо от значений постоянных интегрирования свободная составляющая будет с течением времени стремиться к нулю (затухать), если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Таким образом, характер свободного движения определяется только коэффициентами левой части дифференциального уравнения и поэтому не зависит от внешнего воздействия. Так как для всех каналов воздействия однородное дифференциальное уравнение одно и то же, то и характер свободного движения всех выходных координат системы одинаков, – величина  $u_{св}$  либо стремится к нулю, когда все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, либо неограниченно увеличивается – в случае, если среди корней есть корни с положительной вещественной частью.

Вторая часть решения линейного дифференциального уравнения представляет собой частное решение неоднородного уравнения; применительно к САР оно описывает «вынужденное движение» выходной координаты под действием входного сигнала. Вынужденное движение определяется в основном входным сигналом и его производными (т.е. правой частью дифференциального уравнения). Если входной сигнал ограничен, а свободное движение выходной координаты затухает, то и частное решение неоднородного уравнения также ограничено.

Таким образом, *необходимым и достаточным условием устойчивости линейной системы является отрицательность вещественных частей всех корней ее характеристического полинома.*

Особыми являются следующие два случая:

1) среди корней характеристического полинома имеются нулевые. Таковую систему называют *нейтральной*. Как следует из (163), свободное движение такой системы со временем стремится к некоторой постоянной величине. Вынужденное движение нейтральной системы определяется присутствием в ее структуре интегрирующих звеньев, которые и дают нулевые корни. При входном сигнале, отличном от нуля и имеющем постоянный знак, выходная величина неограниченно увеличивается по модулю, а при снятии входного сигнала – не уменьшается до нуля, а устанавливается на достигнутом уровне. Очевидно, что нейтральная САР неработоспособна. Однако в состав устойчивой системы вполне могут входить нейтральные элементы. Примеры таких элементов – исполнительные механизмы, скорость перемещения которых пропорциональна входному сигналу (напряжению, давлению и т. д.), а положение – его интегралу по времени;

2) среди корней характеристического полинома имеются пары чисто мнимых корней  $p_{i,i+1} = \pm j\beta_i$ . В данном случае свободное движение системы

включает незатухающие гармонические составляющие с угловой частотой колебаний, равной  $\beta_i$ . Поэтому если систему вывести из положения равновесия, то через некоторое время в ней устанавливаются незатухающие колебания даже при отсутствии внешних воздействий. Эти колебания называют *автоколебаниями*, а про САР говорят, что она находится *на границе устойчивости*. При небольших изменениях параметров такой системы (постоянных времени, коэффициентов передач и т.д.) она может стать как устойчивой, так и неустойчивой в зависимости от того, какого знака вещественные части появятся у ранее чисто мнимых пар корней. САР, находящаяся на границе устойчивости, неработоспособна.

Рассмотрим физические аспекты устойчивости систем автоматического регулирования. Входящие в САР технические объекты регулирования в большинстве случаев устойчивы или нейтральны. Другие элементы системы (датчики, преобразователи, усилители, регуляторы, исполнительные механизмы и т.д.) не могут быть неустойчивыми в силу своего назначения. Поэтому интересно рассмотреть причину появления неустойчивости САР в целом. Ясно, что система, состоящая из последовательного соединения устойчивых или нейтральных звеньев, не может быть неустойчивой, так как корни ее характеристического полинома – это корни знаменателей передаточных функций всех звеньев, входящих в соединение. Следовательно неустойчивой система может стать только при ее замыкании обратной связью.

Вспомним, что основным принципом регулирования является регулирование по отклонению, согласно которому управляющее воздействие  $u(t)$  формируется в общем случае как функция ошибки регулирования  $e(t)$ . В простейшем случае применяется так называемый пропорциональный регулятор, формирующий управление по закону

$$u(t) = k_p e(t), \quad (166)$$

где  $k_p$  – коэффициент передачи (усиления) регулятора. В качестве регулятора в данном случае может использоваться дифференциальный усилитель.

На рис. 36 показана переходная характеристика неустойчивой системы с П-регулятором.

При подаче на вход системы единичного ступенчатого воздействия появляется ошибка  $e(0) = y_{\text{зад}} - y(0) = 1$ . Регулятор формирует пропорциональное ей воздействие на объект, которое заставляет увеличиваться его выходную величину. В момент времени  $t_1$  величина  $y(t)$  достигает значения единицы и ошибка регулирования становится равной нулю. Однако из-за инерционности объекта движение системы на этом не останавливается, и выходная величина продолжает увеличиваться, что приводит к изменению знаков ошибки и управляющего воздействия. Спустя некоторое время выходная величина начинает уменьшаться и в момент времени  $t_2$  вновь становится равной единице. Далее рассмотренный процесс повторяется. При этом, если регулятор излишне энергично воздействует на объект, то, как показано на рис. 36, каждое новое отклонение превышает предыдущее и переходный процесс имеет вид расходящихся колебаний. Таким образом, неустойчивость системы – это, по сути,

неустойчивость замкнутого контура, включающего инерционный объект и «слишком активный» регулятор. В 4.2.4. влияние коэффициента передачи регулятора на устойчивость системы рассмотрено более подробно.

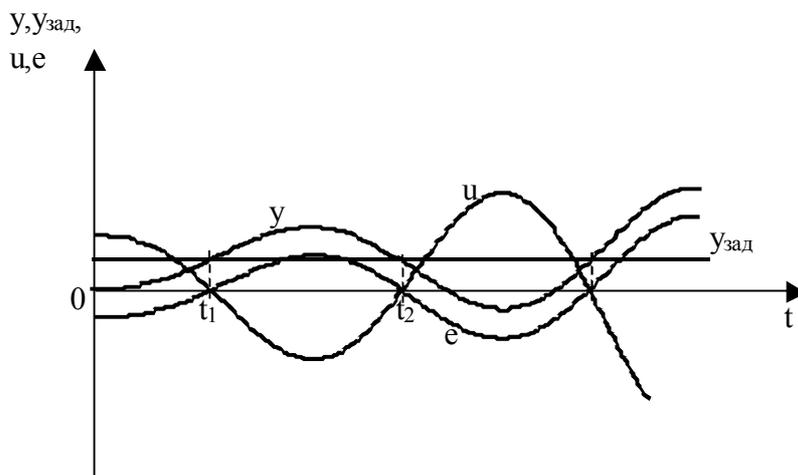


Рис. 36. Переходная характеристика неустойчивой системы с П-регулятором.

#### 4.2.2. Критерии устойчивости линейных САР

Как было показано, для проверки устойчивости линейной системы достаточно определить корни ее характеристического полинома. В настоящее время это не представляет трудности в связи с развитием вычислительной техники и появлением математических пакетов прикладных программ. А раньше, когда ЭВМ не существовало или они были редкими, для проверки устойчивости использовались так называемые *критерии устойчивости*, позволяющие судить об устойчивости, не прибегая к вычислению корней характеристического полинома системы. Хотя сейчас эти критерии потеряли актуальность в качестве средств определения устойчивости, большинство их активно используется уже как средство синтеза системы.

Критерии устойчивости разделяют на *алгебраические* и *частотные*.

Алгебраические критерии определяют устойчивость системы с помощью некоторых вычислений над коэффициентами ее характеристического полинома. К ним относятся критерии Рауса и Гурвица (которые по сути представляют собой один критерий, изложенный в различных формах) [7]. Критерии позволяют определять устойчивость, однако для синтеза систем малоприменимы. Поэтому ограничимся здесь одним только следствием из этих критериев, а именно необходимым условием устойчивости системы: *для устойчивости системы необходимо (но недостаточно), чтобы все коэффициенты характеристического полинома были отличны от нуля и имели один и тот же знак*. Это условие имеет большую практическую значимость, так как позволяет судить о возможности построения устойчивой системы исходя только из

структур объекта и регулирующего устройства (структурной устойчивости). Для демонстрации приведем следующий пример.

Пусть имеется объект регулирования с передаточной функцией

$$W_{об} = \frac{k_{об}}{p(T_{об}p + 1)}. \quad (167)$$

На объект оказывает воздействие исполнительный механизм с передаточной функцией

$$W_{им} = \frac{k_{им}}{p}. \quad (168)$$

Требуется построить замкнутую систему регулирования.

Самым простым решением видится применение усилителя с дифференциальным входом, который будет управлять исполнительным механизмом с помощью усиленного сигнала разности между заданным и фактическим значениями выходной величины (рис. 37).

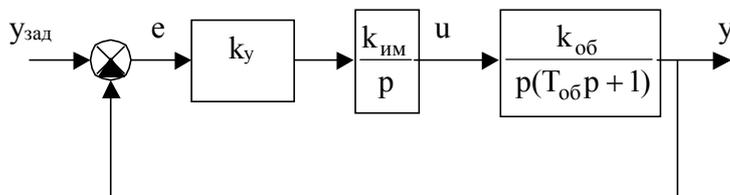


Рис. 37. Структурная схема системы.

Построенный таким образом регулятор, включающий усилитель и исполнительный механизм, реализует интегральный закон регулирования – управляющее воздействие пропорционально интегралу ошибки (см. 5.2.1).

Проверим устойчивость системы. Передаточная функция замкнутого контура

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{k_y k_{им} k_{об}}{T_{об}p^3 + p^2 + k_y k_{им} k_{об}}. \quad (169)$$

Из (169) видно, что в характеристическом полиноме системы отсутствует слагаемое с «р» в первой степени, или, другими словами, соответствующий коэффициент полинома равен нулю. Это противоречит необходимому условию устойчивости и означает, что система будет неустойчивой при любых  $k_y$ , какими бы ни были другие ее параметры ( $k_{об}$ ,  $T_{об}$ ,  $k_{им}$ ). Следовательно, предлагаемая структура неработоспособна и необходимо выбрать другой закон регулирования.

Приведенный пример демонстрирует понятие *структурной неустойчивости* и, кроме того, доказывает известное утверждение, что для астатических объектов интегральный закон регулирования неприемлем.

Частотные критерии определяют устойчивость системы по различным ее частотным характеристикам. К таким критериям относятся *критерии Ми-*

хайлова и Найквиста. Они широко используются при синтезе систем, поэтому остановимся на них подробнее.

Критерий устойчивости Михайлова основан на рассмотрении характеристического полинома замкнутой системы

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0. \quad (170)$$

Заменой оператора «p» на оператор «jω» в (170) получаем частотную характеристику

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0, \quad (171)$$

которую можно представить в виде

$$D(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (172)$$

Построив характеристику  $D(j\omega)$  на комплексной плоскости, получаем так называемый годограф Михайлова. Критерий формулируется следующим образом.

*Система устойчива, если годограф Михайлова, начинаясь на действительной положительной полуоси, огибает против часовой стрелки начало координат, проходя последовательно столько квадрантов, каков порядок системы, и уходя в бесконечность в последнем квадранте.*

Условием нахождения системы на границе устойчивости является прохождение годографа Михайлова через начало координат. Действительно, в данном случае уравнение  $D(j\omega) = 0$  имеет решение в виде пары сопряженных мнимых корней  $p = \pm j\omega^*$ , что означает наличие в системе незатухающих колебаний с частотой  $\omega^*$ .

Рис. 38 демонстрирует применение критерия Михайлова для системы третьего порядка.

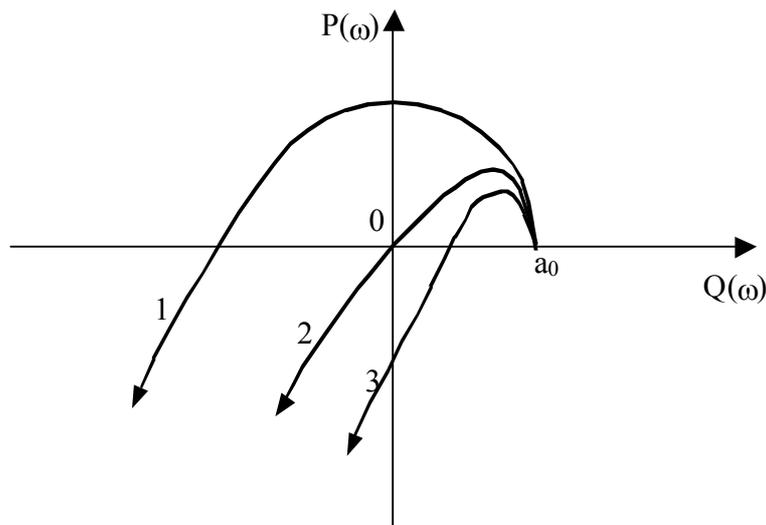


Рис. 38. Годографы Михайлова для систем третьего порядка: 1 – устойчивой; 2 – на границе устойчивости; 3 – неустойчивой.

Критерий Михайлова применяется при синтезе линейных систем. В частности, он положен в основу так называемого метода D-разбиения [2,7].

Критерий устойчивости Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по АФЧХ разомкнутой. Частотные характеристики разомкнутых систем легко строятся по характеристикам входящих в них звеньев и легко выражаются через параметры последних. Это определило большую практическую значимость критерия в качестве вспомогательного средства синтеза систем (см., например, 5.2.3).

Прежде чем сформулировать критерий, рассмотрим свойства АФЧХ разомкнутых систем. При этом будем полагать, что все звенья, входящие в систему, являются минимально-фазовыми, т.е. имеют только «левые» нули и «левые» (и, возможно, нулевые) полюса. Большинство реальных систем удовлетворяет этому требованию. Передаточная функция разомкнутой системы в общем случае имеет вид:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^k (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1)}, \quad (173)$$

где  $m$  – порядок числителя;  $k$  – число нулевых полюсов или порядок астатизма системы;  $n+k$  – порядок знаменателя.

Отметим, что для всех реальных систем порядок числителя  $W_{\text{раз}}(p)$  меньше порядка знаменателя, т.е.  $m < k+n$ . Величина  $\nu = k+n-m$  называется *относительным порядком передаточной функции*.

В случае статической системы, когда  $k=0$ ,  $W_{\text{раз}}(j0) = b_0$ . Следовательно, АФЧХ начинается на положительной вещественной полуоси в точке, ордината которой равна коэффициенту передачи разомкнутой системы.

Для астатических систем  $k>0$  и  $W_{\text{раз}}(j0) = \infty$ . При этом фазовый сдвиг на нулевой частоте определяется порядком астатизма:

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{2} k. \quad (174)$$

Это объясняется тем, что каждое интегрирующее звено, входящее в структуру  $W_{\text{раз}}(p)$ , дает при  $\omega=0$  фазовый сдвиг, равный  $-\pi/2$ . Другие звенья на нулевой частоте фазового сдвига не дают.

Таким образом, при  $\omega \rightarrow 0$  АФЧХ стремится к прямой линии, параллельной той координатной полуоси, угол между которой и действительной положительной полуосью определяется согласно (174).

При  $\omega \rightarrow \infty$  АФЧХ системы стремится к началу координат. Это следует из того, что при  $\omega \rightarrow \infty$  амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы  $A_{\text{раз}}(\omega) \rightarrow 0$ , так как порядок знаменателя  $W_{\text{раз}}(p)$  больше порядка числителя.

Предельный фазовый сдвиг при  $\omega \rightarrow \infty$  может быть определен по формуле:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \nu = -\frac{\pi}{2} (k + n - m). \quad (175)$$

Смысл выражения (175) вполне понятен, если вспомнить, что при  $\omega \rightarrow \infty$  суммарный фазовый сдвиг  $k$  интегрирующих звеньев равен  $-k\pi/2$  рад, аaperиодические и колебательные звенья, формирующие «скобку» знаменателя  $W_{\text{раз}}(p)$ , сдвигают фазу на  $-n\pi/2$  рад, а форсирующие звенья числителя в сумме дают сдвиг  $+m\pi/2$  рад.

При  $\omega \rightarrow \infty$  направление АФЧХ совпадает с направлением той полуоси комплексной плоскости, угол между которой и действительной положительной полуосью определяется согласно (175).

Вернемся к критерию Найквиста. Для систем, устойчивых и нейтральных в разомкнутом состоянии, о которых шла речь, критерий формулируется следующим образом: *замкнутая система устойчива, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку с координатами  $(-1, 0)$* . Если АФЧХ проходит через данную точку, замкнутая система находится на границе устойчивости.

Рассмотрим примеры АФЧХ различных разомкнутых систем. На рис. 39 приведены АФЧХ статических систем.

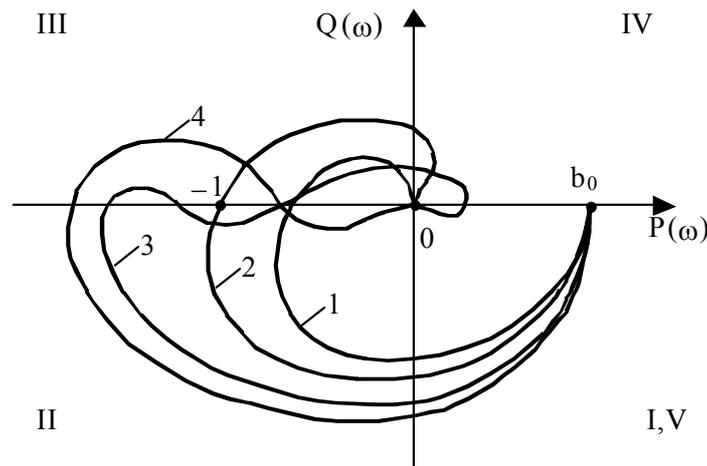


Рис. 39. АФЧХ разомкнутых статических систем.

Характеристика 1 соответствует устойчивой системе, так как не охватывает точку с координатами  $(-1, 0)$ . Относительный порядок передаточной функции разомкнутой системы равен трем, так как фазовый сдвиг при  $\omega \rightarrow \infty$  равен  $-3\pi/2$ .

Характеристика 2 проходит через точку с координатами  $(-1, 0)$  и поэтому соответствует системе, находящейся на границе устойчивости. Относительный порядок  $W_{\text{раз}}(p)$  здесь также равен трем, однако порядок знаменателя не менее четырех, о чем свидетельствует то, что характеристика приходит в начало координат в четвертом квадранте. Очевидно, что на высоких частотах сказывается влияние как минимум одного форсирующего звена с малой постоянной времени, дающего положительный фазовый сдвиг.

Характеристика 3 соответствует устойчивой системе. Относительный порядок передаточной функции равен четырем, так как фазовый сдвиг при  $\omega \rightarrow \infty$  равен  $-2\pi$ . Порядок числителя  $W_{\text{раз}}(p)$  в данном случае не меньше двух и, следовательно, знаменателя – не меньше шести. Об этом свидетельствуют «временное» увеличение  $\varphi(\omega)$  на средних частотах, вызванное действием как минимум одного форсирующего звена со средней постоянной времени, и увеличение  $\varphi(\omega)$  на высоких частотах, вызванное действием как минимум одного форсирующего звена с малой постоянной времени.

Характеристика 4 соответствует неустойчивой системе, так как охватывает точку с координатами  $(-1,0)$ . Передаточная функция разомкнутой системы имеет относительный порядок, равный двум, так как фазовый сдвиг при  $\omega \rightarrow \infty$  равен  $-\pi$ . На средних частотах заметно влияние форсирующего звена (звеньев), поэтому порядок числителя  $W_{\text{раз}}(p)$  в данном случае не меньше одного, а знаменателя – не меньше трех.

На рис. 40 приведены примеры АФЧХ астатических систем.

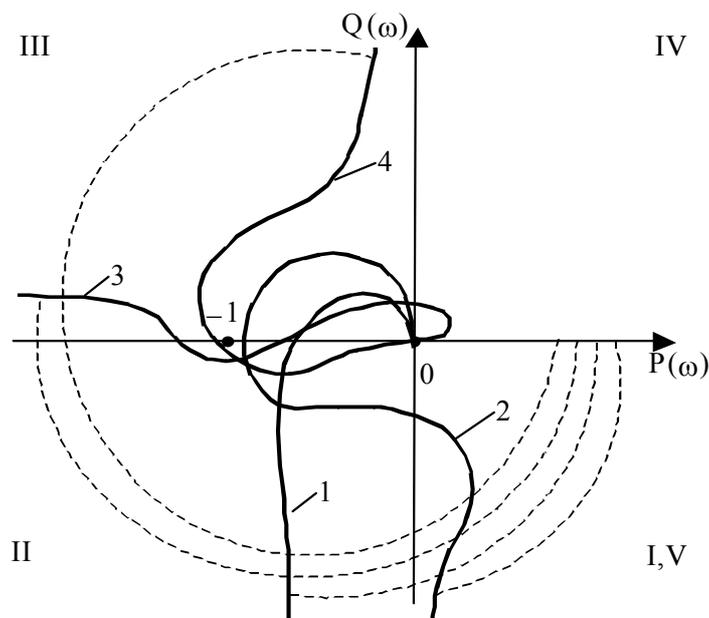


Рис. 40. АФЧХ разомкнутых систем с астатизмом первого (1,2), второго (3) и третьего (4) порядков.

Отметим, что судить об устойчивости астатических систем с помощью приведенного выше критерия можно, если мысленно соединить «начала» АФЧХ с положительной вещественной полуосью, как это и показано прерывистыми линиями на рис. 40.

Характеристики 1 и 2 соответствуют устойчивым системам с астатизмом первого порядка ( $\varphi(0) = -\pi/2$ ). Относительный порядок передаточных функций разомкнутых систем равен трем (при  $\omega \rightarrow \infty$   $\varphi(\omega) \rightarrow -3\pi/2$ ). О характеристике 2 можно также сказать, что соответствующая ей передаточная функция содержит как минимум одно форсирующее звено с большой постоянной

времени. Действием этого звена обусловлено временное повышение фазового сдвига на низких частотах.

Характеристика 3 соответствует устойчивой системе с астатизмом второго порядка ( $\varphi(0) = -\pi$ ). Относительный порядок передаточной функции равен четырем, так как фазовый сдвиг при  $\omega \rightarrow \infty$  равен  $-2\pi$ . В структуре  $W_{\text{раз}}(p)$  присутствует как минимум одно форсирующее звено, дающее увеличение фазы на средних частотах. Из рис. 40 видно, что при отсутствии этого звена невозможно обеспечить устойчивость системы с астатизмом второго порядка. Это также легко можно показать с помощью анализа передаточной функции замкнутой системы (см. пример системы, изображенной на рис. 37).

Характеристика 4 соответствует устойчивой системе с астатизмом третьего порядка ( $\varphi(0) = -3\pi/2$ ). Относительный порядок передаточной функции равен двум (при  $\omega \rightarrow \infty$   $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi$ ). АФЧХ проходит в третьем и втором квадрантах. Во втором квадранте  $\varphi(\omega) > -\pi$ . Таким образом, фазовый сдвиг увеличивается, начиная с частоты  $\omega=0$ , более чем на  $\pi/2$  рад. Следовательно, в структуре передаточной функции присутствуют как минимум два форсирующих звена.

Отметим, что без этих звеньев невозможно обеспечить устойчивость системы с астатизмом третьего порядка, что также легко показать из анализа передаточной функции замкнутой системы.

Критерий Найквиста можно интерпретировать с помощью амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик разомкнутой системы: *система, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива при замыкании, если при частоте, на которой  $A(\omega)$  окончательно становится меньше единицы (частоте среза), значение  $\varphi(\omega)$  будет больше  $-\pi$* . (рис.41).

Важнейшими параметрами АФЧХ, связанными с критерием Найквиста, являются *запасы устойчивости по фазе и по амплитуде*.

Запас устойчивости по фазе определяется величиной  $\Delta\varphi$ , на которую должно возрасти запаздывание по фазе в системе на частоте среза  $\omega_c$ , чтобы она оказалась на границе устойчивости (рис. 41).

Запас устойчивости по амплитуде определяется величиной  $\Delta A$ , на которую должен увеличиться модуль вектора АФЧХ на частоте, соответствующей фазовому сдвигу  $-\pi$  рад, чтобы система оказалась на границе устойчивости.

Запасы устойчивости могут быть определены также по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы (рис.41б). При этом запас устойчивости по амплитуде выражается в децибелах:

$$\Delta L = |20 \lg(1 - \Delta A)|. \quad (176)$$

Чем больше запасы устойчивости, тем менее колебательной является переходная характеристика системы. При расчете систем рекомендуется выбирать  $\Delta\varphi \geq 30^\circ$ ,  $\Delta A \geq 0,5$  ( $\Delta L \geq 6\text{дБ}$ ) [7].

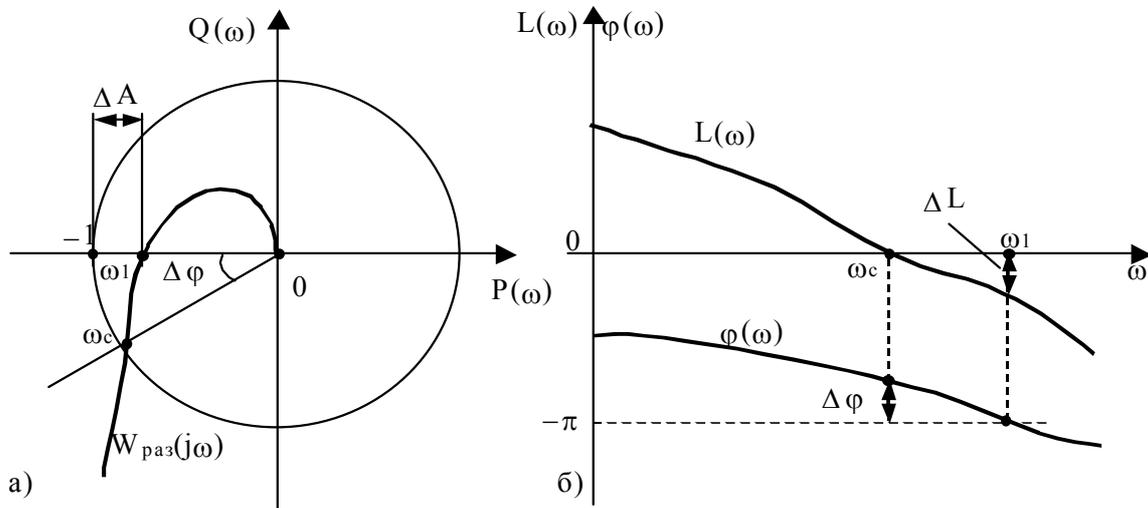


Рис. 41. К определению запасов устойчивости по АФЧХ (а) и по ЛАЧХ и ФЧХ (б) разомкнутой системы.

С помощью АФЧХ разомкнутой системы можно легко определить коэффициент передачи пропорционального регулятора, обеспечивающий любой заданный запас устойчивости по амплитуде, в том числе и *критический коэффициент*, при котором система находится на границе устойчивости.

АФЧХ разомкнутой системы с пропорциональным регулятором пропорциональна АФЧХ объекта:

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = k_p W_{\text{об}}(j\omega), \quad (177)$$

где  $k_p$  – коэффициент передачи регулятора.

Следовательно, на любой частоте вектор АФЧХ системы совпадает по направлению с вектором АФЧХ объекта, но отличается от него по модулю в  $k_p$  раз.

Коэффициент передачи регулятора, соответствующий запасу устойчивости  $\Delta A$ , может быть определен через модуль вектора  $W_{\text{об}}(j\omega)$  на частоте, для которой фазовый сдвиг АФЧХ равен  $-\pi$  рад (рис. 42):

$$k_{\text{кр}} = \frac{|\vec{OA}|}{|\vec{OB}|} = \frac{1 - \Delta A}{|\vec{OB}|}. \quad (178)$$

Очевидно, что критический коэффициент определяется из (178), если положить  $\Delta A = 0$ .

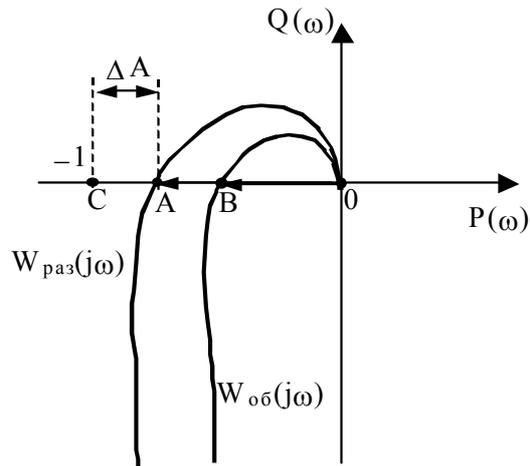


Рис. 42. К определению коэффициента передачи регулятора.

#### 4.2.3. Показатели качества переходных процессов

Качество переходных процессов показывается характером их протекания – длительностью и колебательностью. Переходные процессы в линейной системе описываются функциями времени, которые являются решениями дифференциальных уравнений системы и в общем случае имеют вид:

$$y(t) = y_{\text{вын}}(t) + \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (179)$$

где  $y_{\text{вын}}(t)$  – вынужденная составляющая движения выходной величины, определяемая в основном внешним воздействием;  $C_i$  – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий;  $p_i$  – корни характеристического полинома системы;  $n$  – порядок системы.

Таким образом, вид переходного процесса зависит от внешнего воздействия, свойств системы и ее начального состояния. Чтобы оценка качества процесса была информативной, необходимо уменьшить количество факторов, которые его определяют. С этой целью качество переходных процессов обычно оценивают по переходной характеристике системы – ее реакции на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Как известно, данная характеристика целиком зависит от свойств системы.

К основным показателям качества относятся: *время переходного процесса, максимальное отклонение, перерегулирование и колебательность*. Все они непосредственно определяются по переходной характеристике системы (рис.43) и поэтому называются *прямыми показателями качества переходных процессов*.

Время переходного процесса  $t_p$  характеризует быстродействие системы и определяется как интервал времени от начала переходного процесса до мо-

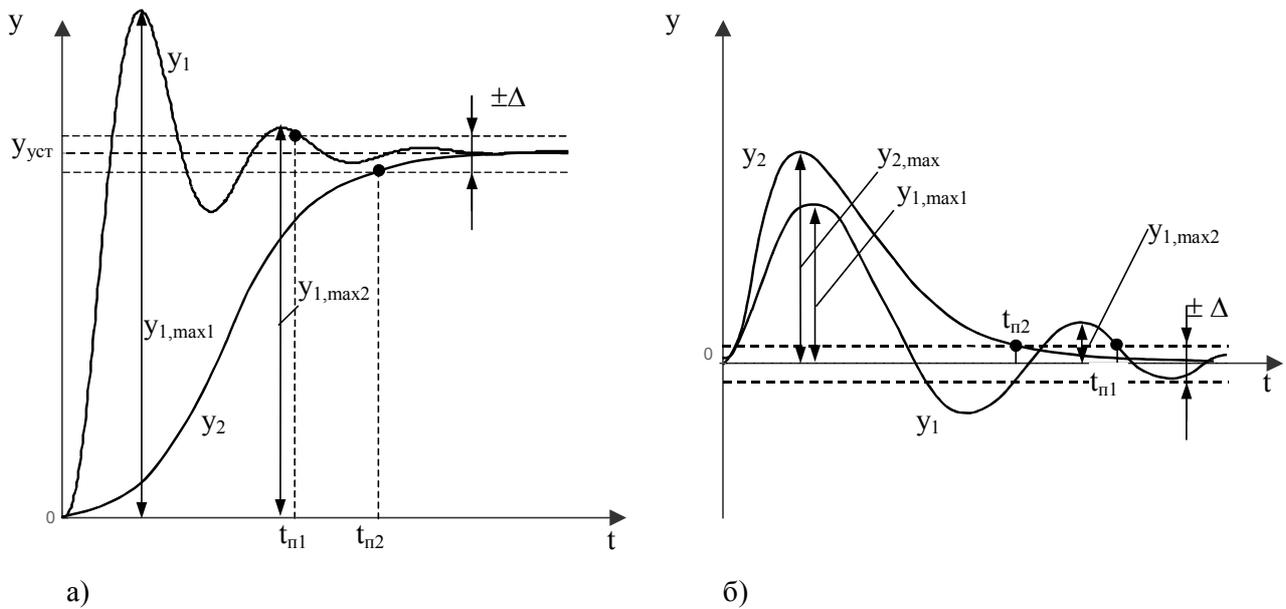


Рис. 43. Переходные характеристики системы по заданию (а) и возмущению (б).

мента, когда отклонение выходной величины от ее нового установившегося значения становится меньше определенной достаточно малой величины  $\Delta$  [7]. В качестве последней часто используется 5% от установившегося (либо номинального, среднего и т.д.) значения выходной величины. На практике  $\Delta$  может быть принята равной, например, максимальной абсолютной погрешности или пределу чувствительности измерительного преобразователя.

Максимальное отклонение определяется для переходной характеристики системы по возмущению и равно максимальному за время переходного процесса значению выходной величины. На рис. 43б для процессов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  максимальное отклонение обозначено соответственно как  $y_{1,max1}$  и  $y_{2,max}$ .

Перерегулирование определяется для переходных характеристик по задающему воздействию. Оно равно отношению максимального отклонения выходной величины от установившегося значения к самому установившемуся значению. Обычно перерегулирование выражают в процентах:

$$\sigma = \frac{y_{max} - y_{уст}}{y_{уст}} 100\%. \quad (180)$$

Для процесса  $y_1(t)$  (рис. 43а)  $y_{max} = y_{1,max1}$ .

Для апериодических (неколебательных) процессов ( $y_2(t)$  на рис. 43а) перерегулирование равно нулю. Часто о таких процессах говорят как о *процессах без перерегулирования*.

Колебательность характеризует скорость затухания колебаний переходного процесса. Обычно колебательность определяют числом колебаний, равным числу минимумов кривой переходного процесса за время  $t_{п}$ . Иногда колебательность оценивают через отношение двух соседних максимальных

отклонений кривой от установившегося значения, которое либо выражают в процентах:

$$\frac{\Delta y_{\max 1}}{\Delta y_{\max 2}} 100\% = \frac{y_{\max 1} - y_{\text{уст}}}{y_{\max 2} - y_{\text{уст}}} 100\%, \quad (181)$$

либо используют для вычисления так называемого *логарифмического декремента затухания системы*

$$d_c = \ln \frac{\Delta y_{\max 1}}{\Delta y_{\max 2}}. \quad (182)$$

Кроме прямых показателей качества переходных процессов, существуют *косвенные* показатели. В частности, к ним относятся *интегральные, корневые* и *частотные*. Следует отметить, что все косвенные показатели являются средством синтеза, а не анализа САР, так как применяются в основном для настройки параметров регулирующих устройств.

Интегральные показатели являются интегралами в пределах от 0 до  $\infty$  некоторых функций, включающих  $y(t)$ . Наиболее часто используется так называемая *квадратичная интегральная оценка*:

$$I = \int_0^{\infty} (y_{\text{зад}}(t) - y(t))^2 dt, \quad (183)$$

которая представляет собой качественную оценку площади, заключенной между кривыми  $y_{\text{зад}}(t)$  и  $y(t)$ . Чем меньше величина  $I$ , тем меньше эта площадь и тем предпочтительнее переходной процесс.

Разработаны методы расчета оптимальных настроек регуляторов на минимум показателя  $I$ , которые получили название *методов расчета на минимальный интегральный критерий*.

Корневые показатели основаны на оценке качества переходных процессов по значениям полюсов и нулей передаточной функции системы. Основными из них являются *степень устойчивости* и *корневой показатель колебательности*.

Степень устойчивости  $\eta$  определяется минимальной по модулю вещественной частью полюса среди всех полюсов передаточной функции системы:

$$\eta = \min |\alpha_i|, \quad i = 1 \dots n, \quad (184)$$

где  $n$  – порядок знаменателя передаточной функции.

Согласно (179) полюс либо пара комплексно-сопряженных полюсов, имеющих вещественную часть равную  $-\eta$ , соответствуют самой длительной свободной составляющей переходной характеристики, поэтому степень устойчивости показывает быстродействие системы. Зная  $\eta$ , можно оценить время переходного процесса:

$$t_{\Pi} \leq \frac{3}{\eta}. \quad (185)$$

Существует возможность использовать степень устойчивости как показатель, на который настраиваются параметры регулятора при синтезе системы. Однако следует отметить, что настройка системы на требуемое быстрое действие, без учета других показателей, обычно приводит к тому, что синтезированная система обладает слишком большой колебательностью.

Корневым показателем колебательности  $m$  называется минимальное по модулю среди всех пар комплексно-сопряженных корней характеристического полинома замкнутой системы отношение действительной части корня к мнимой:

$$m = \min \left| \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right|, \quad i = 1 \dots k, \quad (186)$$

где  $k$  – число пар комплексно-сопряженных корней характеристического полинома замкнутой системы.

Расположение корней на комплексной плоскости иллюстрируется рис. 44. Легко показать, что если система обладает показателем колебательности  $m$ , то одна пара корней ее характеристического полинома лежит на лучах АО и ОВ, проведенных из начала координат под углом  $\arctg m$  к мнимой оси, а все остальные корни – внутри сектора АОВ.

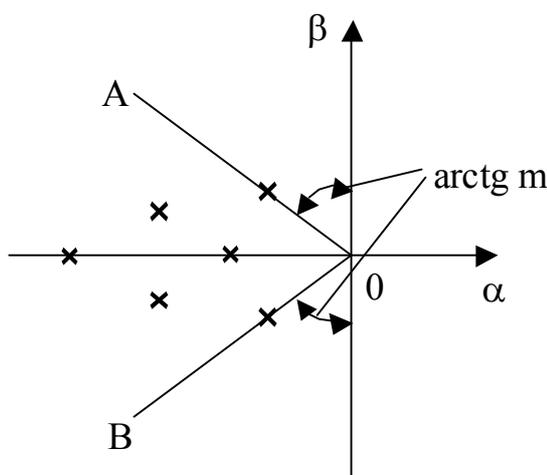


Рис. 44. К определению корневого показателя колебательности.

Корневой показатель колебательности служит оценкой колебательности переходной характеристики системы. Эта характеристика, как известно, формируется в виде суммы элементарных составляющих: аperiodических, соответствующих вещественным корням характеристического полинома, и гармонических, соответствующих комплексно-сопряженным парам корней.

Рассмотрим элементарную гармоническую составляющую

$$h_i = C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i), \quad (187)$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  – вещественная и мнимая части корней пары  $\alpha_i \pm j\beta_i$  (для устойчивости системы, очевидно, необходимо, чтобы  $\alpha_i < 0$ );  $C_i$  – постоянная интегрирования;  $\varphi_i$  – фазовый сдвиг составляющей.

Определим колебательность данной составляющей как отношение двух соседних ее максимумов (рис. 45):

$$\frac{h_{i,\max 1}}{h_{i,\max 2}} = e^{\alpha_i \tau_i} = e^{\frac{2\pi\alpha_i}{\beta_i}} = e^{-2\pi \left| \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right|} = e^{-2\pi m_i}, \quad (188)$$

где  $\tau_i = \frac{2\pi}{\beta_i}$  – период колебаний, а  $m_i = \left| \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right|$  – показатель колебательности составляющей.

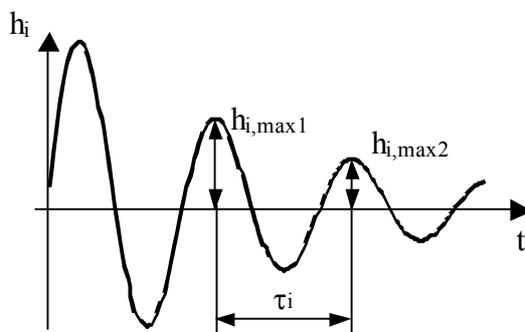


Рис. 45. К определению корневого показателя колебательности.

Таким образом, чем больше  $m_i$ , тем быстрее затухает данная составляющая характеристики. При этом минимальное значение  $m_i$  среди всех гармонических составляющих может служить оценкой колебательности всей переходной характеристики, так как соответствует наиболее медленно затухающей составляющей.

Значение  $m$  обычно задается в пределах 0,25...0,4.

Метод расчета регуляторов на заданное значение корневого показателя колебательности широко применяется на практике и поэтому подробно изложен в 5.2.4.

Частотные показатели качества переходных процессов позволяют судить о качестве по частотным характеристикам САР. При этом могут использоваться различные характеристики как замкнутой, так и разомкнутой системы.

Для минимально-фазовых систем качество переходных процессов может быть оценено по АЧХ замкнутой системы. Как известно, для таких систем АЧХ и ФЧХ однозначно связаны, и поэтому все свойства системы можно определить по одной амплитудной характеристике. Колебательность системы определяется по *частотному показателю колебательности*.

Частотный показатель колебательности есть отношение максимального значения амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы к значению этой характеристики при нулевой частоте:

$$M = \frac{A_{\text{зам}}(\omega_{\text{рез}})}{A_{\text{зам}}(0)} = \frac{|W_{\text{зам}}(\omega_{\text{рез}})|}{W_{\text{зам}}(0)}, \quad (189)$$

где  $\omega_{\text{рез}}$  – резонансная частота, при которой и наблюдается максимум АЧХ системы (рис. 46).

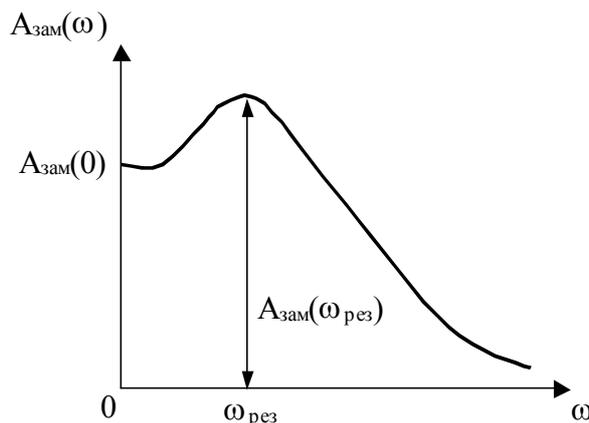


Рис. 46. К определению частотного показателя колебательности.

Частотный показатель колебательности косвенно оценивает колебательность системы. Чем больше  $M$ , тем более колебательной является ее переходная характеристика. При  $M = 1$  колебания в системе отсутствуют. При  $M \rightarrow \infty$  в системе присутствуют незатухающие колебания с частотой  $\omega_{\text{рез}}$ . Оптимальным обычно считается  $M = 1,1 \dots 1,5$ .

Методика расчета регуляторов на заданный частотный показатель колебательности приведена в 5.2.3.

Длительность переходного процесса определяется шириной  $A_{\text{зам}}(\omega)$ . При этом наблюдается «обратная» зависимость: чем «шире» частотная характеристика системы, тем короче ее переходная характеристика, т.е. тем меньше  $t_{\text{п}}$ . В первом приближении время переходного процесса может быть оценено по резонансной частоте  $\omega_{\text{р}}$ . Так как частота колебаний переходной характеристики равна примерно  $\omega_{\text{р}}$ , то время достижения первого максимума переходной характеристики близко половине периода колебаний этой частоты:

$$t_{\text{max1}} = \frac{\pi}{\omega_{\text{р}}}. \quad (190)$$

Если предположить, что переходная характеристика в течение  $t_{\text{п}}$  имеет 1–2 колебания, то:

$$t_{\pi} = (1..2) \frac{2\pi}{\omega_p}. \quad (191)$$

Качество переходных процессов может быть также определено по частотным характеристикам разомкнутых систем.

В первом приближении длительность и колебательность переходной характеристики могут быть оценены по частоте среза и величинам запасов по фазе и по амплитуде, определенных по АФЧХ или по ЛАЧХ и ФЧХ. При этом в случае колебательной переходной характеристики резонансная частота  $\omega_p$  АЧХ замкнутой системы близка к частоте среза  $\omega_c$ , и значения  $t_{\max 1}$  и  $t_{\pi}$  могут быть определены по формулам (190) и (191) при подстановке в них  $\omega_p \approx \omega_c$ . В случае неколебательной переходной характеристики:

$$t_{\pi} \approx \frac{\pi}{\omega_c}. \quad (192)$$

Колебательность системы, как уже отмечалось, считается приемлемой, если запас по фазе не менее  $30^\circ$ , а по амплитуде не менее 0,5 (что соответствует 6 дБ по ЛАЧХ).

Существуют методы расчета регуляторов на заданные запасы устойчивости.

В случае минимально-фазовой системы для оценки качества переходных процессов может использоваться одна ЛАЧХ. Этот факт позволяет применять ЛАЧХ как средство синтеза. В частности широко используется метод, в котором структура и параметры регулятора определяются путем сопоставления желаемой (эталонной) ЛАЧХ разомкнутой системы и ЛАЧХ объекта регулирования (см. 5.3).

#### **4.2.4. Влияние коэффициента усиления разомкнутой системы на устойчивость и качество переходных процессов**

Рассмотрим влияние коэффициента регулятора на устойчивость и качество переходных процессов на примере системы, приведенной на рис. 47.

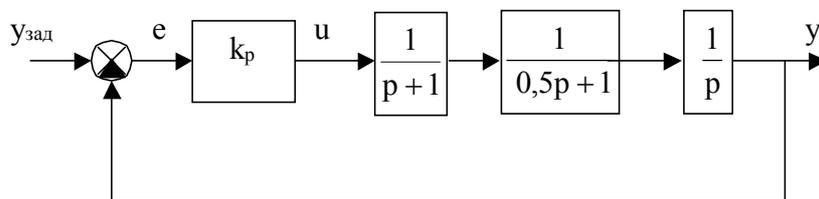


Рис. 47. Структурная схема САР.

Разомкнутая система нейтральна, так как состоит из устойчивых звеньев и одного нейтрального. Ее передаточная функция равна

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{2k_p}{p^3 + 3p^2 + 2p}. \quad (193)$$

Корни характеристического полинома разомкнутой системы  $0, -1, -2$ .  
 Передаточная функция замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{2k_p}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2 + 2k_p}. \quad (194)$$

На рис. 48 приведен корневой годограф системы – зависимость положения ее полюсов на комплексной плоскости от коэффициента передачи регулятора.

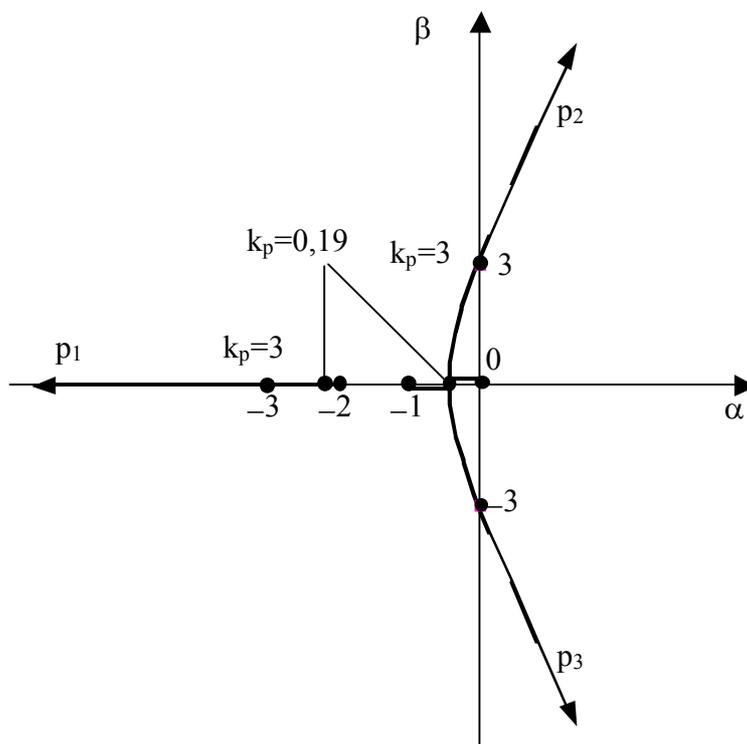


Рис. 48. Корневой годограф системы.

На рис. 49, 50 показаны переходные характеристики системы с различными значениями  $k_p$ .

Прокомментируем полученные результаты.

При  $k_p \rightarrow 0$ . Корни характеристического полинома замкнутой системы, как это видно из (194), стремятся к полюсам  $W_{\text{раз}}(p)$ :  $0, -1, -2$ .

В диапазоне коэффициентов передачи от  $k_p = 0$  до  $k_p \approx 0,19$  происходит «сближение» полюсов  $p_2$  и  $p_3$  и уменьшение полюса  $p_1$ . Переходные характеристики системы носят апериодический характер, причем с увеличением  $k_p$  быстродействие системы растет.

При  $k_p \approx 0,19$  полюса  $p_2$  и  $p_3$  становятся равными  $-0,42$ . Полюс  $p_1$  принимает значение  $-2,15$ . Дальнейшее увеличение  $k_p$  приводит к тому, что полюса  $p_2$  и  $p_3$  вновь «расходятся», становясь комплексно-сопряженными. вещественные части полюсов и модуль мнимых частей увеличиваются. Полюс  $p_1$  по-прежнему уменьшается, оказывая все меньшее влияние на характер движения системы. Переходная характеристика становится колебательной, причем

перерегулирование и частота колебаний с ростом  $k_p$  увеличиваются. Время регулирования сначала уменьшается и достигает минимума при  $k_p \approx 0,3$ , когда колебания системы укладываются в 5% коридор. В дальнейшем время регулирования вновь увеличивается из-за возрастающей колебательности системы.

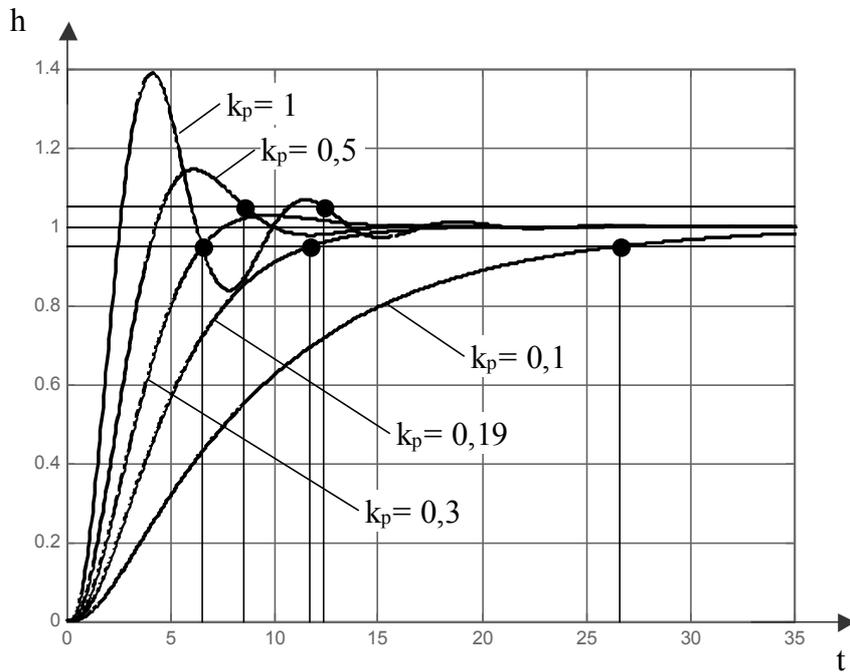


Рис. 49. Переходные характеристики системы при  $k_p = 0,1$ ;  $0,19$ ;  $0,3$ ;  $0,5$ ;  $1$ .

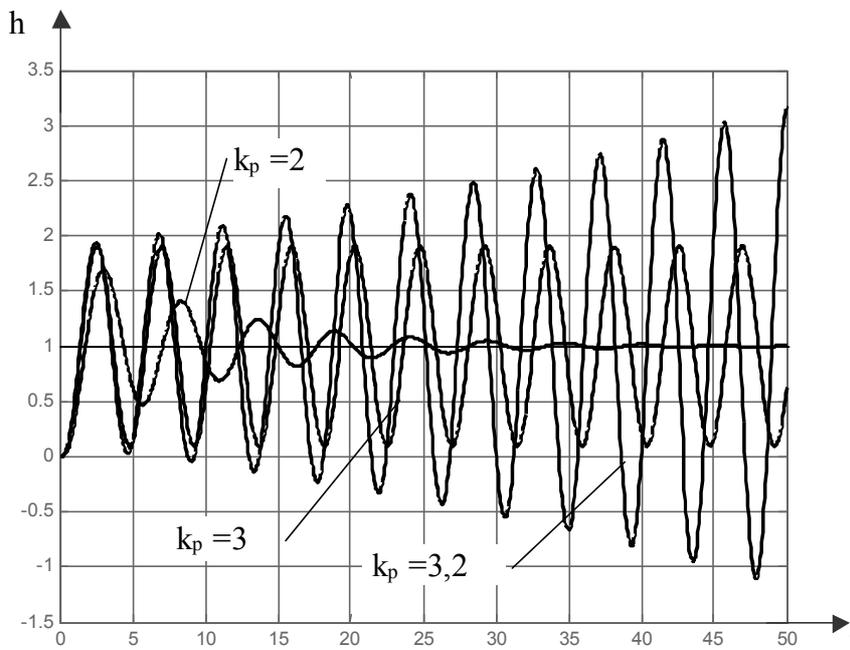


Рис. 50. Переходные характеристики системы при  $k_p = 2$ ;  $3$ ;  $3,2$ .

При  $k_p = 3$  полюса  $p_2$  и  $p_3$  становятся чисто мнимыми, равными  $\pm 3j$ , и система выходит на границу устойчивости. Ее переходная характеристика принимает вид незатухающих колебаний с угловой частотой  $\omega = 3$  рад/сек.

Дальнейшее увеличение коэффициента передачи делает систему неустойчивой. При этом ее поведение определяется в основном парой правых комплексно-сопряженных корней  $p_2$  и  $p_3$ .

Приведенный пример позволяет сделать выводы, которые, хотя и являются частными, тем не менее справедливы для большинства САР.

*Увеличение коэффициента усиления разомкнутой системы, вызванное увеличением коэффициента передачи регулятора, приводит к тому, что все возрастающую роль при формировании переходной характеристики играет пара комплексно-сопряженных полюсов системы. вещественная часть полюсов этой пары уменьшается по модулю, а мнимая, наоборот, возрастает. Как следствие, увеличиваются частота колебаний и перерегулирование переходной характеристики, т.е. повышается колебательность системы. Время переходного процесса сначала уменьшается до определенного значения, потом вновь увеличивается. Максимальное быстродействие наблюдается для процессов с небольшим перерегулированием.*

*При определенном (критическом) значении коэффициента усиления два полюса системы становятся чисто мнимыми и система выходит на границу устойчивости. Дальнейшее увеличение коэффициента делает систему неустойчивой. Переходные процессы имеют вид расходящихся колебаний.*

## 5. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОЙ САР

### 5.1. Постановка задачи синтеза системы

Синтез системы состоит в выборе и настройке технических средств регулирования: первичных и вторичных измерительных преобразователей, контроллеров, усилителей, силовых преобразователей, исполнительных механизмов и т.д.

«Технический» этап синтеза, т.е. собственно выбор технических средств, проводится исходя из требований, предъявляемых технологическим процессом и других, в частности экономических, требований.

На «математическом» этапе синтеза рассматривается модель системы и определяются структура и параметры закона регулирования.

Обычно «технический» этап предшествует «математическому», т.е. закон регулирования реализуется на базе уже имеющихся технических средств. Этому способствует то, что современные микропроцессорные контроллеры «обслуживают», как правило, сразу несколько САР (на крупном производстве – до нескольких сот) и за счет гибкой логики могут «поддерживать» практически любые законы регулирования. Однако в особо ответственных случаях возможен и обратный порядок синтеза, когда сначала определяется закон регулирования, а потом «под него» выбирается техническое обеспечение.

Для определения закона регулирования, прежде всего, необходимо составить расчетную схему САР, в которой четко отделены друг от друга ее *неизменяемая* и *изменяемая* части.

К неизменяемой части, кроме объекта регулирования, относят все те технические средства, параметры которых не подлежат изменению. Эту часть в процедурах синтеза принято называть просто «объектом». Таким образом, «математический» объект следует отличать от «технического» объекта. В него, помимо математического описания собственно объекта регулирования, может входить математическое описание датчиков, исполнительных механизмов и других средств.

Изменяемая часть системы называется регулятором, или корректирующим устройством. Кроме алгоритмической схемы контроллера, в ее реализации могут участвовать и другие элементы САР. Часто, например, закон регулирования формируется совместно контроллером и исполнительным механизмом.

Таким образом, в простейшем случае расчетная схема САР включает всего два элемента: объект и регулятор. При расчете линейных одноконтурных систем эта схема обычно имеет вид, показанный на рис. 51.

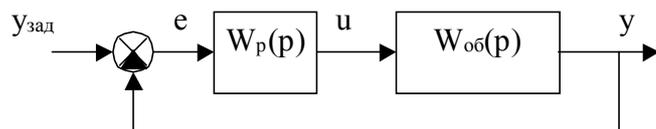


Рис.51. Расчетная схема САР.

Задача синтеза может быть сформулирована следующим образом: для объекта с передаточной функцией  $W_{об}(p)$  определить передаточную функцию регулятора  $W_p(p)$  – такую, чтобы обеспечивалось требуемое (либо наилучшее при заданных ограничениях) качество САР. Качество системы оценивается показателями, описанными в предыдущей главе.

Различают задачи *параметрического* и *структурно-параметрического синтеза* системы. В первом случае структура передаточной функции  $W_p(p)$  известна и необходимо найти только ее параметры, во втором требуется определить и структуру, и параметры  $W_p(p)$ .

## 5.2. Расчет промышленного регулятора

### 5.2.1. Типовые законы регулирования

На практике широкое распространение получили линейные регуляторы, реализующие один из так называемых типовых законов регулирования: пропорциональный (П), интегральный (И), пропорционально-интегральный (ПИ), пропорционально-дифференциальный (ПД), пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД).

Рассмотрим ПИД-закон регулирования, – другие законы можно считать его частными случаями. Идеальный ПИД-регулятор имеет передаточную функцию

$$W_p(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_{из}p} + T_d p \right) \quad (195)$$

и формирует управляющее воздействие на объект:

$$u(t) = k_p \left( e(t) + \frac{1}{T_{из}} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (196)$$

где  $k_p$  – коэффициент передачи регулятора;  $T_{из}$  – изодромная постоянная времени;  $T_d$  – постоянная времени дифференцирования.

Отметим, что передаточная функция ПИД-регулятора (195) и его воздействие (196) в чистом виде нереализуемы, так как предполагают использование производной входного сигнала. Поэтому такой регулятор и назван идеальным. Реальные ПИД-регуляторы формируют приведенный выше закон регулирования приближенно.

Из (196) видно, что управляющее воздействие пропорционально сумме ошибки регулирования, интеграла ошибки и ее производной по времени. Отсюда становится ясным название ПИД-закона.

Воздействие на объект пропорционально разности между заданным и текущим значениями выходной величины является общим принципом автоматического (да и ручного) регулирования.

Введение в закон регулирования интегральной составляющей позволяет устранить статическую ошибку в САР. При этом, поскольку интегратор вводится в систему до места приложения всех возмущающих воздействий, в статике система будет нечувствительной ко всем возмущениям. Постоянная времени изодрома имеет определенный физический смысл – это время, в течение которого величина выходного сигнала регулятора удваивается при постоянном входном сигнале, подаваемом на регулятор.

Дифференциальная составляющая ПИД-закона призвана ускорить реакцию регулятора на изменения задающего и возмущающих воздействий. Это достигается за счет того, что в начальный момент переходного процесса, вызванного изменением какого-либо воздействия, когда величина ошибки  $e(t)$  еще мала, чтобы пропорциональная, а тем более интегральная составляющие регулятора смогли ее «почувствовать», скорость изменения ошибки уже достаточна, и дифференциальная составляющая эффективно реагирует на нее.

Как уже было сказано, П, И, ПИ и ПД законы являются частными случаями ПИД-закона регулирования. Так, полагая в (195)  $T_d = 0$ , получим ПИ-закон, полагая  $T_{из} = \infty$ , получим ПД-закон, при  $T_{из} = \infty, T_d = 0$  получим пропорциональный регулятор, а если принять  $k_p = 1, T_d = 0$  либо  $T_{из} = 1, T_d = 0$ , получим интегральный регулятор (передаточную функцию И-регулятора можно

представить как  $\frac{1}{T_{из}p}$  либо как  $\frac{k_p}{p}$ ). Стоит отметить, что чисто дифференциальный («Д») закон не применяется, так как САР с таким регулятором неработоспособна. Это объясняется тем, что дифференциальный регулятор не реагирует на постоянную ошибку.

Естественно, исключая из ПИД-закона ту или иную составляющую, мы лишаемся и тех преимуществ, которые были с ней связаны. Так, в системах с П- и ПД-регуляторами присутствует статическая ошибка регулирования, а ПИ-регулятор является более медленным, чем ПИД-регулятор. Однако упрощение структуры регулятора в ряде случаев бывает оправданным, так как ведет к уменьшению стоимости системы. Если, например, оказывается, что пропорциональный или интегральный законы регулирования вполне удовлетворяют предъявляемым к системе требованиям, то иногда можно отказаться от регулятора как отдельного технического устройства. При этом функцию П-регулятора будет выполнять усилитель, который, как правило, необходимо присутствует в системе, а интегральный закон регулирования может быть реализован с помощью исполнительного механизма.

С другой стороны, современные регулирующие контроллеры, построенные на базе микропроцессорной техники, могут реализовать достаточно сложные алгоритмы обработки сигналов. Поэтому при расчете систем имеет смысл ориентироваться на более сложные и поэтому более эффективные законы регулирования.

### 5.2.2. Определение требований к оптимальным настройкам регулятора по критерию максимального подавления низкочастотных возмущений

Помимо управляющего воздействия, на объект регулирования действуют и возмущения. С учетом этого расчетную схему системы, приведенную на рис. 51, следует дополнить (рис. 52).

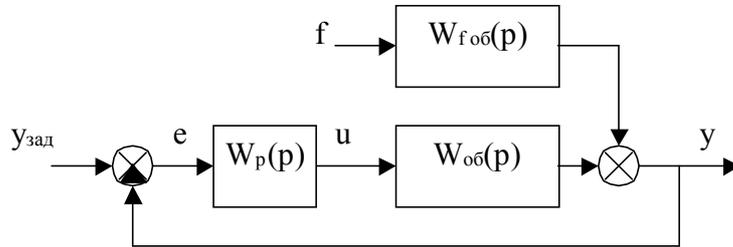


Рис. 52. Структура системы с учетом возмущения.

На рис. 51 обозначено:  $f$  – возмущающее воздействие;  $W_{f\text{ об}}(p)$  – передаточная функция объекта по данному воздействию. В общем случае возмущений и, соответственно, передаточных функций может быть несколько.

Преобразуем схему системы автоматического регулирования и представим ее в следующем виде (рис. 53).

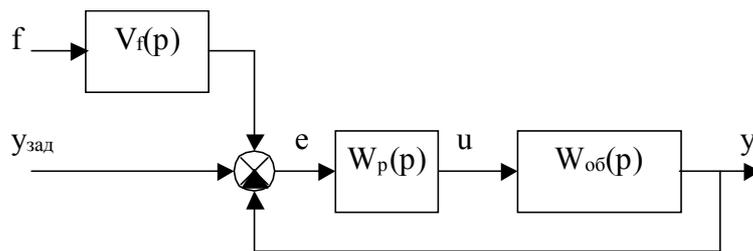


Рис. 53. К определению оптимальных настроек регуляторов.

Передаточная функция  $V_f(p)$  согласно правилам структурных преобразований равна

$$V_f(p) = \frac{W_{f\text{ об}}(p)}{W_{\text{ об}}(p)W_p(p)}. \quad (197)$$

Предположим, что возмущающее воздействие  $f$  имеет низкочастотную и высокочастотную составляющие. Будем считать, что высокочастотная составляющая возмущения подавляется самим объектом. Реакцию системы на низкочастотную составляющую необходимо минимизировать за счет оптимального выбора настроек регулятора. Для этого достаточно, чтобы эта составляющая не пропусклась фильтром  $V_f(p)$ , что и определяет требования к настройкам.

Разложим амплитудно-частотную характеристику  $|V_f(j\omega)|$  в ряд Тейлора вблизи нулевой частоты:

$$|V_f(j\omega)| = |V_f(j0)| + \left. \frac{d|V_f(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=0} \Delta\omega + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2|V_f(j\omega)|}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} \Delta\omega^2 + \dots \quad (198)$$

Для наилучшего подавления системой низкочастотных возмущений необходимо добиться выполнения следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} |V_f(j0)| = 0; \\ \left. \frac{d|V_f(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 0; \\ \left. \frac{d^2|V_f(j\omega)|}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} = 0; \\ \dots \end{array} \right. \quad (199)$$

Чем больше коэффициентов разложения обращается в нуль, тем лучше подавляются низкочастотные возмущения. Для системы с ПИД-регулятором АЧХ фильтра

$$|V_f(j\omega)| = \left| \frac{W_f(j\omega)}{W_{об}(j\omega)} \right| \frac{1}{k_p} \frac{T_{из} \omega}{\sqrt{(1 - T_d T_{из} \omega^2)^2 + T_{из}^2 \omega^2}}. \quad (200)$$

Как видно из (200),  $|V_f(j0)| = 0$ . Производные выражения (198) при  $\omega=0$  принимают значения [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{d|V_f(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=0} = \frac{k_f}{k_{об}} \frac{T_{из}}{k_p}; \\ \left. \frac{d^2|V_f(j\omega)|}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} = 0; \\ \left. \frac{d^3|V_f(j\omega)|}{d\omega^3} \right|_{\omega=0} = 0 \text{ при } T_d = 0,5T_{из}, \end{array} \right. \quad (201)$$

где  $k_{об}$ ,  $k_f$  – коэффициенты передачи объекта по управляющему и возмущающему воздействиям (в случае астатического объекта эти коэффициенты получаются при «исключении» свободных интеграторов из структуры объекта). Дальнейшие вычисления производных дают те же значения, что и первые три.

Таким образом, наилучшее подавление низкочастотных возмущений системой с ПИД-регулятором достигается при максимальном отношении коэффициента передачи регулятора к постоянной времени издрома  $k_p/T_{из}$ . Постоянная времени дифференцирования  $T_d$  должна составлять половину  $T_{из}$ .

Аналогичным путем можно показать, что по принятому критерию для ПИ-регулятора оптимальным вариантом настройки будет тот, для которого

отношение  $k_p/T_{из}$  максимально. В пропорциональном, интегральном и ПД- регуляторах наилучшему подавлению низкочастотных возмущений соответствует максимально возможный коэффициент передачи регулятора.

### 5.2.3. Расчет регулятора на заданное значение частотного показателя колебательности

Определение частотного показателя колебательности приведено в 4.2.3.

Излагаемый ниже метод, строго говоря, ориентирован на обеспечение требуемого значения максимума АЧХ  $A_{зам}(\omega_{рез})$ , а не показателя колебательности. Однако для реальных систем эти величины практически совпадают, так как  $A_{зам}(0)$  равно или близко к единице. Для статических систем  $A_{зам}(0)$  обычно немного меньше единицы, что объясняется присутствием в них статической ошибки. В астатических системах статическая ошибка отсутствует и  $A_{зам}(0) = 1$ .

Рассмотрим связь частотных характеристик разомкнутой и замкнутой систем. Как известно, АФЧХ замкнутой системы выражается через АФЧХ разомкнутой следующим образом:

$$W_{зам}(j\omega) = \frac{W_{раз}(j\omega)}{1 + W_{раз}(j\omega)}. \quad (202)$$

Из (202) получим

$$W_{зам}(j\omega) = \frac{1}{1/W_{раз}(j\omega) + 1} = \frac{1}{1 - V(j\omega)}, \quad (203)$$

где  $V(j\omega) = -\frac{1}{W_{раз}(j\omega)}$  – инверсная обратная характеристика разомкнутой системы.

На рис. 54 показан фрагмент  $V(j\omega)$ , по которому из геометрических соображений определяются резонансная частота  $\omega_{рез}$  и максимальное значение АЧХ замкнутой системы  $A_{зам}(\omega_{рез})$ .

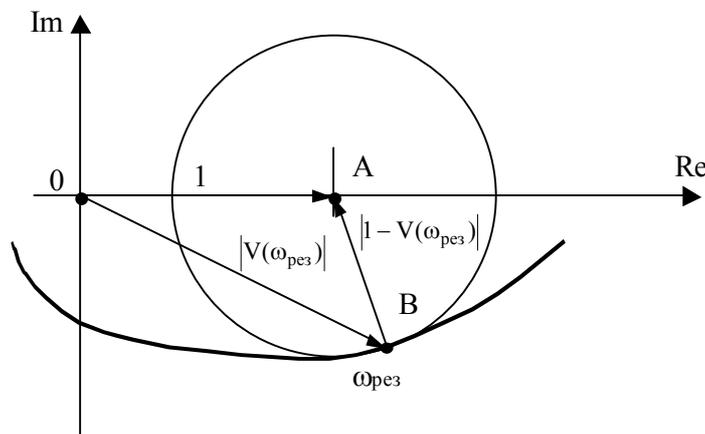


Рис. 54. Определение резонансной частоты по  $V(j\omega)$ .

Из (203) получаем:

$$A_{\text{зам}}(\omega) = \frac{1}{|1 - V(j\omega)|} = \frac{1}{|\overline{BA}|}. \quad (204)$$

Следовательно, максимуму  $A_{\text{зам}}(\omega)$  соответствует минимум модуля вектора  $\overline{BA}$  (см. рис. 54). Для определения положения точки В, которое обеспечит этот минимум, необходимо из точки А провести окружность, касающуюся кривой  $V(j\omega)$ . Точка касания и будет соответствовать резонансной частоте.

Пусть теперь  $A_{\text{зам}}(\omega_{\text{рез}})$  задано и равно  $\Lambda$ . Определим требования к АФЧХ разомкнутой системы, обеспечивающие заданное значение  $A_{\text{зам}}(\omega_{\text{рез}})$ .

$$\Lambda = \frac{1}{|1 - V(j\omega)|} = \frac{1}{\left|1 + \frac{1}{P(\omega) + jQ(\omega)}\right|} = \frac{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}{\left|P^2(\omega) + Q^2(\omega) + P(\omega) - jQ(\omega)\right|}, \quad (205)$$

где  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  – вещественная и мнимая частотные характеристики разомкнутой системы.

Из (205) получим

$$\Lambda^2 = \frac{(P^2(\omega) + Q^2(\omega))^2}{(P^2(\omega) + Q^2(\omega) + P(\omega))^2 + Q^2(\omega)}, \quad (206)$$

откуда после несложных преобразований

$$\Lambda^2 = \frac{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}{(P(\omega) + 1)^2 + Q^2(\omega)}, \quad (207)$$

или

$$P^2(\omega) + 2P(\omega) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - 1} + Q^2(\omega) = \frac{\Lambda^2}{1 - \Lambda^2}. \quad (208)$$

Прибавим к левой и правой частям уравнения (208)  $\frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 - 1)^2}$  и окончательно получим

$$\left(P(\omega) + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - 1}\right)^2 + Q^2(\omega) = \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^2 - 1}\right)^2. \quad (209)$$

Уравнение (209) описывает окружность с радиусом

$$r^* = \frac{\Lambda}{\Lambda^2 - 1}, \quad (210)$$

с центром, лежащим на отрицательной вещественной полуоси и отстоящим от начала координат на расстояние

$$R^* = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - 1}. \quad (211)$$

Этой окружности должна касаться АФЧХ разомкнутой системы, чтобы максимум АЧХ замкнутой системы был равен  $\Lambda$ .

Перейдем теперь к методике расчета регуляторов.

Исходную систему приводят к расчетной схеме, изображенной на рис. 55.

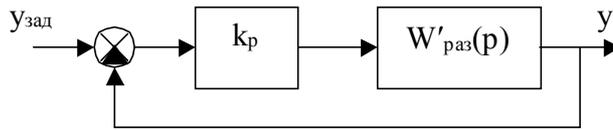


Рис. 55. Расчетная схема системы.

Искомой величиной является коэффициент передачи регулятора  $k_p$ . Передаточная функция  $W'_{раз}(p)$  представляет собой передаточную функцию последовательного соединения всех элементов САУ, в том числе и регулятора (с единичным коэффициентом передачи).

Например, если рассчитывается ПИД-регулятор с передаточной функцией (195), то подлежит определению только величина  $k_p$ . Постоянные времени  $T_{из}$  и  $T_d$  задаются, а множитель  $\left(1 + \frac{1}{T_{из}p} + T_d p\right)$  вносится в  $W'_{раз}(p)$ .

Для определения коэффициента передачи регулятора  $k_p$  на комплексной плоскости строят АФЧХ разомкнутой системы  $W'_{раз}(j\omega)$  (рис. 56).

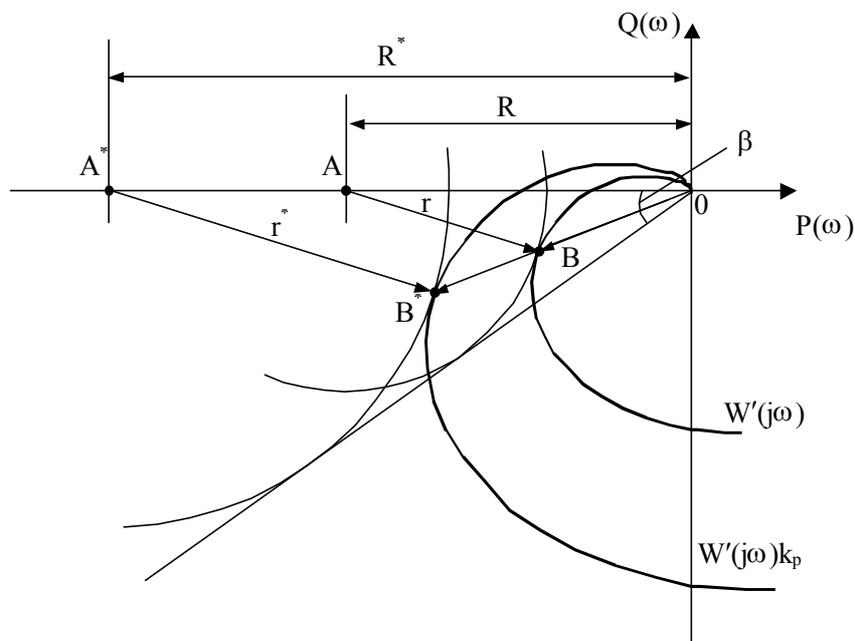


Рис. 56. Определение коэффициента передачи регулятора по заданному частотному показателю колебательности.

Из начала координат под углом  $\beta = \arcsin \frac{1}{\Lambda}$  к отрицательной вещественной полуоси проводят луч. Затем циркулем чертят окружность с центром на вещественной отрицательной полуоси, касающуюся одновременно АФЧХ системы и луча (на рис. 55 центр построенной окружности лежит в точке А).

Радиус этой окружности  $r$  связан с коэффициентом передачи регулятора следующим соотношением:

$$k_p = \frac{r^*}{r} = \frac{\Lambda}{(\Lambda^2 - 1)r}. \quad (212)$$

Можно также определить  $k_p$  через  $R$ :

$$k_p = \frac{R^*}{R} = \frac{\Lambda^2}{(\Lambda^2 - 1)R}. \quad (213)$$

Приведем краткое объяснение изложенной методики. Упомянутый выше луч строят для того, чтобы обеспечить требуемое отношение  $\frac{r}{R} = \frac{r^*}{R^*} = \frac{1}{\Lambda}$  для проводимой окружности. Формулы (212),(213) следуют из подобия треугольников  $A^*B^*O$  и  $ABO$ .

Рассмотрим вопросы применения рассмотренной методики для различных типов регуляторов.

При расчете П-регулятора  $W'_{\text{раз}}(p) = W_{\text{об}}(p)$  и поэтому приведенных построений достаточно, чтобы определить единственный коэффициент его настройки  $k_p$ . Для других регуляторов, очевидно, необходимо перед расчетом  $k_p$  найти  $W'_{\text{раз}}(p)$ . Кроме того, так как ПИ-, ПД- и ПИД-регуляторы имеют несколько параметров настройки, расчет таких регуляторов на требуемый частотный показатель колебательности не может дать однозначного решения и, следовательно, необходимо использовать дополнительные критерии выбора вариантов настройки.

Если применяют И-регулятор, то АФЧХ разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = \frac{k_p}{j\omega} W_{\text{об}}(j\omega) = \frac{k_p W_{\text{об}}(j\omega)}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (214)$$

При  $k_p = 1$

$$W'_{\text{раз}}(j\omega) = \frac{W_{\text{об}}(j\omega)}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (215)$$

т. е. для того, чтобы получить требуемую АФЧХ разомкнутой системы, необходимо каждый вектор АФЧХ объекта повернуть на  $90^\circ$  по ходу часовой стрелки, одновременно уменьшив его в  $\omega$  раз (рис. 57).

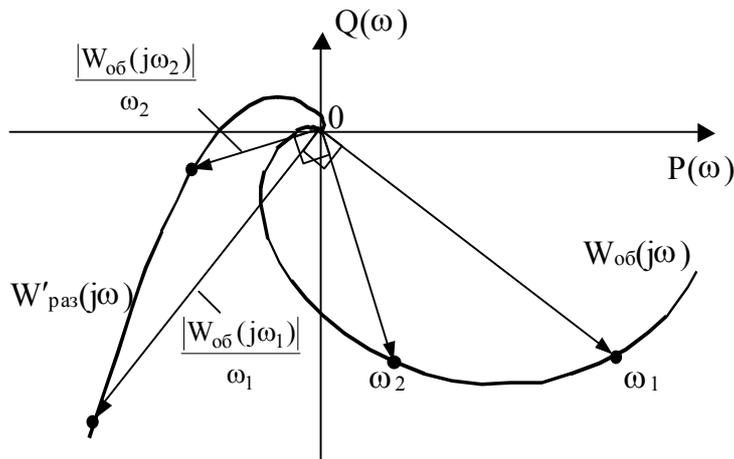


Рис. 57. Построение АФЧХ разомкнутой системы с И-регулятором.

При использовании ПИ-регулятора АФЧХ разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = k_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega T_{\text{из}}} \right) W_{\text{об}}(j\omega), \quad (216)$$

следовательно:

$$W'_{\text{раз}}(j\omega) = W_{\text{об}}(j\omega) + \frac{W_{\text{об}}(j\omega)}{\omega T_{\text{из}}} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (217)$$

т.е. к каждому вектору АФЧХ объекта (для определенной частоты  $\omega_i$ ) необходимо прибавить вектор, повернутый относительно вектора  $W_{\text{об}}(j\omega_i)$  на  $90^\circ$  по ходу часовой стрелки, модуль которого равен  $\frac{|W_{\text{об}}(j\omega_i)|}{\omega_i T_{\text{из}}}$ .

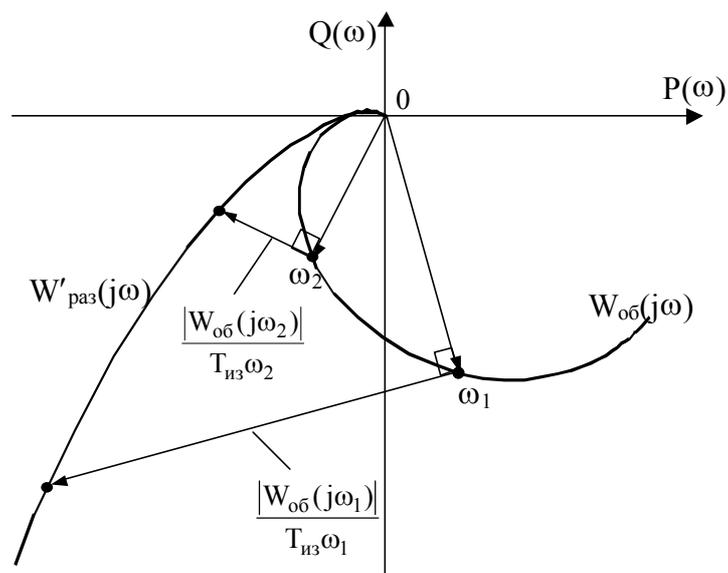


Рис. 58. Построение АФЧХ разомкнутой системы с ПИ-регулятором.

В данном случае строят семейство характеристик для нескольких значений времени изодрома:  $T_{из1}, T_{из2}, \dots, T_{изn}$  (значениями времени изодрома задаются). Для каждого  $T_{из1}, T_{из2}, \dots, T_{изn}$  по найденному радиусу  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , используя выражение (212), определяют значение коэффициентов  $k_{p1}, k_{p2}, \dots, k_{pn}$  передачи регулятора.

Окончательный выбор варианта настроек осуществляется по дополнительным критериям. Если в качестве такого критерия применяется критерий наилучшего подавления системой низкочастотных возмущений, то оптимальным вариантом будет тот, для которого отношение  $k_p/T_{из}$  максимально.

При использовании ПД-регулятора АФЧХ разомкнутой системы

$$W_{раз}(j\omega) = k_p(1 + j\omega T_d)W_{об}(j\omega), \quad (218)$$

откуда

$$W'_{раз}(j\omega) = W_{об}(j\omega) + T_d \omega W_{об}(j\omega) e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (219)$$

Из (219) видно, что при построении АФЧХ разомкнутой системы к каждому вектору АФЧХ объекта  $W_{об}(j\omega_i)$  добавляется вектор, повернутый относительно последнего на  $90^\circ$  против часовой стрелки, модуль которого равен  $T_d \omega |W_{об}(j\omega_i)|$ .

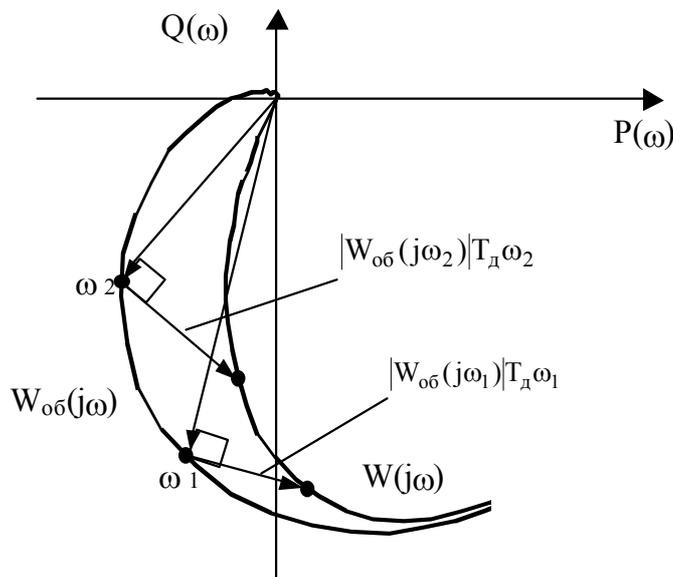


Рис. 59. Построение АФЧХ разомкнутой системы с ПД-регулятором.

В данном случае строят семейство характеристик для нескольких значений постоянной времени дифференцирования:  $T_{д1}, T_{д2}, \dots, T_{дn}$  (постоянными времени дифференцирования задаются). Для каждого  $T_{д1}, T_{д2}, \dots, T_{дn}$  по найденному радиусу  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , используя выражение (212), определяют значение коэффициентов  $k_{p1}, k_{p2}, \dots, k_{pn}$  передачи регулятора.

Окончательный выбор варианта настроек осуществляется по дополнительным критериям. Если в качестве такого критерия применяется критерий наилучшего подавления системой низкочастотных возмущений, то оптимальным вариантом будет тот, для которого значение  $k_p$  максимально.

При использовании ПИД-регулятора АФЧХ разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = k_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega T_{\text{из}}} + j\omega T_{\text{д}} \right) W_{\text{об}}(j\omega), \quad (220)$$

откуда

$$W'_{\text{раз}}(j\omega) = W_{\text{об}}(j\omega) \left( 1 + j \times \left( \frac{T_{\text{из}} T_{\text{д}} \omega^2 - 1}{\omega T_{\text{из}}} \right) \right). \quad (221)$$

Таким образом, чтобы получить АФЧХ разомкнутой системы с ПИД-регулятором, нужно к каждому вектору АФЧХ объекта (для определенной частоты  $\omega_i$ ) прибавить вектор, повернутый относительно вектора  $W_{\text{об}}(j\omega_i)$  на

$90^\circ$ , модуль которого равен  $|W_{\text{об}}(j\omega_i)| \left( \frac{T_{\text{из}} T_{\text{д}} \omega_i^2 - 1}{\omega_i T_{\text{из}}} \right)$ . Направление поворота

этого вектора определяется следующим образом:

при  $T_{\text{из}} T_{\text{д}} \omega_i^2 - 1 < 0$  – по часовой стрелке,

при  $T_{\text{из}} T_{\text{д}} \omega_i^2 - 1 > 0$  – против часовой стрелки.

Из выражения (221) также видно, что на малых частотах ( $\omega \rightarrow 0$ ) АФЧХ разомкнутой системы приближается к АФЧХ разомкнутой системы с ПИ-регулятором:

$$W(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} W_{\text{об}}(j\omega) \left( 1 - j \frac{1}{\omega T_{\text{из}}} \right). \quad (222)$$

На больших частотах ПИД-регулятор ведет себя как ПД-регулятор:

$$W(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} W_{\text{об}}(j\omega) (1 + j\omega T_{\text{д}}). \quad (223)$$

На частоте  $\omega = \sqrt{\frac{1}{T_{\text{из}} T_{\text{д}}}}$  ПИД-регулятор «становится» П-регулятором, а

АФЧХ разомкнутой системы с учетом того, что  $k_p = 1$ , совпадает с АФЧХ объекта (рис. 60).

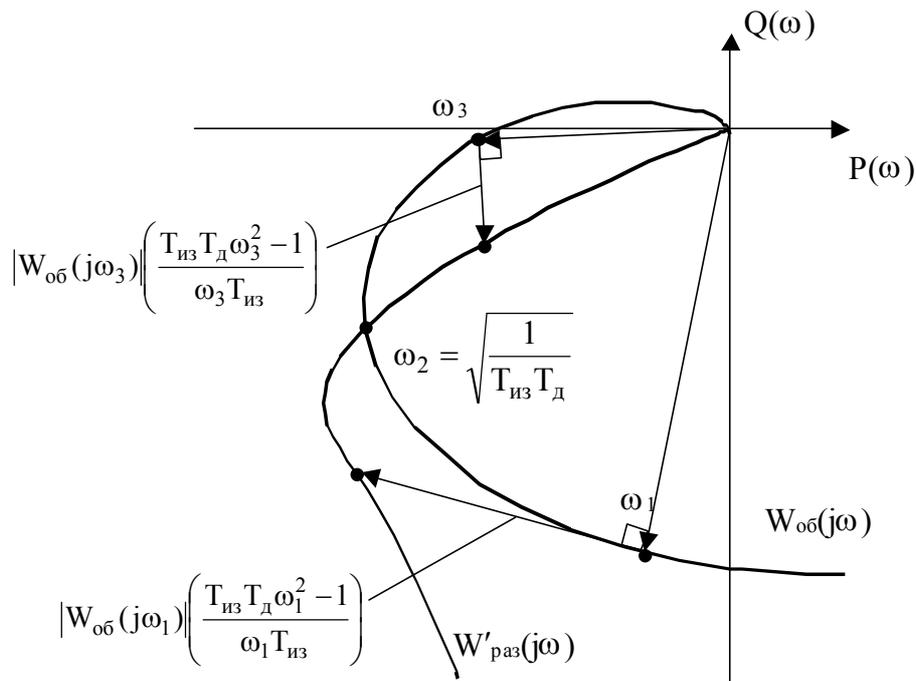


Рис. 60. Построение АФЧХ разомкнутой системы с ПИД-регулятором.

В данном случае для построения АФЧХ разомкнутой системы необходимо задаваться двумя величинами –  $T_{из}$  и  $T_d$ . Упростить задачу можно, если воспользоваться критерием максимального подавления низкочастотных возмущений, который, как показано ранее, устанавливает связь между постоянными времени:  $T_d = 0,5T_{из}$ . Далее, как и для ПИ-регулятора, задавшись несколькими значениями  $T_{из}$ , строят семейство характеристик, по которым определяют несколько вариантов  $k_p$ . Оптимальным будет вариант, для которого отношение  $k_p/T_{из}$  максимально.

#### 5.2.4. Расчет параметров настройки регуляторов на заданный корневой показатель колебательности

Определение корневого показателя колебательности изложено в 4.2.3.

Покажем, как этот показатель может быть использован при синтезе САУ. Для этого осуществим преобразование координат на комплексной плоскости, в которой располагаются корни характеристического полинома замкнутой системы. Перейдем от системы координат  $p = \alpha + \beta j$  к системе  $q = \alpha' + \beta' j$  с помощью преобразования

$$q = \frac{p}{\sqrt{m^2 + 1}} \times e^{-j \cdot \arctg m}. \quad (224)$$

Первый множитель выражения (224) соответствует уменьшению модуля вектора в новой системе в  $\sqrt{m^2 + 1}$  раз, а второй – повороту вектора на угол  $\arctg m$  по часовой стрелке.

Поворот вектора означает, что если в старой системе координат имелась пара корней, расположенных на лучах АО и ОВ (см. рис. 44) и харак-

теризующихся показателем колебательности  $m$ , то в новой системе корень, ранее лежащий на луче АО, попадет на мнимую ось, что соответствует выходу САР «на границу устойчивости» (термин «граница устойчивости» для преобразованной системы имеет условный характер).

Рассмотрим обратное преобразование:

$$p = q \times \sqrt{m^2 + 1} \times e^{j \cdot \arctg m} = q \times (1 + jm). \quad (225)$$

Для использования частотных методов исследования САР в новой системе координат заменим  $q$  на  $j\omega$ , тогда:

$$p = j\omega \times (1 + jm) = (j - m)\omega. \quad (226)$$

Таким образом, частотные характеристики САР в новой системе координат можно получить путем замены в соответствующих передаточных функциях САР оператора  $p$  на оператор  $(j - m)\omega$ . При этом важно для синтеза системы то, что *если в старой системе координат САР имеет показатель колебательности  $m$ , то преобразованная система находится «на границе устойчивости»*. Это обстоятельство позволяет сформулировать следующий порядок расчета регуляторов на заданный корневой показатель колебательности:

1) задаваясь требуемым значением  $m$ , заменяем в передаточной функции САР оператор  $p$  на оператор  $(j - m)\omega$  и получаем частотную характеристику системы в новой системе координат как функцию неизвестных настроек регулятора;

2) выбором коэффициентов настройки регулятора добиваемся, чтобы частотная характеристика САР в новой системе координат соответствовала нахождению системы управления «на границе устойчивости».

На втором этапе используются хорошо известные частотные критерии устойчивости Михайлова и Найквиста. Так, если используется критерий Михайлова, расчет настроек регулятора производится из условия

$$D((j - m)\omega) = 0, \quad (227)$$

где  $D((j - m)\omega)$  – частотная характеристика (годограф) Михайлова, которая в данном случае рассчитывается путем замены в характеристическом полиноме замкнутой системы оператора  $p$  на оператор  $(j - m)\omega$ .

Очевидно, что выражение (227) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D((j - m)\omega)] = 0, \\ \operatorname{Im}[D((j - m)\omega)] = 0. \end{cases} \quad (228)$$

В случае применения критерия Найквиста используется уравнение

$$W_{\text{раз}}((j - m)\omega) = W_{\text{об}}((j - m)\omega)W_p((j - m)\omega) = -1, \quad (229)$$

где  $W_{\text{раз}}((j - m)\omega)$ ,  $W_{\text{об}}((j - m)\omega)$ ,  $W_p((j - m)\omega)$  – АФЧХ разомкнутой САУ, объекта регулирования и регулятора в новой системе координат. Данные ха-

рактические характеристики получили название *расширенных амплитудно-фазовых частотных характеристик (РАФЧХ)*. Поэтому метод расчета регуляторов на заданный корневой показатель колебательности с помощью критерия Найквиста называется *методом расчета по РАФЧХ*.

Выражение (229) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[W_{об}(m, j\omega)W_p(m, j\omega)] = -1, \\ \operatorname{Im}[W_{об}(m, j\omega)W_p(m, j\omega)] = 0. \end{cases} \quad (230)$$

Таким образом, для расчета коэффициентов настройки регулятора необходимо решить одну из систем из двух алгебраических уравнений (228 или 230).

При расчете П- или И-регулятора имеем две неизвестные величины: коэффициент передачи регулятора  $k_p$  (либо постоянная времени интегрирования  $T_i$  для И-регулятора) и частоту  $\omega$ . Поэтому системы (228), (230) имеют единственное решение.

Так, для П-регулятора система (230) принимает вид:

$$\begin{cases} P_{об}(\omega, m)k_p = -1, \\ Q_{об}(\omega, m)k_p = 0, \end{cases} \quad (231)$$

где  $P(\omega, m)$  и  $Q(\omega, m)$  – вещественная и мнимая части РАФЧХ объекта.

Из второго уравнения системы (231) для заданного  $m$  определяется частота  $\omega$ . Подставляя  $\omega$  в первое уравнение, находим  $k_p$ .

Для И-регулятора с передаточной функцией  $W_p = \frac{k_p}{p}$  систему (230)

можно представить в виде:

$$\begin{cases} \frac{(Q_{об}(\omega, m) - P_{об}(\omega, m)m)k_p}{(m^2 + 1)\omega} = -1, \\ -\frac{(P_{об}(\omega, m) + Q_{об}(\omega, m)m)k_p}{(m^2 + 1)\omega} = 0. \end{cases} \quad (232)$$

Последовательность решения системы в данном случае такая же, как и для П-регулятора.

При использовании ПИ и ПД законов регулирования число неизвестных равняется трем: для ПИ-регулятора необходимо определить  $k_p$ ,  $T_{из}$  и  $\omega$ , для ПД-регулятора –  $k_p$ ,  $T_d$  и  $\omega$ . Таким образом, системы не имеют однозначного решения и одному значению показателя  $m$  соответствует множество пар значений настроек регулятора, различающихся частотами  $\omega$ . Поэтому необходимо рассчитать несколько вариантов настроек для различных частот, а для выбора оптимального варианта – воспользоваться каким-либо другим критерием, – например, критерием максимального подавления низкочастотных помех. Напомним, что согласно этому критерию наилучшему подавлению низ-

кочастотных возмущений системой соответствуют максимум отношения  $k_p/T_{из}$  для ПИ-регулятора и максимум  $k_p$  – для ПД-регулятора.

Ниже приведены формулы для расчета настроек ПИ- и ПД-регуляторов на заданный показатель колебательности  $m$ . Эти формулы получены непосредственно из решения системы (230).

Для ПИ-регулятора с передаточной функцией  $W_p = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_{из}p} \right)$

$$k_p = -\frac{P_{об}(\omega, m) + Q_{об}(\omega, m)m}{P_{об}^2(\omega, m) + Q_{об}^2(\omega, m)}, \quad T_{из} = \frac{P_{об}(\omega, m) + Q_{об}(\omega, m)m}{Q_{об}(\omega, m)\omega(m^2 + 1)}. \quad (233)$$

Для ПД-регулятора с передаточной функцией  $W_p = k_p(1 + T_d p)$

$$k_p = \frac{Q_{об}(\omega, m)m - P_{об}(\omega, m)}{P_{об}^2(\omega, m) + Q_{об}^2(\omega, m)}, \quad T_d = \frac{Q_{об}(\omega, m)}{(Q_{об}(\omega, m)m - P_{об}(\omega, m))\omega}. \quad (234)$$

При расчете ПИД-регулятора неизвестными, подлежащими определению, являются четыре переменных:  $k_p$ ,  $T_{из}$ ,  $T_d$  и  $\omega$ . Применяя в качестве дополнительного критерий максимального подавления низкочастотных помех, можно сформулировать два ограничения на решение систем (228),(230):

$$k_p/T_{из} \rightarrow \max, \quad (235)$$

$$T_d = 0,5T_{из}. \quad (236)$$

Условие (236) позволяет «избавиться» от переменной  $T_d$  при решении задачи, а (235) дает возможность окончательного выбора варианта настроек. Примем для общности  $T_d = \alpha T_{из}$ . Тогда из решения системы (230) для ПИД-регулятора получаем:

$$k_p = -(P_{об}(\omega, m) - \alpha T_{из}\omega(Q_{об}(\omega, m) + P_{об}(\omega, m)m) + \left. + \frac{Q_{об}(\omega, m) - P_{об}(\omega, m)m}{T_{из}\omega(m^2 + 1)} \right)^{-1},$$

$$T_{из} = \frac{-Q_{об}(\omega, m) \pm \sqrt{Q_{об}^2(\omega, m) + \frac{4\alpha(P_{об}^2(\omega, m) - Q_{об}^2(\omega, m)m^2)}{m^2 + 1}}}{2\alpha\omega(P_{об}(\omega, m) - Q_{об}(\omega, m)m)}. \quad (237)$$

Результаты многочисленных расчетов показывают, что для построения устойчивой системы при расчете  $T_{из}$  по (237) следует использовать знак «-».

В заключение отметим, что расчет регуляторов по расширенным АФЧХ в общем случае не гарантирует обеспечения требуемого значения корневого показателя колебательности для замкнутой системы. Гарантируется лишь прохождение РАФХ через точку  $\{-1,0\}$ , что, очевидно, означает, что одна из пар

комплексно сопряженных полюсов замкнутой системы будет характеризоваться заданным показателем колебательности  $m$ . Другие пары полюсов могут иметь большие отношения  $\left| \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right|$  и даже быть правыми. Это следует из логики

обоснования метода и, кроме того, объясняется тем, что РАФХ в некотором смысле искусственная характеристика, для которой, как уже отмечалось, понятие границы устойчивости по критерию Найквиста имеет лишь условный характер. Поэтому результаты расчета всегда нуждаются в проверке. Однако чаще всего заданному показателю колебательности соответствует пара полюсов, наиболее близкая к мнимой оси, а другие полюса оказываются расположенными намного левее и, следовательно, намного меньше влияют на переходные процессы в системе. Поэтому расчет настроек регулятора по РАФЧХ в большинстве случаев дает удовлетворительные результаты.

### 5.3. Расчет корректирующих устройств с помощью логарифмических частотных характеристик

Метод предложен В.В. Солодовниковым и предполагает определение структуры и параметров корректирующего устройства путем сопоставления логарифмической амплитудно-частотной характеристики исходной системы (объекта) с желаемой характеристикой. Расчетная схема системы представлена на рис. 61.

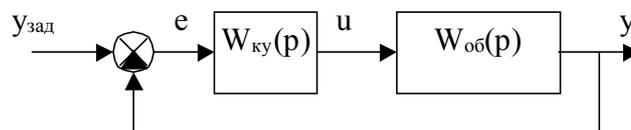


Рис. 61. Расчетная схема САУ.

Здесь, как и ранее, под объектом подразумевается вся неизменяемая часть системы, включая собственно объект управления, исполнительные механизмы, усилители, датчики и т.д. Необходимо определить передаточную функцию корректирующего устройства  $W_{кy}(p)$  – такую, чтобы логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы была равна или близка заданной (желаемой). Таким образом, необходимо решить две задачи: 1) определить желаемую характеристику системы; 2) рассчитать корректирующее устройство, которое эту характеристику обеспечит.

При построении желаемой характеристики скорректированной системы автоматического регулирования следует исходить из следующих требований:

1) скорректированная система должна удовлетворять заданным показателям качества (допустимые значения ошибок в установившихся режимах, величина перерегулирования « $\sigma$ » и время регулирования  $t_p$  в динамических режимах);

2) желаемая ЛАЧХ для простоты исполнения корректирующего устройства должна по возможности меньше отличаться от характеристики исходной системы;

3) передаточная функция корректирующего устройства должна быть физически реализуема: порядок ее числителя не должен быть больше порядка знаменателя. Это означает, что наклон высокочастотной части желаемой характеристики не может быть меньше (по модулю) наклона ЛАЧХ исходной системы.

Существуют общие рекомендации к построению желаемой ЛАЧХ системы [2,4,7].

Следует стремиться к тому, чтобы желаемая ЛАЧХ пересекала ось частот с наклоном  $-20$  дБ/дек. Наклон первой (низкочастотной) асимптоты характеристики определяется порядком астатизма и может быть равен:  $0$  дБ/дек,  $-20$  дБ/дек,  $-40$  дБ/дек. Уровень этой асимптоты определяется требованиями к точности САР в стационарных режимах. Участок характеристики, сопрягающий среднечастотную часть с низкочастотной асимптотой, может иметь наклон:  $-20$  дБ/дек;  $-40$  дБ/дек;  $-60$  дБ/дек. На высоких частотах желаемая ЛАЧХ не должна проходить выше ЛАЧХ нескорректированной системы более чем на  $20$  дБ и должна строиться с учетом простоты реализации корректирующего устройства.

Примерный вид желаемой ЛАЧХ с учетом этих рекомендаций приведен на рис.62.

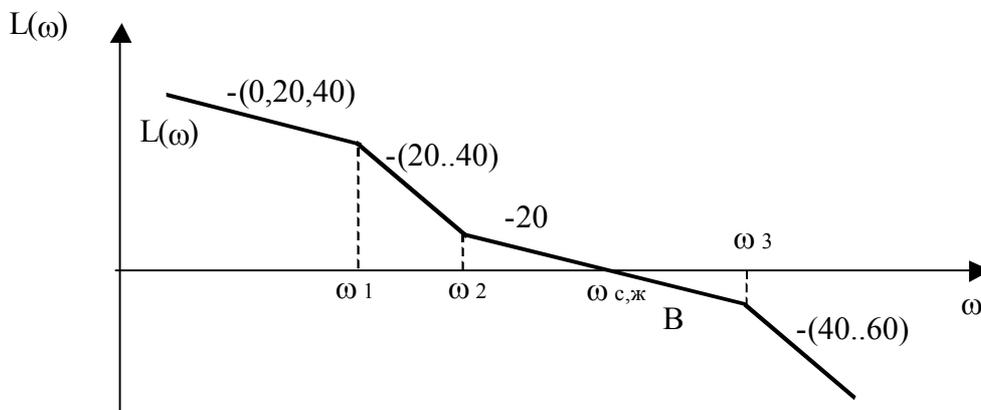


Рис. 62. Желаемая ЛАЧХ разомкнутой системы.

Желаемая частота среза определяется по приближенной формуле:

$$\omega_{с,ж} = (1 \div 2) \frac{2\pi}{t_p}, \tag{238}$$

где  $t_p$  – заданное время регулирования в переходном процессе при единичном скачкообразном входном воздействии и нулевых начальных условиях.

Частоты излома  $\omega_1$  и  $\omega_2$  среднечастотной части ЛАХ можно определить из приближенных соотношений:

$$\omega_3 \approx (2..4)\omega_{с,ж}, \tag{239}$$

$$\omega_2 \approx \frac{\omega_{с,ж}^2}{\omega_3}. \quad (240)$$

Построенная таким образом ЛАЧХ соответствует системе с колебательной переходной характеристикой, имеющей перерегулирование до 30 – 40%. Длительность переходной характеристики определяется заданной частотой среза (192, 238).

Если требуется задавать характеристики проектируемой системы более точно, применяются так называемые типовые ЛАЧХ, параметры которых определяют с помощью номограмм по требуемым показателям качества.

На рис. 63 показана типовая ЛАЧХ  $L(\omega)$  разомкнутой системы с астатизмом первого порядка, по которой ниже определяется качество переходной характеристики  $h(t)$  замкнутой системы [7].

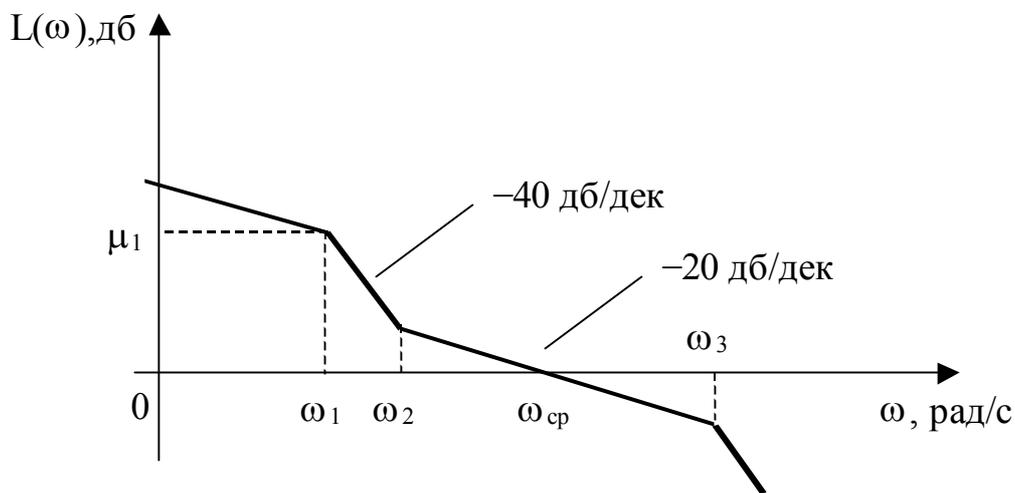


Рис. 63. Типовая ЛАЧХ с астатизмом первого порядка.

Передаточная функция разомкнутой системы, соответствующая данной характеристике:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}. \quad (241)$$

Через  $\mu_1$  обозначена величина ординаты при  $\omega = \omega_1 = 1/T_1$ .

На рис.64–66 приведены номограммы для определения:  $h_{\text{макс}}$  – максимума переходной характеристики (сплошные линии) и  $A_{3,\text{макс}}/A_3(0)$  – относительного максимума амплитудной частотной характеристики замкнутой системы – частотного показателя колебательности (пунктир). На нижней половине рисунков изображены номограммы для определения:  $t_{\text{п}}$  – длительности переходной характеристики (штрих-пунктир);  $\omega_{\text{т}}$  – частоты ее колебаний (сплошные линии);  $t_1$  – времени максимума переходной характеристики (спадающие пунктирные линии);  $\omega_{\text{р}}$  – резонансной частоты  $A_3(\omega)$  (поднимающиеся пунктирные линии).

Согласно рис.63 не указанная на номограммах частота  $\omega_2=1/T_2$  определяется через  $\mu_1$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_c$ :

$$\lg \omega_2 = \frac{\mu_1}{20} + \lg \frac{\omega_1^2}{\omega_c} \quad (242)$$

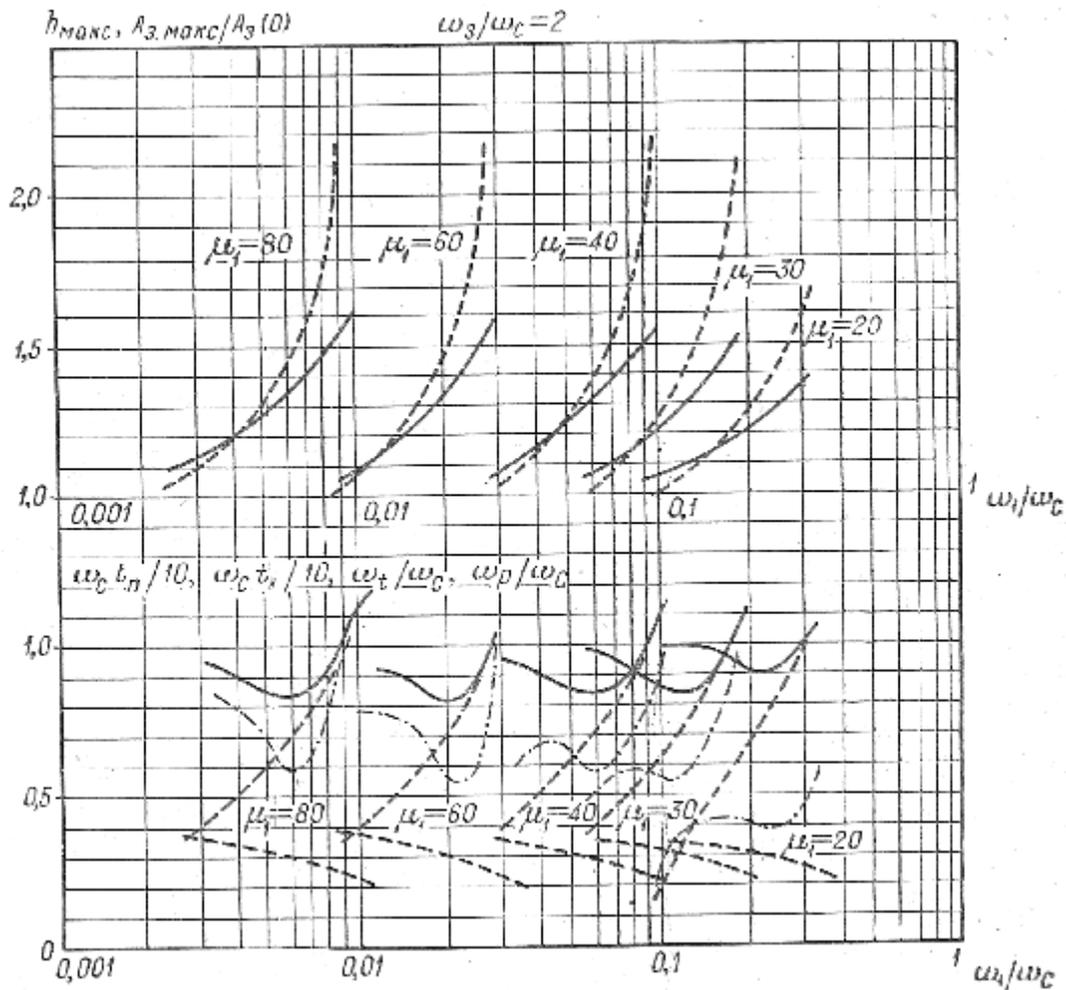


Рис. 64. Номограммы для определения параметров типовой ЛАЧХ ( $\omega_3/\omega_c = 2$ ).

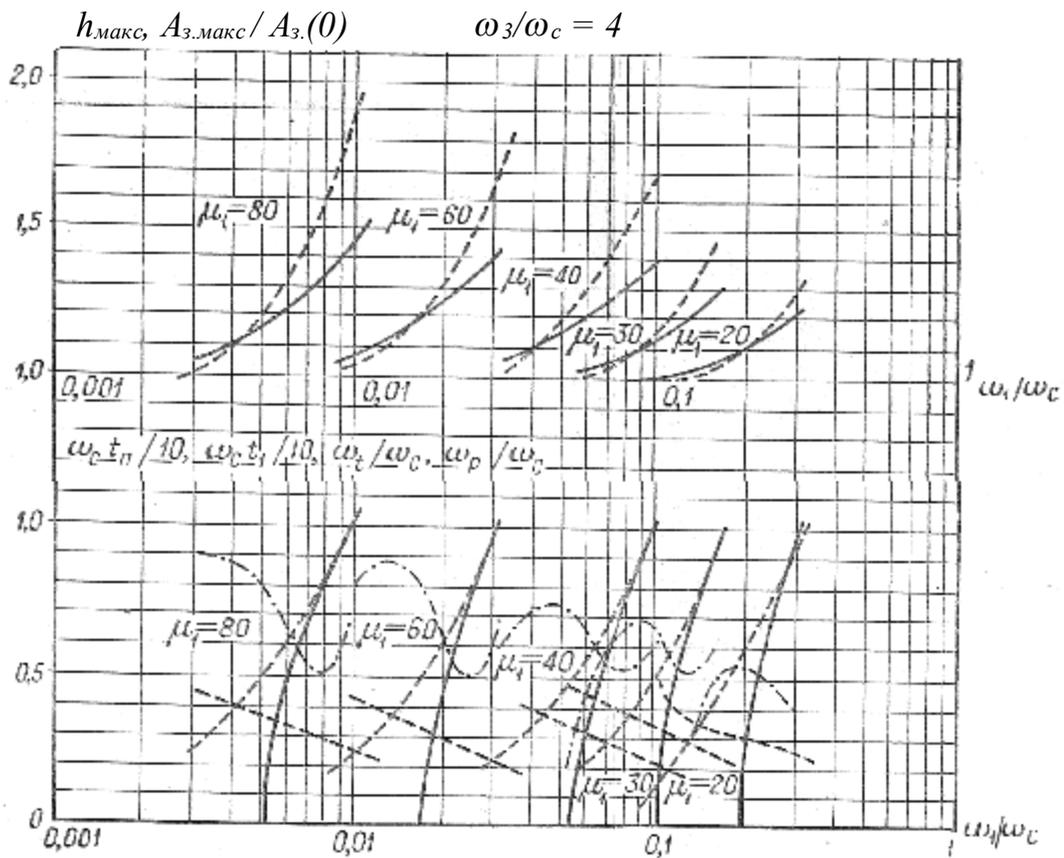


Рис. 65. Номограммы для определения параметров типовой ЛАЧХ ( $\omega_3/\omega_c = 4$ ).

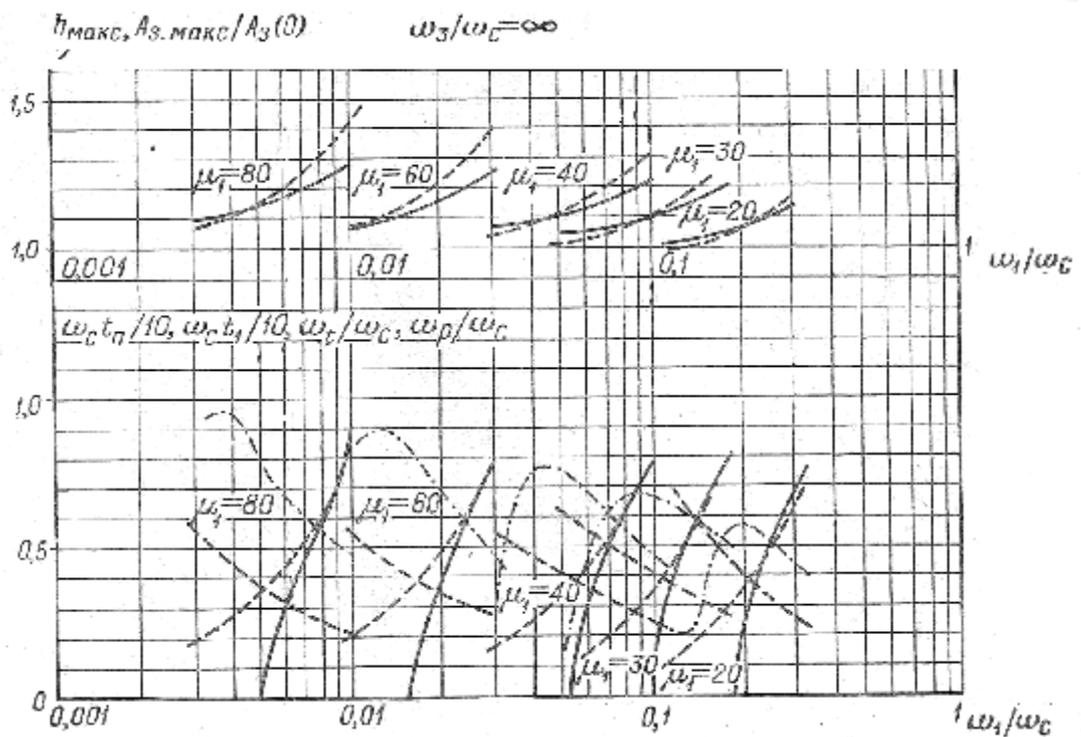


Рис. 66. Номограммы для определения параметров типовой ЛАЧХ ( $\omega_3/\omega_c = \infty$ ).

Приведенные номограммы пригодны также для систем более высокого порядка, если новые постоянные времени достаточно малы, так что определяемые ими сопрягающие частоты соответствуют значению  $L < -20$  дБ. Номограммы годятся и для ориентировочных оценок качества статических и астатических систем с более высоким порядком астатизма, если их ЛАЧХ отличаются от приведенной на рис. 63 типовой ЛАЧХ только на малых частотах, когда  $L > 20$  дБ [7].

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика корректирующего устройства находится вычитанием ординат ЛАЧХ исходной системы из ординат желаемой ЛАЧХ:

$$20 \lg W_{\text{кy}}(\omega) = 20 \lg W_{\text{ж}}(\omega) - 20 \lg W_{\text{об}}(\omega). \quad (243)$$

Передаточная функция корректирующего звена определяется по правилам, аналогичным сформулированным при построении логарифмических частотных характеристик. Для корректирующих устройств, ЛАЧХ которых изображены на рис. 67, передаточные функции имеют вид:

$$W_{\text{кy1}}(p) = \frac{k_1(T_1p+1)^2}{(T_2p+1)(T_3p+1)}, \quad W_{\text{кy2}}(p) = \frac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{(T_3p+1)(T_4p+1)},$$

$$W_{\text{кy3}}(p) = \frac{k_3(T_2p+1)(T_3p+1)}{p(T_4p+1)} \quad (244)$$

где  $k_1 = 10^{\frac{L_1}{20}}$ ,  $k_3 = \omega_1$ ,  $T_i = 1/\omega_i$

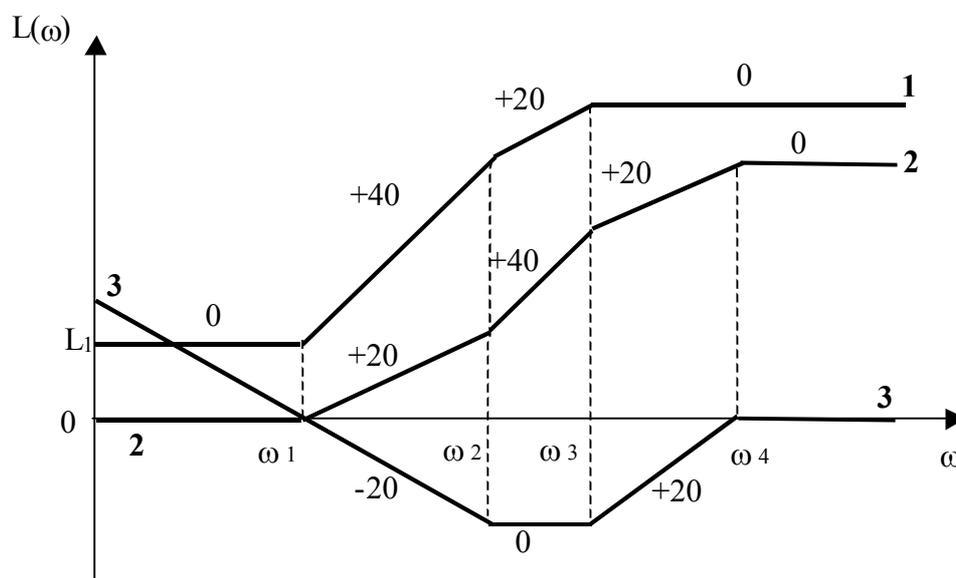


Рис. 67. Примеры ЛАЧХ корректирующих устройств.

Рассмотрим приведенные примеры подробнее.

ЛАЧХ №1 соответствует *активному корректирующему устройству*, т.е. имеющему отличный от единицы коэффициент передачи. Этот коэффициент определяется уровнем низкочастотной асимптоты характеристики. На час-

тоте  $\omega_1$  происходит изменение наклона ЛАЧХ до +40 дБ/дек, что обеспечивается введением в передаточную функцию корректирующего устройства двух форсирующих звеньев с одинаковыми постоянными времени  $T_1 = 1/\omega_1$ . Следует отметить, что такого же эффекта можно достигнуть путем использования форсирующего звена второго порядка с передаточной функцией  $T_1^2 p + 2\xi T_1 p + 1$ . Более того, второй подход предпочтительнее, если увеличение наклона на +40 дБ/дек связано с компенсацией действия колебательного звена, входящего в структуру исходной системы. Выбирая коэффициент  $\xi$  равным коэффициенту демпфирования колебательного звена, мы добиваемся полной компенсации действия последнего, тогда как использование двух форсирующих звеньев первого порядка не приносит ожидаемого результата. Это особенно заметно при малых значениях коэффициента демпфирования колебательного звена, когда его ЛАЧХ значительно отличается от асимптотического ее представления из-за большого резонансного пика. На частоте  $\omega_2$  наклон ЛАЧХ №1 снижается до +20дБ/дек, а на частоте  $\omega_3$  – до нуля, что достигается введением в структуру корректирующего устройства двух апериодических звеньев с соответствующими постоянными времени и коэффициентами передачи равными единице.

ЛАЧХ №2 описывает *пассивное корректирующее устройство*, которое имеет единичный коэффициент передачи. Требуемые наклоны асимптот характеристики легко формируются с помощью звеньев первого порядка: форсирующих и апериодических.

ЛАЧХ №3 соответствует корректирующему устройству с астатизмом первого порядка, так как наклон ее низкочастотной асимптоты равен –20дБ/дек. В структуре устройства имеется интегрирующее звено с передаточной функцией  $k_3/p$ . Коэффициент  $k_3$  определяется через частоту пересечения ЛАЧХ интегрирующего звена оси абсцисс. Дальнейшее построение передаточной функции не должно представлять затруднений.

В заключение отметим, что при использовании типовых ЛАЧХ рассчитанное корректирующее устройство часто оказывается физически нереализуемым. Сделать его физически реализуемым без существенного ухудшения динамики системы можно, если добавить в структуру устройства апериодические звенья с малыми постоянными времени.

## 6. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

### 6.1. Математическое описание и устойчивость нелинейных САР

Нелинейной является система, содержащая хотя бы одно нелинейное звено.

Все реальные САР нелинейны, однако часто имеется возможность свести задачу анализа к исследованию линейной модели реальной системы путем *линеаризации*. Методы линеаризации зависят от типа нелинейности, диапазона изменения координат системы и условий ее функционирования.

Так, если рассматривается система стабилизации, исходят из предположения, что диапазон изменения ее координат будет небольшим, и поэтому математическое описание системы *в отклонениях от установившегося режима* считают достаточно адекватным.

В случае, когда известна «точная» модель системы в виде нелинейных дифференциальных уравнений, линеаризацию последних часто проводят путем их разложения в ряд Тейлора. Пусть, например, реакция системы на задающее воздействие описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$F\left(y_{\text{зад}}, \frac{dy_{\text{зад}}}{dt}, \frac{d^2y_{\text{зад}}}{dt^2}, \dots, \frac{d^m y_{\text{зад}}}{dt^m}, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0. \quad (245)$$

Разложив данное уравнение в ряд Тейлора в окрестности точки «0» ( $y = y_{\text{зад}} = \text{const}$ ) и отбросив все члены выше первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial F}{\partial y_{\text{зад}}}\right|_0 \Delta y_{\text{зад}} + \left. \frac{\partial F}{\partial (dy_{\text{зад}}/dt)}\right|_0 \frac{d\Delta y_{\text{зад}}}{dt} + \left. \frac{\partial F}{\partial (d^2y_{\text{зад}}/dt^2)}\right|_0 \frac{d^2\Delta y_{\text{зад}}}{dt^2} + \dots \\ & + \left. \frac{\partial F}{\partial (d^m y_{\text{зад}}/dt^m)}\right|_0 \frac{d^m \Delta y_{\text{зад}}}{dt^m} + \left. \frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \left. \frac{\partial F}{\partial (dy/dt)}\right|_0 \frac{d\Delta y}{dt} + \\ & \left. \frac{\partial F}{\partial (d^2y/dt^2)}\right|_0 \frac{d^2\Delta y}{dt^2} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial (d^n y/dt^n)}\right|_0 \frac{d^n \Delta y}{dt^n} = 0. \end{aligned} \quad (246)$$

Таким образом, найдено линейное дифференциальное уравнение, связывающее отклонения  $\Delta y$  и  $\Delta y_{\text{зад}}$ . Чем меньше отклонения, тем точнее это уравнение будет описывать динамику системы. По нему можно определить передаточную функцию САР и все ее характеристики. Аналогично можно по-

лучить линеаризованные уравнения САР в пространстве состояний вида (10,11), если разложению подвергнуть исходные нелинейные уравнения (8,9).

А.М. Ляпуновым доказано, что если линеаризованная система устойчива, исходная система также будет устойчивой при достаточно малых отклонениях величин от установившегося режима (*устойчива в малом*).

Необходимо отметить, что описанный способ линеаризации применим только в случае так называемых *несущественных нелинейностей*, т.е. таких, для которых частные производные уравнения (246) при  $y = y_{\text{зад}} = \text{const}$  существуют и принимают конечные значения. Данный способ не годится, например, для исследования релейных систем, так как релейные характеристики являются существенно нелинейными.

На практике точное математическое описание некоторых элементов (в первую очередь объектов регулирования) системы часто неизвестно. В таком случае прибегают к экспериментальным способам определения дифференциальных уравнений, в частности к снятию и обработке кривых разгона, что также позволяет получить линейные уравнения в отклонениях (см. 3.4).

Если нелинейная система регулирования работает в условиях действия на нее случайных воздействий, используют так называемую *статистическую линеаризацию*, идея ее заключается в том, что нелинейные элементы заменяют линейными, реакция которых на случайный сигнал близка реакции нелинейных элементов. В качестве меры близости могут использоваться математическое ожидание и дисперсия выходного сигнала звена.

Для исследования автоколебательных режимов, характерных для релейных систем, широко применяется *гармоническая линеаризация*, рассмотренная в 6.4.

Существуют и другие способы линеаризации математического описания САР. Разработано также множество методов исследования нелинейных САР, основанных на использовании линеаризованных моделей. Необходимо отметить, что они по существу являются приближенными, так как используют «неточное» математическое описание.

Другой подход к исследованию нелинейных систем предполагает применение «исходного» нелинейного описания. Нелинейные системы характеризуются чрезвычайным многообразием. Поэтому не существует общей теории нелинейных систем, позволяющей решить все проблемы их анализа и синтеза, подобной теории линейных систем. Наиболее общие методы исследования в основном дают возможность определить только устойчивость нелинейных систем, а основанные на них методы синтеза – построить устойчивые системы. Добиться обеспечения требуемых показателей качества удастся, как правило, только подбором коэффициентов при имитационном моделировании на ЭВМ. Среди «общих» методов наиболее важными являются второй (прямой) метод А.М. Ляпунова и критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова [2,7].

## 6.2. Ограничение сигналов в САР

Исследуя любую реальную систему автоматического управления, мы всегда имеем дело с ограниченными сигналами. Непрерывные, в том числе

линейные, модели не учитывают данного обстоятельства и поэтому точно описывают поведение системы только в том диапазоне изменения переменных, в котором ограничения сигналов не вступают в силу. Часто предельные значения величин не достигаются и в реально работающей системе в нормальном режиме ее функционирования. Это касается в основном систем стабилизации, работающих при небольших отклонениях сигналов от номинальных значений. В других случаях, – например, при анализе следящих систем, ограничения сигналов необходимо учитывать, так как возможно, что большую часть времени переменные системы находятся на предельных уровнях. В таких условиях судить о качестве системы по ее переходной характеристике нельзя.

Ограничение сигналов в САР бывает двух видов. Во-первых, физически ограничены выходные сигналы всех реальных устройств: напряжение электрического преобразователя, ход исполнительного механизма и т.д. Во-вторых, некоторые величины ограничивают специально с целью предотвращения выхода из строя элементов системы, повышения ее надежности и т.д. Примером этого может служить ограничение токов исполнительных двигателей.

Рассмотрим ограничения первого вида. Пусть имеется некоторый преобразователь, рабочий участок характеристики которого линейен, а динамика описывается передаточной функцией  $W_n(p) = \frac{k}{Tp + 1}$ .

Статическая характеристика преобразователя имеет *участки насыщения* (рис. 68), которые и ограничивают его выходной сигнал.

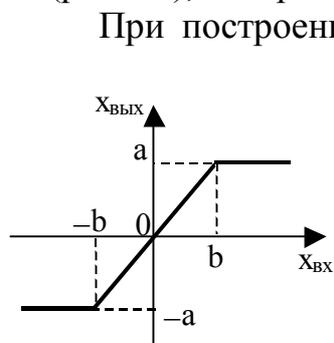


Рис. 68. Характеристика звена с ограничением.

При построении модели такого преобразователя можно использовать различные подходы. На рис. 69 приведено три варианта моделей, построенных в Simulink (см. 7.4). В первой модели звено, формирующее ограничение, находится «на выходе» динамического звена, во второй – «на входе». В обоих случаях наклон характеристики статического звена на линейной ее части соответствует единичному коэффициенту передачи, т.е.  $a = b$ . При этом в первой модели ограничение равно предельному значению выходной величины ( $a = x_{\text{ВЫХ, МАКС}}$ ), а во второй в  $k$  раз меньше ( $a = x_{\text{ВЫХ, МАКС}}/k$ ).

Третья модель использует представление аperiodического звена с помощью интегратора, сумматора и блоков усиления, т.е. это модель в пространстве состояний. Ограничение выходной величины здесь осуществляется путем остановки интегрирования при достижении предельных значений.

На рис. 70 показаны результаты моделирования в виде реакции всех трех моделей на прямоугольные импульсы при следующих параметрах:  $k = 1$ ;  $T = 1$ ;  $a = 0,5$ . Как видно из рисунка, кривые процессов существенно различаются, и возникает вопрос об адекватности моделей. Поэтому очевидно, что при выборе подхода нужно руководствоваться дополнительными сведениями,

полученными из анализа физических процессов, протекающих в техническом устройстве.

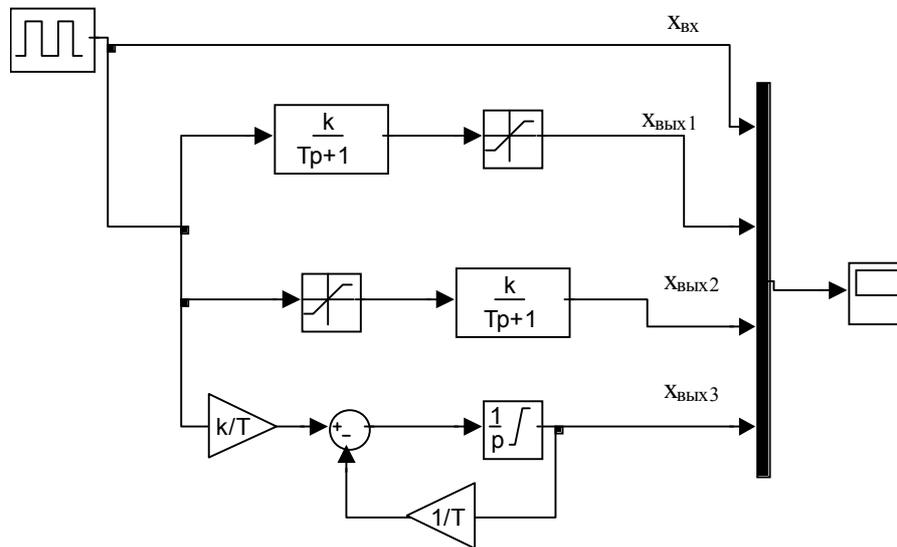


Рис. 69. Модели звена с ограничением.

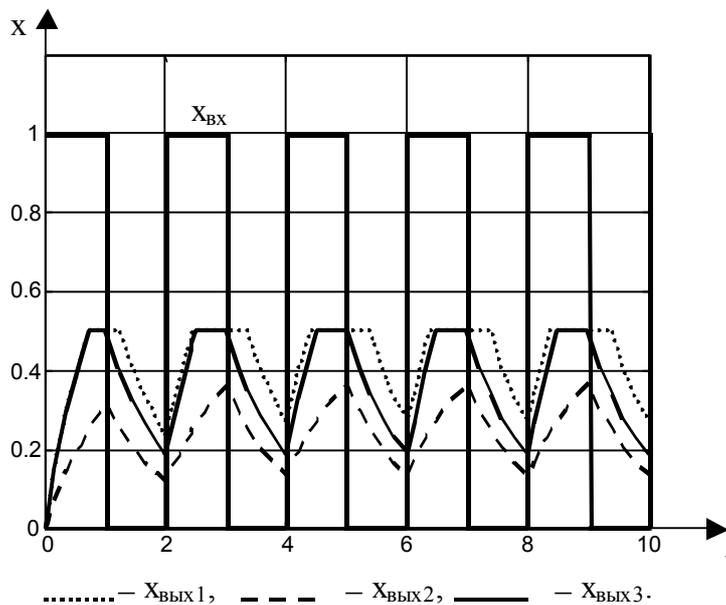


Рис. 70. Результаты моделирования звена с ограничением.

Пусть, например, рассматривается тиристорный преобразователь напряжения, основная инерционность которого – это инерционность выходного индуктивного (или емкостного) фильтра. Ограничение выходного напряжения связано, напротив, с работой блока тиристорov: оно не может превышать некоторого уровня, соответствующего их минимальному углу открытия. Отсюда следует, что для описания преобразователя лучше других подойдет вторая мо-

дель, так как звено ограничения в данном случае «предшествует» динамическому звену в направлении передачи сигнала.

Для моделирования ограничений, реализуемых цифровыми регуляторами, очевидно, лучше использовать подход, примененный в третьей модели, так как физическое ограничение связано в данном случае в «прекращении» интегрирования (счета) (см. 7.4.3).

Рассмотрим ограничения второго вида, т.е. вводимые в систему намеренно.

Ограничить выходной сигнал некоторого устройства можно, только соответствующим образом воздействуя на его вход. Это воздействие организуется с применением дополнительных обратных связей по ограничиваемым переменным. Существует несколько вариантов использования таких связей, основными среди которых являются так называемые «отсечки» и построение многоконтурной системы.

«Отсечкой» называется обратная связь, статическая характеристика которой имеет вид, показанный на рис. 71.

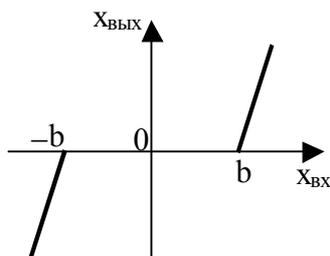


Рис. 71. Характеристика «отсечки».

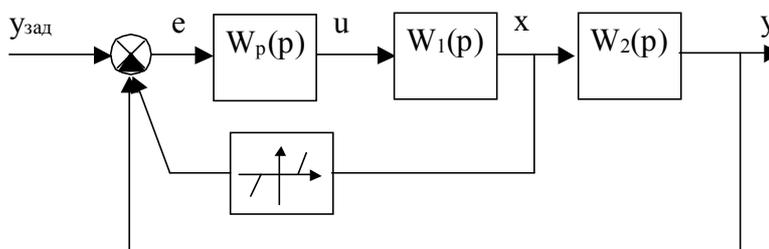


Рис. 72. Ограничение внутренней координаты с помощью «отсечки».

«Отсечка» включается параллельно основной обратной связи системы и воздействует на основной регулятор (рис. 72). Ее характеристика такова, что пока  $|x| < b$  она не оказывает никакого влияния на процессы, протекающие в системе. При выходе ограничиваемой переменной из зоны нечувствительности «отсечки» на регулятор подается дополнительный сигнал, который снижает модуль управляющего воздействия, следствием чего и является ограничение внутренней координаты.

Крутизна рабочих участков характеристики «отсечки» определяет эффективность ограничения.

Другой способ ограничения внутренних координат подразумевает применение дополнительных контуров регулирования с отдельными регуляторами.

Рассмотрим систему автоматического регулирования, структурная схема которой приведена на рис. 73.

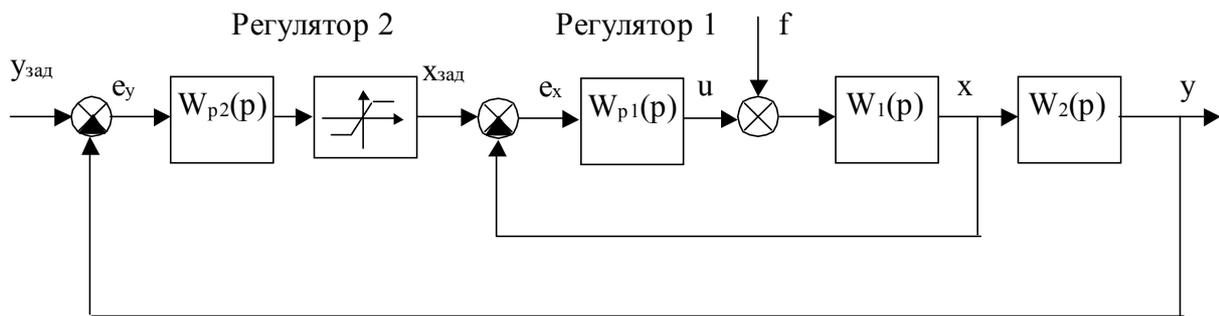


Рис. 73. Двухконтурная система автоматического регулирования.

Для регулирования внутренней координаты  $x(t)$  используется дополнительный регулятор с передаточной функцией  $W_{p1}(p)$ . Сигнал задания этому регулятору  $x_{зад}(t)$  формирует регулятор выходной величины системы. Ограничение этого сигнала и позволяет ограничить внутреннюю координату. Физически оба регулятора могут реализоваться на одном контроллере, а ограничение – программно.

Применение нескольких контуров, кроме прочего, повышает качество регулирования. В большинстве случаев внутренний контур системы является менее инерционным (более быстродействующим), чем внешний. Поэтому реакция внутреннего контура на изменения возмущений, действующих в нем, может быть настолько быстрой, что выходная величина системы не успеет значительно отклониться от задания. Таким образом, стабилизация внутренних координат делает систему менее чувствительной к возмущениям.

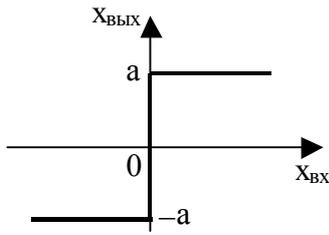
Расчет регуляторов многоконтурных систем осуществляется теми же методами, что и одноконтурных. Начинают расчет с самого внутреннего контура. Определив параметры (или даже структуру) внутреннего регулятора, рассчитывают передаточную функцию контура. Далее определяется передаточная функция эквивалентного объекта для внешнего регулятора и рассчитывается он сам.

В заключение отметим, что ограничение сигналов в САР безусловно сказывается на качестве процессов регулирования. В реальных системах оно приводит к замедлению реакции САР на достаточно большие задающие и возмущающие воздействия. В то же время из общих соображений можно сделать вывод, что влияние ограничений на устойчивость системы должно иметь положительный характер. Этот вывод можно обосновать и строго математически, используя, например, критерий Попова [2,7].

### 6.3. Особенности динамики релейных систем

Релейными называются системы, в которых осуществляется квантование сигналов по уровню (но не по времени). В состав таких систем входят элементы, имеющие статические характеристики релейного типа, основные из которых перечислены ниже.

1. *Идеальное двухпозиционное реле* имеет характеристику, приведенную на рис. 74.



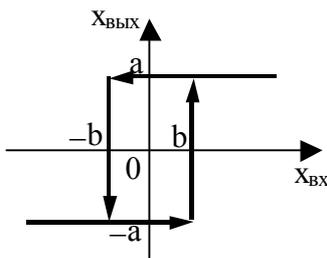
$$x_{\text{ВЫХ}} = a \text{ при } x_{\text{ВХ}} > 0;$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = -a \text{ при } x_{\text{ВХ}} < 0.$$

При  $x_{\text{ВХ}} = 0$  значение  $x_{\text{ВЫХ}}$  не определено.

Рис. 74.

2. Реальное двухпозиционное реле (двухпозиционное реле с зоной неоднозначности).



$$x_{\text{ВЫХ}} = a \text{ при } x_{\text{ВХ}} > b,$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = -a \text{ при } x_{\text{ВХ}} < -b,$$

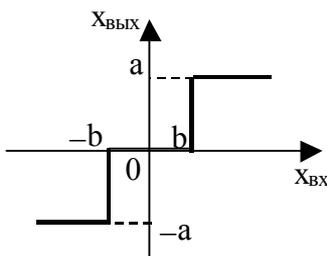
$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) \text{ при } -b < x_{\text{ВХ}}(t) < b,$$

где  $\Delta \rightarrow 0$ .

При  $x_{\text{ВХ}} = b$  и  $x_{\text{ВХ}} = -b$  значение  $x_{\text{ВЫХ}}$  не определено.

Рис. 75.

3. Идеальное трехпозиционное реле.



$$x_{\text{ВЫХ}} = a \text{ при } x_{\text{ВХ}} > b;$$

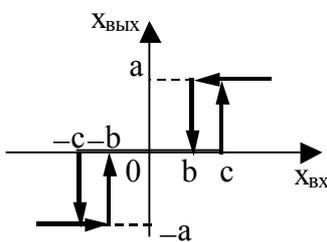
$$x_{\text{ВЫХ}} = -a \text{ при } x_{\text{ВХ}} < -b;$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = 0 \text{ при } -b < x_{\text{ВХ}} < b.$$

При  $x_{\text{ВХ}} = b$  и  $x_{\text{ВХ}} = -b$  значение  $x_{\text{ВЫХ}}$  не определено.

Рис. 76.

4. Реальное трехпозиционное реле (трехпозиционное реле с зоной неоднозначности).



$$x_{\text{ВЫХ}} = a \text{ при } x_{\text{ВХ}} > c,$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = -a \text{ при } x_{\text{ВХ}} < -c;$$

$$x_{\text{ВЫХ}} = 0 \text{ при } -b < x_{\text{ВХ}} < b;$$

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) \text{ при } -b > x_{\text{ВХ}}(t) > -c, \quad b < x_{\text{ВХ}}(t) < c,$$

где  $\Delta \rightarrow 0$ .

Рис. 77.

В следующих случаях значение  $x_{\text{ВЫХ}}$  не определено:

$$x_{\text{ВХ}}(t) = -c \text{ и } x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) = 0,$$

$$x_{\text{ВХ}}(t) = -b, \quad x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) = -a,$$

$$x_{\text{ВХ}}(t) = b, \quad x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) = a,$$

$$x_{\text{ВХ}}(t) = c, \quad x_{\text{ВЫХ}}(t-\Delta) = 0.$$

Характеристики 1 и 3 являются *однозначными*, их выходные сигналы зависят только от сигналов на входе.

Характеристики 2 и 4 имеют *зоны неоднозначности*. Для характеристики 2 эта зона определяется неравенством  $-b < x_{\text{вх}} < b$ , для характеристики 4 – неравенствами  $b < x_{\text{вх}}(t) < c$ ,  $-b > x_{\text{вх}}(t) > -c$ . Поведение релейных элементов  $x_{\text{вых}}(t)$  в зонах неоднозначности определяется их предшествующим состоянием  $x_{\text{вых}}(t-\Delta)$ . Таким образом, эти элементы проявляют динамические свойства. Отметим, что все реальные релейные элементы имеют зоны неоднозначности.

Кроме того, характеристики 3 и 4 имеют *зоны нечувствительности*, в которых выходной сигнал равен нулю. Для характеристики 3 эта зона определяется неравенством  $-b < x_{\text{вх}} < b$ , а для характеристики 4 она зависит от текущего состояния элемента. Например, при  $x_{\text{вх}}(t) = 0$  зона нечувствительности максимальна и определяется неравенством  $-c < x_{\text{вх}} < c$ .

Релейные одноконтурные САР, как правило, можно представить структурной схемой, приведенной на рис. 78.

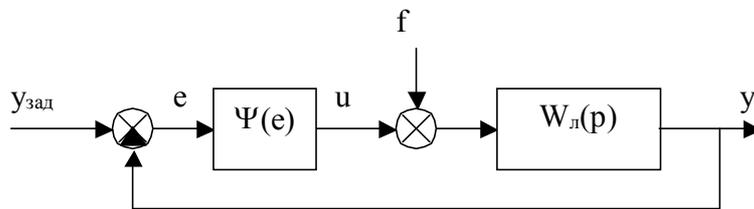


Рис. 78. Структурная схема релейной САР.

На рис. 78 обозначены:  $\Psi(e)$  – статическая характеристика релейного элемента (одна из характеристик 1–4);  $W_{\text{л}}(p)$  – передаточная функция линейной части системы;  $f$  – возмущающее воздействие (для простоты приведено к входу линейной части).

Выходной сигнал релейного элемента (РЭ) может принимать значения  $u = \pm a$  и, возможно,  $u = 0$ . Линейная часть системы устойчива или нейтральна, т.е.  $W_{\text{л}}(p)$  имеет левые и, возможно, нулевые полюса.

Рассмотрим характеристики системы при некоторых вариантах релейного элемента и линейной части.

1. Пусть  $W_{\text{л}}(p)$  не имеет нулевых полюсов и имеет коэффициент передачи  $k_{\text{л}}$ .

Предположим, что при  $u_{\text{зад}} = \text{const}$ ,  $f = \text{const}$  система находится в статическом режиме. Выходная величина системы может принимать лишь фиксированные значения, соответствующие уровням сигнала релейного элемента. Например, если релейный элемент имеет характеристику 1, в статике  $y = (f \pm a)k_{\text{л}}$ . Теоретически такой режим возможен при определенном отношении величин  $u_{\text{зад}}$ ,  $a$ ,  $f$ , и  $k_{\text{л}}$ , однако он не имеет никакого практического значения: поскольку выходная величина не зависит от задания, система не может выполнять задачу регулирования.

Поэтому единственно возможным реальным режимом функционирования рассматриваемой системы является динамический режим колебаний вы-

ходной величины около заданного уровня. Колебания обеспечиваются периодическими срабатываниями релейного элемента, которые, в свою очередь, вызываются периодическим изменением знака сигнала ошибки. Чтобы это было возможно, линейная часть системы должна обладать достаточно большим коэффициентом передачи (либо релейный элемент должен быть достаточно «мощным»). Кроме того, для подавления возмущения требуется, чтобы выходной сигнал релейного элемента значительно превосходил по модулю максимальное значение  $f$ .

Определим характер колебаний. Прежде всего очевидно, что они не могут быть неустойчивыми (расходящимися), так как их амплитуда ограничена. Действительно, модуль выходного сигнала системы:

$$|y| \leq (|f| + a)k_{\text{д}}. \quad (247)$$

Параметры колебаний (частота и амплитуда) определяются свойствами нелинейного элемента и линейной части. Рассмотрим процесс регулирования, изображенный на рис. 79.

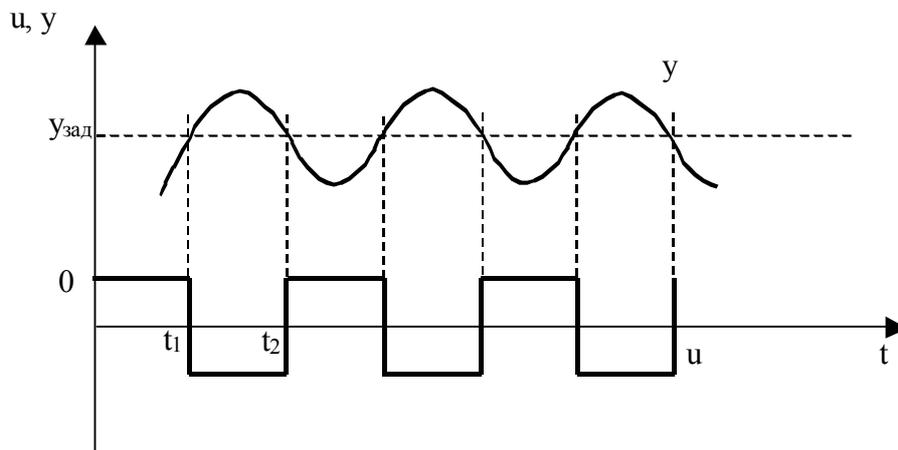


Рис. 79. Процесс регулирования в САР с идеальным двухпозиционным реле.

Такой процесс имеет место, если в качестве релейного элемента используется идеальное двухпозиционное реле. В момент времени  $t_1$  регулируемая величина системы достигает заданного значения и происходит переключение релейного элемента. Однако в силу инерционности, присущей линейной части, выходная величина продолжает увеличиваться. В некоторый момент времени она становится максимальной и далее начинает снижаться под действием отрицательного сигнала  $u$ . В момент времени  $t_2$  выходная величина вновь достигает  $u_{\text{зад}}$  и происходит «обратное» переключение релейного элемента. Впоследствии рассмотренный процесс продолжается. Таким образом, причиной колебаний в данном случае является инерционность линейной части системы: чем она выше, тем больше амплитуда и меньше частота колебаний.

Однако не всякая инерционность порождает колебания. Если, например, линейная часть описывается дифференциальным уравнением первого по-

рядка, т.е. имеет передаточную функцию  $W_{\text{л}}(p) = \frac{k_{\text{л}}}{Tp + 1}$ , колебаний в системе

не будет, каким бы большим ни было значение постоянной времени  $T$ . Дело в том, что звено первого порядка «может» мгновенно изменять скорость выходного сигнала при изменении входного. Другими словами, обладая инерционностью по состоянию, звено безынерционно по скорости его изменения. В результате переключение релейного элемента вызывает мгновенную реакцию линейной части, что в свою очередь является причиной нового переключения. Таким образом, в системе будут происходить бесконечно быстрые переключения релейного элемента, амплитуда колебаний выходной величины будет бесконечно малой (нулевой), а частота – бесконечно большой. С точки зрения точности регулирования такой процесс можно считать идеальным.

Итак, одной из причин возникновения колебаний является инерционность линейной части по скорости выходного сигнала. Ею обладают все линейные системы порядка выше первого. Другая причина – «неидеальность» релейного элемента, т.е. присутствие в его статической характеристике зоны неоднозначности.

Так, если релейный элемент имеет характеристику 2, колебания в системе будут наблюдаться даже в случае, когда линейная часть описывается передаточной функцией первого порядка. Объясняется это тем, что срабатывания релейного элемента будут происходить с некоторым запаздыванием относительно времени пересечения кривой процесса уровня  $y = y_{\text{зад}}$  (рис. 80).

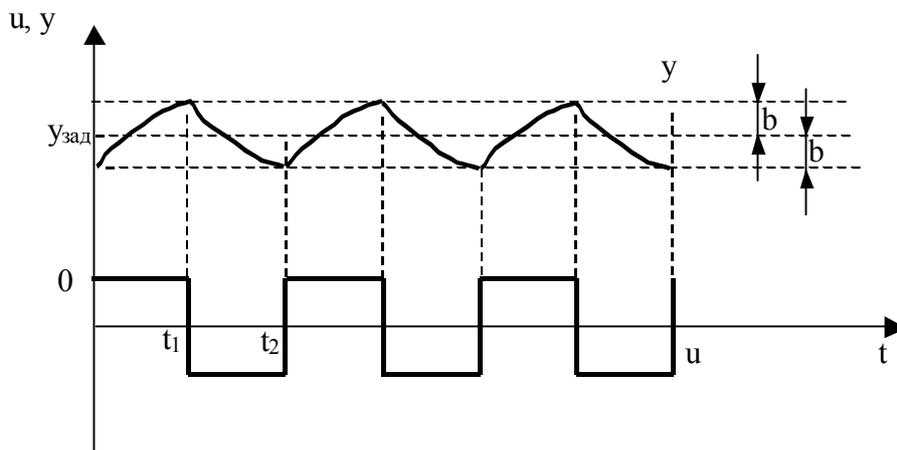


Рис. 80. Процесс регулирования в САР с реальным

двухпозиционным реле и  $W_{\text{л}}(p) = \frac{k_{\text{л}}}{Tp + 1}$ .

Влияние зоны нечувствительности на процесс регулирования имеет более сложный характер. Отметим лишь, что если амплитуда колебаний меньше зоны нечувствительности  $2b$ , колебания происходят не около заданного уровня  $y_{\text{зад}}$ , а около того уровня, при котором осуществляются переключения релейного элемента. В зависимости от значения сигнала возмущения и начального состояния системы это может быть  $y_{\text{зад}} - b$  или  $y_{\text{зад}} + b$ . Таким образом, в данном

случае трехпозиционное реле ведет себя как двухпозиционное, один из уровней сигнала которого равен нулю. Кроме того, так как часть времени процесса выходной сигнал реле равен нулю, «суммарное» воздействие на линейную часть меньше, что приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

Если передаточная функция линейной части имеет первый порядок, а реле не имеет зоны неоднозначности, колебания, как и в случае идеального процесса, будут бесконечно малы.

2. Пусть  $W_{л}(p)$  имеет один нулевой полюс. Тогда структуру системы можно представить в виде (рис. 81).

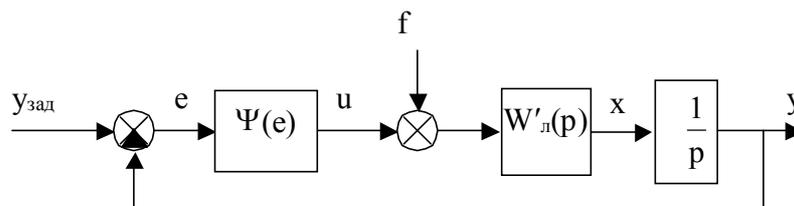


Рис. 81. Структурная схема релейной САР.

На рис. 81  $W'_{л}(p)$  – статическая передаточная функция, определяемая из условия

$$W_{л}(p) = W'_{л}(p) \frac{1}{p}. \quad (248)$$

Она имеет только левые полюса, ее коэффициент передачи равен  $k'_{л}$ .

Рассмотрим процесс регулирования в такой системе, если в качестве релейного элемента применяется идеальное двухпозиционное реле (рис. 82).

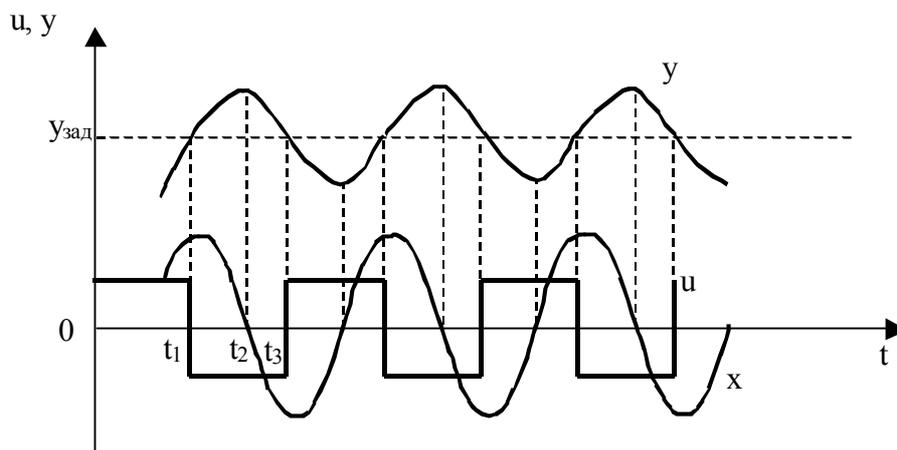


Рис. 82. Процесс регулирования в САР с идеальным двухпозиционным реле.

На промежутке времени  $t_1-t_3$  выходная величина САР превышает заданное значение. Это превышение вызвано тем, что при переключении реле в момент времени  $t_1$  промежуточная величина  $x$  изменяется не мгновенно, а с некоторой задержкой, обусловленной инерционными свойствами  $W'_{л}(p)$ . В момент времени  $t_2$  промежуточный сигнал становится равным нулю и рост ре-

гулируемой величины прекращается. В дальнейшем под действием отрицательного значения  $x(t)$  выходная величина снижается и в момент времени  $t_3$  вновь достигает заданного уровня, что вызывает новое срабатывание релейного элемента.

Очевидно, что рассматриваемая система не может быть неустойчивой. Неустойчивость системы предполагает непрерывное увеличение амплитуды колебаний регулируемой переменной. Как видно из рис. 82, причиной этого может быть только непрерывное увеличение амплитуды выходных колебаний звена  $W'_л(p)$ . Однако сигнал  $x(t)$  есть реакция устойчивой системы на ограниченное воздействие и поэтому его амплитуда не может увеличиваться бесконечно. Максимальное ее значение соответствует случаю, когда при достаточно малой частоте  $x(t)$  успевает достигнуть установившегося значения к моменту очередного переключения реле.

Если  $W'_л(p)$  не обладает инерционностью, колебания в системе будут иметь теоретически бесконечно малую амплитуду и бесконечно большую частоту. Как и в ранее рассмотренном случае, присутствие в характеристике реле зоны неоднозначности увеличивает амплитуду колебаний.

Важным свойством системы (рис. 81) является возможность установления в ней статического режима. Для этого необходимо, чтобы реле имело достаточно большую зону нечувствительности, а возмущение отсутствовало. Тогда при попадании выходной величины в зону нечувствительности входной сигнал звена  $W'_л(p)$  становится равным нулю, что приводит к тому, что сигнал  $x(t)$  через некоторое время также устанавливается на нуле. Если за это время разность  $u_{зад} - y(t)$  не успеет выйти из зоны нечувствительности, изменение переменных прекращается.

3. Пусть  $W'_л(p)$  имеет два нулевых полюса. Тогда структуру системы можно представить в виде (рис. 83)

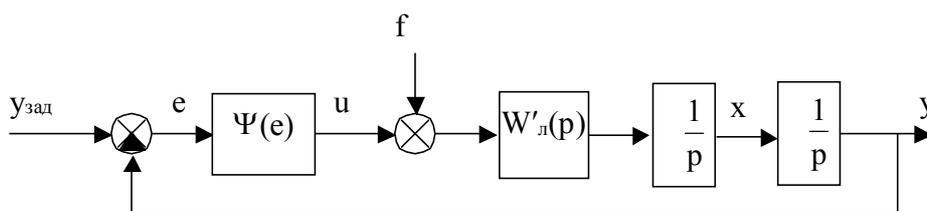


Рис. 83. Структурная схема релейной САР.

Рассмотрим случай, когда  $W'_л(p) = k'_л$ , а релейный элемент имеет характеристику идеального двухпозиционного реле. Процесс регулирования, соответствующий этому случаю, показан на рис. 84 кривыми  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Он представляет собой незатухающие колебания, характер которых легко понять, если проанализировать уравнения, связывающие эти величины:

$$\begin{cases} u = a \cdot \text{sign}(y_{\text{зад}} - y), \\ x = k'_{\text{л}} \int_0^t (u(\tau) + f) d\tau, \quad f = \text{const}, \quad |u| > |f|, \\ y = \int_0^t x(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (249)$$

Амплитуда и частота колебаний определяются значением сигнала  $x(t)$ , достигнутого к моменту переключения реле.

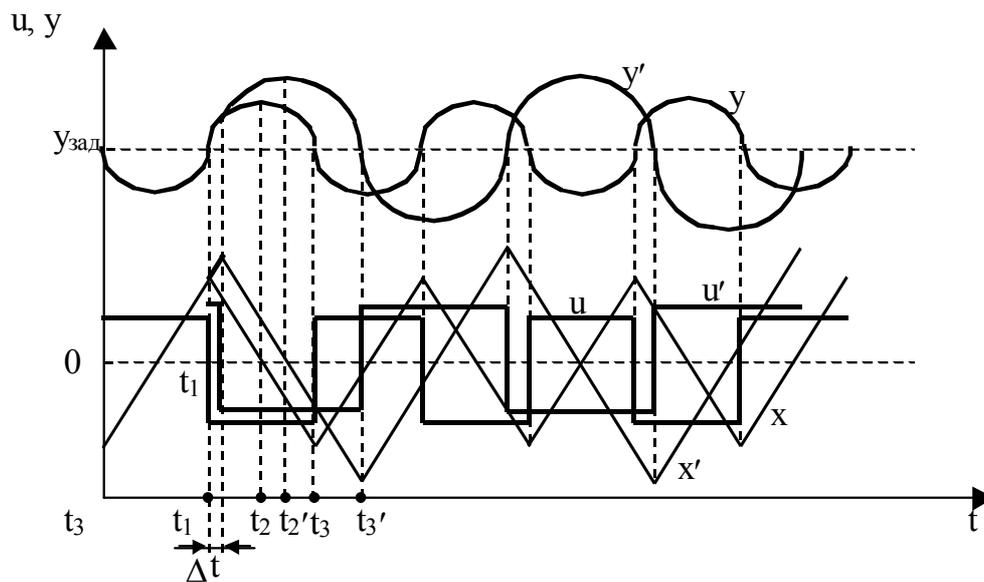


Рис. 84. К определению устойчивости релейной САР.

Допустим, на некотором периоде колебаний по каким-либо причинам «направление» интегрирования первого интегратора изменилось не мгновенно, в момент времени  $t_1$  (см. рис. 84), а через некоторое время  $\Delta t$ . Это может произойти, например, если возникла задержка при переключении реле, как и показано на рисунке. В результате выходной сигнал первого интегратора на пике своей характеристики достигнет большего значения по сравнению с исходным вариантом. Далее он начинает уменьшаться и в момент времени  $t_2'$  станет равным нулю. Заметим, что  $t_2' - t_1 > \Delta t$ . Очевидно, что поскольку  $t_2' - t_1 > t_2 - t_1$ , выходная величина системы также достигнет большего максимального значения:  $y'(t_2') > y(t_2)$ . Поэтому для уменьшения выходной величины до нуля потребуется большее время:  $t_3' - t_2' > t_3 - t_2$ . Это означает, что при очередном переключении реле выходной сигнал первого интегратора будет меньше по сравнению с исходным вариантом:  $x'(t_3') < x(t_3)$ . Ясно, что в последующих периодах колебаний амплитуды сигналов не изменятся.

Таким образом, единичная задержка при изменении «направления» интегрирования первого интегратора приводит к увеличению амплитуды и

уменьшению частоты колебаний. Если такая задержка будет происходить в каждом периоде, амплитуда будет расти, а частота уменьшаться непрерывно, и, следовательно, система будет неустойчивой.

Причиной рассмотренного эффекта может быть неидеальность реле, т.е. присутствие в ее характеристике зоны неоднозначности. Кроме того, задержка, о которой шла речь выше, всегда будет иметь место, если звено  $W_{л}(p)$  обладает инерционностью. Действительно, в данном случае даже при «своевременном» срабатывании реле потребуется некоторое время для того, чтобы входной сигнал первого интегратора изменил свою полярность, в выходной – «направление» интегрирования.

Подобное исследование системы для случая трехпозиционного реле приводит к аналогичным выводам.

Как уже было сказано, характеристики всех реальных реле имеют зоны нечувствительности. Кроме того, никакая реальная линейная часть системы не может содержать только интегрирующие звенья, так как в ней обязательно присутствуют некая инерционность (пусть даже и небольшая). Поэтому из всего сказанного следует, что *реальная релейная система, линейная часть которой имеет два нулевых полюса, неустойчива.*

Отметим, что если в линейную часть входят три или более интеграторов, система будет неустойчива при любых условиях.

#### 6.4. Анализ автоколебаний в нелинейных системах методом гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации позволяет определять условия существования и параметры возможных автоколебаний в нелинейных системах.

Согласно методу схема системы автоматического регулирования приводится к следующей виду (рис. 85).

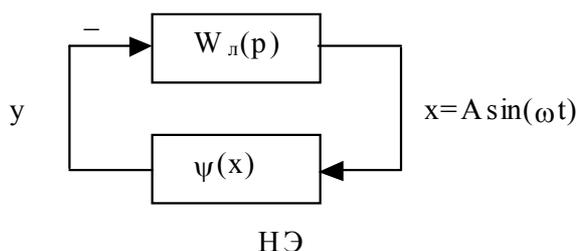


Рис. 85. Расчетная схема системы.

Отсутствие входов у системы, изображенной на рис. 85, объясняется тем, что данная расчетная схема предназначена для исследования именно автоколебаний, – т.е. колебаний, амплитуда и частота которых не зависят от входных воздействий, а определяются только свойствами системы. В реальной системе эти колебания будут происходить относительно уровня, определяемого входными сигналами.

Система состоит из линейной части  $W_{л}(p)$  и нелинейного элемента, заданного статической характеристикой  $\psi(x)$ . В реальных САУ, в частности ре-

лейных, эта характеристика, как правило, симметрична относительно осей координат. Поэтому в дальнейшем и будем полагать ее таковой.

Предполагается, что в системе существуют автоколебания, поэтому величины  $x$  и  $y$  являются периодическими функциями времени. Основным допущением метода является то, что колебания на входе нелинейного элемента считаются синусоидальными:

$$x = A \sin(\omega t), \quad (250)$$

где  $A$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота колебаний.

В действительности же эти колебания несинусоидальны вследствие искажения их формы нелинейным звеном. Однако если предположить, что линейная часть системы близка по своим свойствам к фильтру низких частот и значительно ослабляет высшие гармоники входного сигнала, пропуская лишь первую гармонику, то сделанное допущение вполне оправдано. Отсюда следует, что для анализа системы достаточно знать только первую гармонику выходного сигнала нелинейного элемента. Для ее определения разложим выходные колебания  $y(t)$  в ряд Фурье и отбросим высшие гармоники. В результате получим

$$y(t) = \psi(x) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), \quad (251)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) \sin(\omega t) d(\omega t), \quad (252)$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) \cos(\omega t) d(\omega t). \quad (253)$$

Из (250)

$$\sin(\omega t) = \frac{x}{A}. \quad (254)$$

Продифференцировав это равенство, получим

$$\cos(\omega t) = \frac{px}{A\omega}, \quad (255)$$

где  $p$  – оператор дифференцирования.

Подставив (254) и (255) в (251), получим

$$y = \left( k_1 + \frac{k_2}{\omega} p \right) x, \quad (256)$$

где

$$\begin{cases} k_1 = \frac{C_1}{A}, \\ k_2 = \frac{C_2}{A}. \end{cases} \quad (257)$$

Коэффициенты  $k_1(A)$  и  $k_2(A)$  называются *коэффициентами гармонической линейаризации*, или *гармоническими коэффициентами передачи*. Коэффициент  $k_1(A)$  определяет выходную гармоническую составляющую, совпадающую по фазе с входным гармоническим сигналом, а коэффициент  $k_2(A)$  – выходную составляющую, сдвинутую по фазе относительно входного сигнала на  $\pi/2$  вперед или назад в зависимости от знака  $k_2(A)$ . Этот коэффициент появляется в (256) только в случае неоднозначных характеристик. Неоднозначность  $\psi(x)$  приводит к тому, что при изменении знака входного сигнала происходит запаздывание в изменении выходного сигнала в связи с переходом на другую ветвь характеристики. В результате при гармоническом входном воздействии возникает запаздывание по фазе первой гармоники относительно входного сигнала.

Коэффициенты гармонической линейаризации многих нелинейностей, часто встречающихся в системах, рассчитаны и приведены в соответствующей литературе [2,7]. Ниже даны коэффициенты для четырех типов релейных характеристик, описанных ранее.

1. Идеальное двухпозиционное реле:

$$k_1(A) = \frac{4a}{\pi A}, \quad k_2(A) = 0. \quad (258)$$

2. Реальное двухпозиционное реле:

$$k_1(A) = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \text{ при } A \geq b, \quad k_2(A) = -\frac{4ab}{\pi A^2} \text{ при } A \geq b. \quad (259)$$

3. Идеальное трехпозиционное реле:

$$k_1(A) = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \text{ при } A \geq b, \quad k_2(A) = 0. \quad (260)$$

4. Реальное трехпозиционное реле:

$$k_1(A) = \frac{2a}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} \right] \text{ при } A \geq c,$$

$$k_2(A) = \frac{2ab}{\pi A^2} \left( 1 - \frac{b}{c} \right) \text{ при } A \geq c, \quad (261)$$

Из (256) получаем передаточную функцию гармонически линейаризованного нелинейного элемента

$$W_{\text{нз}}(p) = k_1 + \frac{k_2}{\omega} p. \quad (262)$$

Отметим, что в отличие от передаточных функций линейных звеньев параметры  $W_{\text{нз}}(p)$  зависят от частоты  $\omega$  и амплитуды  $A$  гармонического сигнала.

Передаточная функция (262) используется для описания нелинейного элемента при исследовании системы на предмет определения возможности и параметров автоколебаний. При этом применяются рассмотренные ранее критерии устойчивости. В частности, если используется критерий Найквиста, условие нахождения системы на границе устойчивости будет

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = W_{\text{л}}(j\omega)W_{\text{нз}}(j\omega, A) = -1. \quad (263)$$

Из (263) следует, что автоколебания в системе возможны при таких  $A$  и  $\omega$ , когда

$$W_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{нз}}(j\omega, A)}. \quad (264)$$

Характеристика  $-\frac{1}{W_{\text{нз}}(j\omega, A)}$  называется *инверсной характеристикой гармонически линеаризованного нелинейного элемента*. Она определяется через передаточную функцию (262):

$$-\frac{1}{W_{\text{нз}}(j\omega, A)} = -\frac{1}{k_1(A) + jk_2(A)} = \frac{-k_1(A) + jk_2(A)}{k_1^2(A) + k_2^2(A)}. \quad (265)$$

Как видно из (265) в отличие от  $W_{\text{л}}(j\omega)$ , инверсная характеристика нелинейного элемента есть функция амплитуды, а не частоты колебаний.

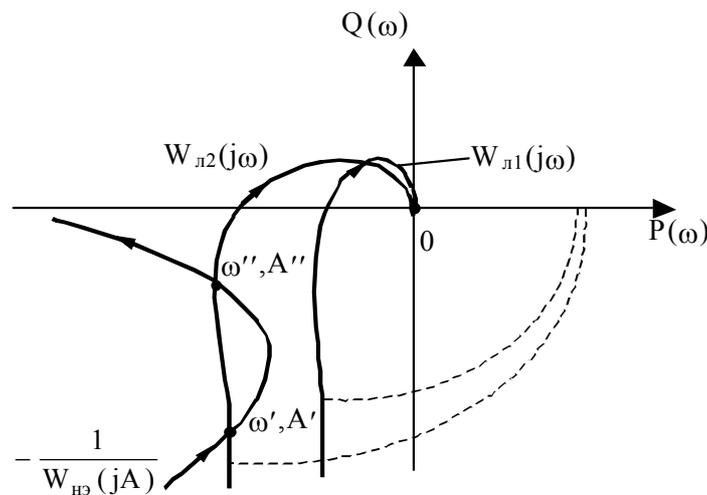


Рис. 86. К определению возможности и параметров автоколебаний.

Для определения возможности и параметров автоколебаний необходимо на комплексной плоскости построить АФЧХ линейной части и инверсную характеристику нелинейного элемента (рис.86).

Точки пересечения двух годографов определяют параметры возможных автоколебаний. Их частота определяется по  $W_{л}(j\omega)$ , амплитуда – по инверсной характеристике нелинейного элемента.

Так, если линейная часть системы имеет АФЧХ  $W_{л1}(j\omega)$  (рис. 86), автоколебания в системе отсутствуют. В случае, когда АФЧХ линейной части равна  $W_{л2}(j\omega)$ , возможны два варианта автоколебательных режимов, различающихся частотами и амплитудами. Необходимо определить, какой из этих вариантов соответствует реальным устойчивым автоколебаниям, а какой – неустойчивым колебаниям. Для этого можно воспользоваться критерием, предложенным Е.П. Поповым: *если при увеличении амплитуды инверсная характеристика нелинейного элемента выходит из зоны охвата АФЧХ линейной части системы, автоколебания устойчивы*. В противном случае колебания в системе неустойчивы.

В нашем случае устойчивые автоколебания характеризуются частотой  $\omega''$  и амплитудой  $A''$ . Колебания с частотой  $\omega'$  неустойчивы.

## 7. НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМЫ MATLAB ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

### 7.1. Обзор системы

Эффективным средством исследования и синтеза систем управления являются специализированные математические программы. Безусловный лидер среди них – система Matlab фирмы MathSoft. Наиболее важными ее достоинствами являются:

наличие мощного языка программирования, поддерживающего множество типов данных, объектно-ориентированное программирование, разнообразные управляющие конструкции и полноценный графический интерфейс;

наличие подсистемы имитационного моделирования Simulink, позволяющей естественным образом строить и исследовать модели самых сложных систем управления (и не только управления).

Эти достоинства определили развитие системы – на сегодняшний день разработано несколько десятков пакетов прикладных программ (Toolboxes), написанных на языке Matlab, а также наборов блоков (Blocksets), расширяющих базовую библиотеку Simulink. Они предназначены для решения самых разнообразных задач в различных отраслях знаний. Перечислим пакеты и наборы блоков, назначение которых прямо или косвенно связано с проблемами управления:

Control Systems – непрерывные и дискретные линейные системы;

Filter Design – анализ и синтез дискретных фильтров;

Fuzzy Logic – управление на основе нечеткой логики;

LMI Control – анализ, синтез и оптимизация систем с помощью линейных матричных неравенств (linear matrix inequalities);

Model Predictive Control – оптимальное управление системами, имеющими ограничения на вектор состояния и выходные переменные;

Mu-Analysis and Synthesis и Robust Control – анализ и синтез робастных (нечувствительных к изменению параметров) систем управления;

Neural Network – моделирование нейронных сетей;

Optimization – решение оптимизационных задач;

Signal Processing – обработка непрерывных и дискретных сигналов;

System Identification – идентификация систем (построение моделей на основе опытных данных);

Simulink (базовая библиотека блоков) – имитационное моделирование систем управления с помощью методов численного интегрирования;

DSP Blockset и Fixed Point Blockset – цифровая обработка сигналов (digital signal processing);

Nonlinear Control Design – синтез систем управления с помощью оптимизационных методов.

Хотя дальнейшее изложение предполагает знание основ языка программирования Matlab, его изучение выходит за рамки данного пособия. Самостоятельно освоить язык и интерфейсы системы можно с помощью справочной системы и многочисленных учебных пособий, в частности [5].

## 7.2. Математическое описание и характеристики линейных систем

### 7.2.1. Пакет *Control* для исследования линейных объектов и систем

Пакет прикладных программ Control Systems предназначен для решения разнообразных задач, связанных с анализом и синтезом линейных систем автоматического управления. Как и многие другие, пакет построен на основе объектно-ориентированной технологии и включает несколько классов, представляющих математическое описание линейных объектов:

`tf` (transfer function) – передаточные функции;

`ss` (state space) – описание в пространстве состояний;

`zpk` (zero-pole-gain) – описание в виде нулей, полюсов и коэффициентов передаточных функций.

Все эти классы являются потомками виртуального класса `lti` (linear time-invariant – линейные системы с постоянными параметрами) и наследуют от него поля (свойства) для описания объектов и методы (функции) для работы с ними.

Объекты `tf`, `ss`, `zpk` описываются соответствующими структурами, поля которых заключают свойства объекта. Набор свойств для всех классов можно просмотреть введя:

```
help ltiprop
```

Доступ к полям объектов в Matlab осуществляется с помощью функций `set` (установить) и `get` (получить) и путем непосредственного обращения к полю. Однако в большинстве случаев необходимости в этом нет, так как основные поля заполняются и изменяются функциями пакета.

Для детального ознакомления с функциями воспользуйтесь справочной системой:

меню окна управления Matlab;

командами помощи: `help control`, `help 'function_name'`;

командой демонстрации: `demo`.

Большинство функций пакета Control работает со всеми тремя классами объектов, меняя алгоритм своей работы в зависимости от типа объекта. Для создания объектов применяется функции-конструкторы, название которых совпадает с именем класса: `tf`, `ss`, `zpk`.

Для освоения техники работы с объектами классов рекомендуем выполнить приведенные ниже упражнения.

#### Упражнение 1. Передаточные функции.

Объекты класса `tf`, описывают с помощью передаточных функций систему с несколькими входами и выходами, – возможно, с запаздыванием по управляющим входам.

Создадим SISO-объект (single input – single output: "один вход – один выход"):

```
sys = tf([1 2],[1 2 2 1])
```

Добавим запаздывание:

```
sys.Td = 0.5
```

Посмотрим свойства:

```
get(sys)
```

Посмотрим возможный набор свойств:

```
set(sys)
```

Создадим объект MIMO (many inputs – many outputs: "много входов – много выходов") 2 на 2 (здесь используются так называемые *cell-массивы*, или *массивы ячеек* – базовый тип системы Matlab):

```
sys1 = tf({1, 2; 4, [1 3]}, {[1 2], [2 1]; 1, [1 2 1]})
```

Добавим запаздывание по второму управлению:

```
sys1.Td = [0 .3]
```

Пакет Control позволяет легко проводить любые структурные преобразования системы. Для упрощения преобразований переопределены основные арифметические операции для работы с объектами `tf`: умножение, деление и т.д. Введем две передаточные функции:

```
sys1 = tf(1,[1 1])  
sys2 = tf([1 1],[1 2 1])
```

Передаточная функция последовательного соединения звеньев `sys1` и `sys2` определяется:

```
sys = sys1*sys2
```

Параллельное соединение:

```
sys = sys1+sys2
```

Деление (вспомогательная операция):

```
sys = sys1/sys2
```

Соединение в виде отрицательной обратной связи:

```
sys = sys1/(1+sys1*sys2)
```

Однако лучше воспользоваться функцией `feedback`:

```
sys = feedback(sys1,sys2)
```

После преобразований иногда полезно упростить модель с помощью функции `minreal` (минимальная реализация). Например, сравните:

```
sys = sys1*sys2  
sys = minreal(sys)
```

Переопределим переменную `sys`:

```
sys = tf([1 1], [2 9 14 8])
```

Нули передаточной функции:

```
tzero(sys)
```

Полюса передаточной функции:

```
pole(sys)
```

Коэффициент передачи:

```
dcgain(sys)
```

Переходная характеристика системы `sys`:

```
step(sys)
```

Посмотрим возможные варианты использования функции

```
help step
```

Функция позволяет строить переходные характеристики нескольких систем, задавать вектор расчетных точек по времени, в случае необходимости функция возвращает результаты вычислений (при этом она не строит графики).

Расчет реакции системы на произвольное воздействие осуществляется с помощью процедуры в три шага:

1) задается вектор моментов времени, – например, от нуля до единицы с шагом 0,1:

```
t = 0:.1:10
```

2) задается вектор (для SISO) или матрица (для MIMO) значений входных воздействий в расчетные моменты времени, – например,  $u = 10$  при  $t = 0..5$  и  $u = 20$  при  $t = 5..10$ :

```
u = [10*ones(1, 50), 20*ones(1, 51)]
```

3) рассчитывается и строится переходной процесс:

```
lsim(sys, u, t)
```

Смотрите также

```
help lsim
```

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

```
nyquist(sys)
```

Смотрите также

```
help nyquist
```

Логарифмические частотные характеристики:

```
bode(sys)
```

Смотрите также

```
help bode
```

Следует обратить внимание на то, что функция `bode` в случае вызова ее в виде:

```
[a, f, w] = bode(sys)
```

возвращает значения амплитудно-частотной  $a$  и фазочастотной  $f$  характеристик, а также вектор расчетных частот  $w$ . При этом переменные  $a$  и  $f$  представляют собой трехмерные массивы, в которых первые две размерности задают канал системы (номер входа, номер выхода), а третья соответствует расчетным точкам. Если исследуется «одноканальная» SISO-система, эти переменные можно преобразовать в векторы:

```
a = a(:); f = f(:);
```

В таком формате их в дальнейшем проще использовать (например, в качестве параметров функции `plot`).

Аналогичная ситуация имеет место и с функцией `nyquist`, с помощью которой можно вычислить вещественную и мнимую частотные характеристики.

Структура объекта `tf` позволяет учесть только запаздывание по управлению. Запаздывание по состоянию (появляется, например, при замыкании разомкнутой системы с запаздыванием по управлению) можно учесть с помощью аппроксимации Паде. Например, аппроксимация запаздывания 2 сек. передаточной функцией 5-го порядка:

```
[numd, dend] = pade(2, 5)
td = tf(numd, dend)
```

Проверим ее эффективность:

```
sys = tf(1, [1 1])
step(sys, sys*td)
```

Другие функции можно самостоятельно освоить, используя справочную систему.

### Упражнение 2. Описание систем в пространстве состояний.

State Space-объект описывает с помощью матриц уравнений состояний и выхода систему с несколькими входами и выходами, – возможно, с запаздыванием по управляющим входам.

Смотрите

```
help ss
```

Зададим матрицы описания SISO-объекта 2-го порядка:

```
A = [0 1; -2 -3]
B = [0; 1]
C = [2 1]
D = 0
```

Соответствующая state-space модель:

```
sys = ss(A, B, C, D)
```

Передаточная функция этого объекта:

```
tf(sys)
```

Просмотрим свойства:

```
get(sys)
```

Просмотрим возможный набор свойств:

```
set(sys)
```

Зададим матрицы описания ММО-объекта 2-го порядка с двумя входами и двумя выходами:

```
A = [0 1;-2 -3]
```

```
B = [1 0 ;0 1]
```

```
C = [2 1;2 3]
```

```
D = [0 0;0 1]
```

Соответствующая state-space модель:

```
sys = ss(A,B,C,D)
```

Передаточные функции по всем каналам

```
tf(sys)
```

Все рассмотренные выше функции для tf-моделей работают и с ss-моделями, – например:

```
step(sys)
```

```
nyquist(sys)
```

Преобразование  $tf \rightarrow ss$  в отличие от  $ss \rightarrow tf$  неоднозначно. Пусть

```
sys =tf([1 1], [1 2 2 1])
```

1. Получим представление системы в виде фазовых переменных. Извлечем числитель и знаменатель передаточной функции. Обратите внимание на преобразование типа переменной `num` из массива ячеек в «обыкновенный» массив:

```
num = sys.num, num = num{1}
```

```
den = sys.den, den = den{1}
```

Получим матрицы описания:

```
[a,b,c,d] = tf2ss(num,den)
```

Сформируем объект:

```
sys1 = ss(a,b,c,d)
```

2. Получим представление в виде координат, пропорциональных фазовым. Для этого используем конструктор `ss`:

```
sys1 = ss(sys)
```

3. Представление в каноническом "модальном" виде:

```
sys1 = canon(sys, 'modal')
```

4. Представление в каноническом "companion" виде:

```
sys1 = canon(sys, 'companion')
```

### Упражнение 3. ZPK-модели.

ZPK-объект описывает с помощью наборов нулей, полюсов и коэффициентов систему с несколькими входами и выходами, – возможно, с запаздыванием по управляющим входам.

Смотрите:

```
help zpk
```

Пусть имеем объект с передаточной функцией

```
sys = tf([1 2],[ 1 2 2 1])
```

Его нули и полюса:

```
tzero(sys), pole(sys)
```

Соответствующая zpk-модель:

```
sys1 = zpk(sys)
```

Просмотрим свойства:

```
get(sys1)
```

Просмотрим возможный набор свойств:

```
set(sys1)
```

Зададим zpk-объект с нулями -1,-2 и полюсами -2,  $-.5+2j$ ,  $-.5-2j$  и коэффициентом 4:

```
sys2 = zpk([-1 -2],[ -2, -.5+2i, -.5-2i], 4)
```

Его передаточная функция:

```
tf(sys2)
```

### **7.2.2. Символьные вычисления в Matlab. Получение математического описания САР с неизвестными коэффициентами**

При выполнении некоторых расчетов приходится строить математическое описание системы в ситуации, когда некоторые коэффициенты системы неизвестны. К сожалению, пакет Control Systems не поддерживает данные с неопределенными значениями и символьные вычисления. Поэтому приходится пользоваться другими возможностями системы, в основном пакетом символьной математики Symbolic Math. Этот пакет позволяет производить простейшие символьные операции и предоставляет доступ к ядру широко известной программы Maple. Хотя средства пакета существенно ограничены по сравнению с Maple, их вполне хватает для решения многих задач.

Предлагаем проделать следующее упражнение.

Требуется построить модель системы, структура которой приведена на рис. 87, в пространстве состояний, получить передаточную матрицу системы и построить переходные характеристики при определенном значении варьируемого коэффициента (например, при  $k = 10$ ).

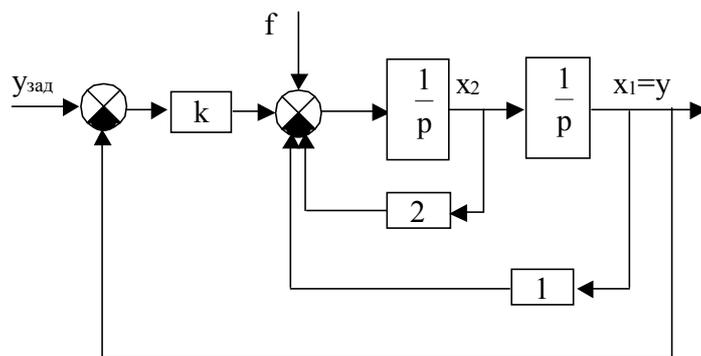


Рис. 87. Структурная схема системы.

Уравнения системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + k(y_{\text{зад}} - x_1) + f, \end{cases} \quad (266)$$

$$y = x_1.$$

Зададим символьные переменные:

```
syms k p
```

По уравнениям (266) зададим матрицы описания системы:

$$A = [0 \ 1; -1-k \ -2]$$

$$B = [0 \ 0; k \ 1]$$

$$C = [1 \ 0]$$

Вспомогательная единичная матрица:

$$E = [1 \ 0; 0 \ 1]$$

Передаточная матрица системы (в символьном виде):

$$W = C * (p * E - A)^{-1} * B$$

Подставим в нее  $k = 10$ :

$$W = \text{subs}(W, k, 10)$$

Выделим числители и знаменатели передаточной матрицы:

$$[n, d] = \text{numden}(W)$$

Переменные  $n$  и  $d$  – это массивы ячеек, содержащие символьные выражения числителей и знаменателей передаточной матрицы. Конструктор класса `tf` требует в качестве параметров массивы ячеек, содержащие векторы коэффициентов числителя и знаменателя (массивы чисел). С помощью специальной функции преобразования изменим формат данных:

$$n = \{\text{sym2poly}(n(1)), \text{sym2poly}(n(2))\}$$

$$d = \{\text{sym2poly}(d(1)), \text{sym2poly}(d(2))\}$$

Теперь переменные  $n$  и  $d$  могут служить параметрами конструктора `tf`:

$$W = \text{tf}(n, d)$$

Имея объект класса `tf`, можно использовать все возможности пакета `Control`. Согласно заданию построим переходные характеристики системы:

```
step(W)
```

### 7.3. Анализ и синтез линейных систем

#### 7.3.1. Анализ и синтез линейных систем с помощью программы *SisoTool*.

В состав пакета `Control Systems`, наряду с «низкоуровневыми» средствами представления и исследования линейных объектов и систем, описанными в 7.2.1, входит программа `SisoTool`, представляющая собой достаточно мощный инструмент анализа и синтеза одномерных линейных систем с типовыми структурами. Программа написана на языке `Matlab`, что демонстрирует не только «вычислительные» возможности языка, но и его возможности в плане построения полноценного пользовательского интерфейса. Запустить программу можно, введя в командном окне:

```
sisotool
```

Внешний вид главного окна программы показан на рис. 88.

Программа позволяет анализировать четыре типовые структуры линейных систем. Структура исследуемой системы показана в верхней правой части окна. Изменение структуры производится с помощью кнопки `FS` (см. рис. 88). Четыре блока, формирующие структуру системы, имеют следующее назначение: `G` – объект регулирования (в широком понимании этого термина); `H` – датчик обратной связи; `F` – предварительный фильтр; `C` – компенсатор (регулятор, корректирующее устройство и т.д.). Математическое описание этих блоков может быть представлено в виде SISO-объектов классов `ss`, `tf`, `zpk`. Объекты загружаются в программу из рабочей области (`Workspace`) `Matlab`, `MAT`-файла, или `Simulink`-диаграммы с помощью функции `Import` меню `File`. Особое место среди блоков занимают блоки `F` и `C`: после предварительной загрузки их математическое описание можно редактировать путем изменения, добавления и удаления полюсов и нулей передаточных функций, а также изменения коэффициентов. Это можно сделать с помощью меню `Compensators` или двойного щелчка мыши непосредственно на блоках. Кроме того, параметры компенсатора `C` выводятся в области `Current Compensator` главного окна программы. Для задания коэффициента компенсатора эта область имеет поле ввода. Нули и полюса компенсатора можно добавлять и удалять с помощью панели инструментов.

По умолчанию в главном окне программы `SisoTool` располагаются редактор размещения полюсов замкнутой системы и редактор частотных характеристик разомкнутой системы.

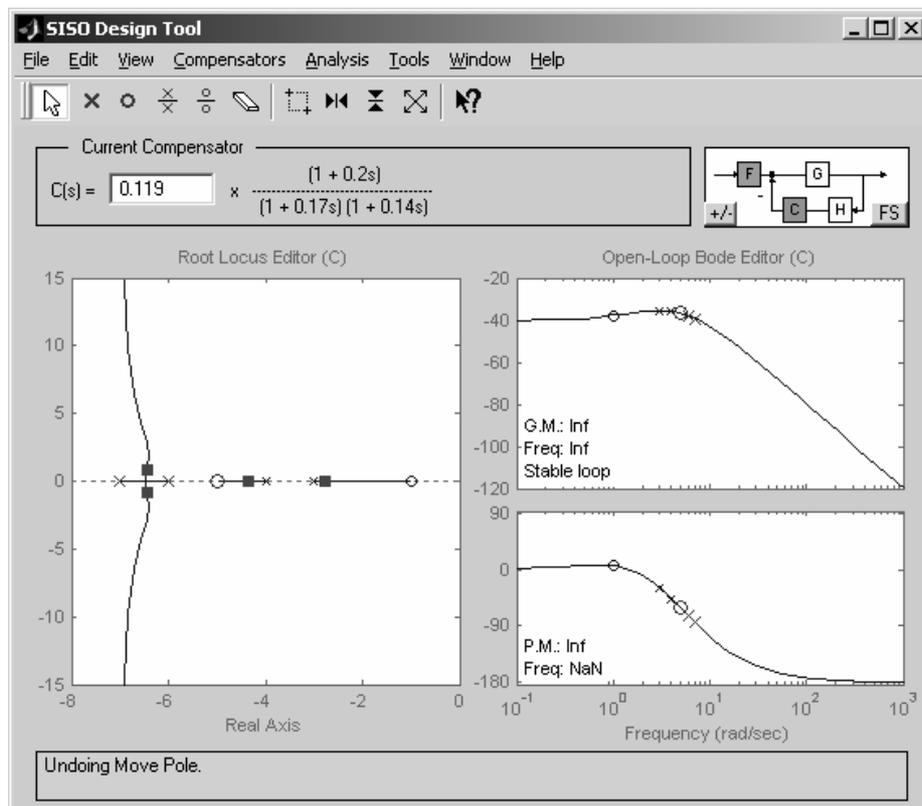


Рис. 88. Окно программы SisoTool

Редактор размещения полюсов представляет собой карту нулей и полюсов компенсатора (красные «кружочки» и «крестики») и полюсов замкнутой системы (красные «квадратики»). С помощью мыши можно изменять положение нулей и полюсов компенсатора, одновременно наблюдая изменение полюсов замкнутой системы. На карте также показаны траектории движения последних при изменении коэффициента компенсатора. Передвигая по ним полюса, можно наблюдать изменение текущего значения этого коэффициента.

Редактор частотных характеристик разомкнутой системы включает ее ЛАЧХ и ФЧХ, на которых «кружочками» и «крестиками» отмечены частоты, соответствующие нулям и полюсам. «Кружочки» и «крестики», относящиеся к компенсатору, выделены красным, их положение можно изменять с помощью мыши. Кроме отображения характеристик, редактор предоставляет информацию об устойчивости системы, выдавая значения запасов устойчивости по амплитуде и фазе.

Изменить содержание главного окна программы можно с помощью меню View.

Меню Analysis предоставляет широкие возможности по анализу САР путем построения различных временных и частотных ее характеристик в отдельных окнах. Следует отметить, что временные характеристики могут быть построены не только по каналу задание – выход, но и по другим каналам, связывающим входные воздействия с «промежуточными» величинами системы (см. пункт меню Other Loop Responses). При этом изменение параметров системы в главном окне ведет к автоматическому пересчету характеристик во всех открытых окнах. Таким образом, можно, например, изменяя нули и полю-

са системы или компенсатора, наблюдать за изменением переходной характеристики системы.

Меню Tools предлагает дополнительные инструменты, в частности для построения Simulink-модели системы.

Результаты работы в программе SisoTool в виде передаточных функций компенсатора, предварительного фильтра и системы в целом могут быть сохранены как в рабочей области Matlab (пункт Export меню File), так и в MAT-файле (пункт Save Session).

Более подробно ознакомится с программой можно по справочной системе или путем непосредственного экспериментирования.

### **7.3.2. Численное решение задач оптимизации в Matlab.**

#### ***Расчет регулятора на заданный частотный показатель колебательности.***

Система Matlab включает множество функций, реализующих численные методы решения самых разнообразных задач. В качестве примера рассмотрим возможность численного определения настроек типовых регуляторов на заданный частотный показатель колебательности.

Графическое решение этой задачи описано в 5.2.3. Напомним, что оно предполагает определение единственного параметра настройки, а именно коэффициента передачи регулятора. Другие параметры (в общем случае – постоянные времени изодрома и дифференцирования) задаются. Согласно методу АФЧХ разомкнутой системы, включающей в себя регулятор, должна касаться окружности с уравнением (209).

Аналитическое решение задачи затруднено тем, что неизвестна частота, на которой АФЧХ должна касаться этой окружности. В то же время решить задачу численными методами можно достаточно просто, а учитывая возможности современных компьютеров, – и достаточно быстро. При этом вообще не требуется никаких дополнительных построений и выводов, подобных приведенным в 5.2.3.

Идея численного решения многих задач состоит в применении методов оптимизации. Допустим, необходимо решить некоторое уравнение вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (267)$$

это, очевидно, означает, что необходимо найти такой набор (или такие наборы) значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые обеспечивают выполнение (267).

Соответствующая задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом: найти значения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – такие, что

$$(F(x_1, x_2, \dots, x_n))^2 \rightarrow \min. \quad (268)$$

Это так называемая *задача на безусловный экстремум*. Численное ее решение предполагает целенаправленный поиск экстремума (т.е. минимума функции  $(F(x_1, x_2, \dots, x_n))^2$ ) с помощью специальных алгоритмов, обеспечивающих пошаговое движение в пространстве координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Отметим важные особенности численного решения: 1) оно всегда является приближенным; 2) оно требует задания *начального приближения* – точки в пространстве координат  $x_1, x_2 \dots x_n$ , с которой начнется поиск. Эти особенности вытекают из существа самих методов численной оптимизации. Поэтому решение обычно проверяется прямой подстановкой найденных значений в функцию  $F(\dots)$ , а в случае, когда уравнение (267) может иметь несколько решений, организуется несколько процедур поиска с разными начальными приближениями.

Кроме задач на безусловный экстремум, существуют задачи на *условный экстремум*, в которых дополнительно накладываются ограничения на пространство поиска в виде предельных значений координат либо уравнений связи между ними.

Система Matlab содержит пакет прикладных программ Optimization, функции которого позволяют численно решать задачи как на безусловный, так и на условный экстремум. Причем благодаря тому, что сама система ориентирована на векторно-матричные вычисления, ограничений на размерность задачи (количество искомых переменных) практически нет. В нашем случае достаточно возможностей «простой» функции `fminbnd`, входящей в базовый пакет Matlab. Эта функция ищет минимум функции одной переменной на заданном диапазоне ее (переменной) значений. Для ознакомления с возможностями функции и ее интерфейсом введите в командном окне системы:

```
help fminbnd
```

В простейшем случае формат вызова функции следующий:

```
x = fminbnd(FUN, xmin, xmax)
```

Функция принимает три параметра: `FUN` – строка с именем файла-функции, вычисляющей значение минимизируемой функции при заданном значении аргумента; `xmin` и `xmax` – минимальное и максимальное значение переменной. Возвращается значение аргумента, при котором достигается минимум функции.

Более сложные варианты вызова `fminbnd` предусматривают задание точности вычислений, дополнительных параметров и др.

Решим следующую задачу: необходимо найти радиус окружности, при котором площадь, заключенная между этой окружностью и вписанным в нее квадратом, будет равной единице:

$$S_c(r) - S_s(r) = 1, \quad (269)$$

где  $r$  – радиус окружности;  $S_c$  – площадь окружности;  $S_s$  – площадь квадрата.

Эта задача, очевидно, имеет простое аналитическое решение. Однако решим ее численно. Задачу оптимизации в данном случае можно представить в виде:

$$F(r) = (S_c(r) - S_s(r) - 1)^2 \rightarrow \min. \quad (270)$$

Напишем функцию Matlab, вычисляющую минимизируемую функцию. Назовем эту функцию `minfun` (минимизируемая функция) и помести ее в файл `minfun.m`

```
function F = minfun(r)
% Площадь круга
Sc = pi*r*r;
% Площадь квадрата
Ss = 2*r*r;
% Возвращаемое значение
F = (Sc-Ss-1)^2;
```

Как видно, минимизируемая функция может представлять собой не просто некоторую формулу, но и совокупность вычислений. Среди них могут быть условные, циклические и любые другие операции Matlab, вызовы других функций и т. п.

Вызов функции `fminbnd`, которая собственно и будет искать минимум  $F(r)$ , используя функцию `minfun`, может быть сделан из командного окна или из какой-либо программы. Предполагая, что искомый радиус лежит в диапазоне от 0 до 4, определим его:

```
r = fminbnd('minfun', 0, 4)
r =
    0.9359
```

Проверим правильность вычислений:

```
Sc = pi*r*r;
Ss = 2*r*r;
Sc-Ss
ans =
    1.0000
```

Вернемся к нашей задаче. Нам необходимо определить такой коэффициент передачи регулятора, при котором максимум амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы был равен заданному значению  $\Lambda$ :

$$\max(A_{\text{зам}}(k_p)) = \Lambda. \quad (271)$$

Соответствующая задача оптимизации

$$(\max(A_{\text{зам}}(k_p)) - \Lambda)^2 \rightarrow \min. \quad (272)$$

Передающую функцию замкнутой системы при заданном значении  $k_p$  определить несложно. АЧХ системы можно найти с помощью функции `bode`, а ее максимум – с помощью встроенной функции `max`.

Напишите программу самостоятельно.

### 7.3.3. Операции над комплексными числами в Matlab. Реализация метода расчета регуляторов по РАФЧХ

В Matlab нет специального типа данных для представления комплексных чисел, – все числа по умолчанию считаются комплексными. Действительные числа рассматриваются как комплексные с нулевой мнимой частью.

При запуске программы автоматически инициализируются мнимыми единицами две переменные:  $i$  и  $j$ . В дальнейшем они могут использоваться в этом качестве, а могут быть и переопределены. Определение любой переменной значением мнимой единицы может быть выполнено следующим образом:

```
i = sqrt(-1)
```

С такой переменной можно задать любое комплексное число:

```
a = 2+i, b = 1+2*i, c =exp(4+2*i)
```

Альтернативный способ задания комплексных чисел не использует специальных переменных (и знаков умножения) и поэтому является более универсальным:

```
a = 2+1i, b = 1+2j, c =exp(4+2i)
```

В данном случае  $i$  и  $j$  – это не переменные, а просто символы.

Обратимся к задаче настройки типовых регуляторов на заданный корневой показатель колебательности. В 5.2.4. приведены формулы для расчета настроек ПИ-, ПД- и ПИД-регулятора (233, 234 и 237 соответственно). Единственная проблема, которая может возникнуть при их вычислении в Matlab, – определение расширенных характеристик объекта  $P_{об}(\omega, m)$  и  $Q_{об}(\omega, m)$ . В следующем примере показано, как их можно рассчитать.

Пусть имеется объект с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}.$$

Определим его расширенную АФЧХ для диапазона частот от  $\omega = 0,1$  до  $\omega = 10$  с шагом 0,1. Корневой показатель колебательности  $m$  примем равным 0,4.

```
w = .1:.1:10;  
m = .4;  
p = (1i-m)*w;  
% Расширенная АФЧХ  
W = 1./(p.^3 + 3*p.^2 + 3*p + 1);  
% Расширенная ВЧХ  
P = real(W)  
% Расширенная МЧХ  
Q = imag(W)
```

Обратите внимание на использование «точек» при вычислении расширенной АФЧХ, – они необходимы, так как над вектором  $p$  производятся не матричные, а поэлементные операции. Такие операции следует использовать и далее, при расчете настроек регулятора по формулам (233),(234),(237).

Результатом расчета будут векторы настроек для заданных расчетных частот. Из этих векторов нужно выбрать только те варианты настроек, для которых коэффициенты регулятора – положительные действительные числа (варианты, для которых это требование не выполняется, соответствуют случаям, когда для данной частоты не существует искомым настроек).

#### **7.3.4. Расчет корректирующего устройства методом динамической компенсации в Matlab**

Рассмотренный в 5.3. метод расчета корректирующих устройств по ЛАЧХ в основном ориентирован на «ручное» (графическое) применение. Автоматизировать его в чистом виде не имеет большого смысла, так как при этом пропадают все те моменты, связанные с искусством проектировщика, которые позволяют получить наиболее простое устройство коррекции. Поэтому здесь рассмотрим другой метод, по сути, очень близкий методу расчета по ЛАЧХ и в то же время позволяющий использовать вычислительную технику.

Идея метода динамической компенсации [4] очень проста. Пусть имеется объект с передаточной функцией  $W_{об}(p)$ . Под объектом, как и ранее, здесь понимается вся неизменяемая часть системы. Передаточная функция разомкнутой системы с корректирующим устройством:

$$W_{раз}(p) = W_{ку}(p)W_{об}(p), \quad (273)$$

где  $W_{ку}(p)$  – передаточная функция корректирующего устройства.

Потребуем, чтобы разомкнутая система описывалась некоторой известной *эталонной* передаточной функцией  $W_{раз,эт}(p)$ , обеспечивающей требуемое качество замкнутой системы. Эта передаточная функция может быть определена, например, по эталонной передаточной функции замкнутой системы [4] либо взята для разомкнутой системы с типовой ЛАЧХ (см. 5.3.).

Тогда

$$W_{ку}(p) = \frac{W_{раз,эт}(p)}{W_{об}(p)}. \quad (274)$$

Из (274) видно: для того, чтобы корректирующее устройство было физически реализуемым, относительный порядок  $W_{раз,эт}(p)$  должен быть не меньше относительного порядка  $W_{об}(p)$ . Только в таком случае порядок числителя  $W_{ку}(p)$  будет меньше или равен порядку знаменателя. Это накладывает определенные требования на выбор  $W_{раз,эт}(p)$ . Кроме того, очевидно, что порядок числителя  $W_{ку}(p)$  будет не меньше порядка знаменателя  $W_{об}(p)$ , а порядок знаменателя – не меньше порядка знаменателя  $W_{раз,эт}(p)$ . Это свидетельствует о том, что построенное по (274) корректирующее устройство является достаточно сложным.

Следует также отметить, что если объект является устойчивым, но не минимально-фазовым, реальная система с корректирующим устройством будет неустойчивой. Это связано с тем, что правые нули  $W_{об}(p)$  «попадут» в полюса  $W_{ку}(p)$ . Хотя теоретически в передаточной функции разомкнутой систе-

мы данные полюса будут «сокращаться» с нулями  $W_{об}(p)$ , на практике подобного сокращения в точности добиться невозможно, поскольку невозможно идеально точно реализовать передаточную функцию корректирующего устройства. Поэтому в дальнейшем ограничимся случаем, когда объект является минимально-фазовым.

Основными проблемами при построении корректирующего устройства, как показано выше, являются его сложность и физическая реализуемость. Во многих случаях существует возможность упростить  $W_{ку}(p)$  и сделать ее физически реализуемой без существенного ухудшения качества системы. Упрощенное корректирующее устройство будем называть *реальным*, а устройство с передаточной функцией, определенной по (274), – *идеальным*.

Пусть структура передаточной функции реального корректирующего устройства задана. Определить ее коэффициенты можно, например, путем аппроксимации частотной характеристики  $W_{ку}(j\omega)$  в области малых и средних частот оптимизационным методом (известно, что высокочастотная часть характеристики не оказывает существенного влияния на переходные процессы в системе). Соответствующая задача оптимизации формально описывается следующим образом:

$$\int_0^{\omega_{гр}} (W_{ку}(j\omega) - W_{ку,реал.}(j\omega))^2 d\omega \rightarrow \min, \quad (275)$$

где  $\omega_{гр}$  – некоторая граничная частота, задающая диапазон частот аппроксимации;  $W_{ку,реал.}(j\omega)$  – АФЧХ реального корректирующего устройства.

Однако так как важны не столько свойства корректирующего устройства, сколько свойства разомкнутой системы, лучше задачу сформулировать так:

$$\int_0^{\omega_{гр}} (W_{раз,эт}(j\omega) - W_{раз,реал.}(j\omega))^2 d\omega \rightarrow \min, \quad (276)$$

где  $W_{раз,реал.}(j\omega)$  – АФЧХ разомкнутой системы с реальным корректирующим устройством.

Решить задачу в Matlab можно с помощью функции `fminsearch`, осуществляющей минимизацию функции нескольких переменных симплекс-методом. Очевидно, что под этими переменными следует понимать параметры передаточной функции  $W_{ку,реал.}(p)$ . В простейшем случае формат вызова функции следующий:

```
X = fminsearch('F', X0)
```

где `F` – имя файла-функции, вычисляющей значение минимизируемой функции; `X` – вектор искомых параметров; `X0` – вектор их начальных приближений.

Так как частотные характеристики  $W_{раз,эт}(j\omega)$  и  $W_{раз,реал.}(j\omega)$  рассчитываются для фиксированных значений частот и являются комплексными, функция `F` должна вычислять не интеграл (276), а сумму:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \left[ \operatorname{Re}(W_{\text{раз,эт}}(j\omega_i)) - \operatorname{Re}(W_{\text{раз,реал.}}(j\omega_i)) \right]^2 + \left[ \operatorname{Im}(W_{\text{раз,эт}}(j\omega_i)) - \operatorname{Im}(W_{\text{раз,реал.}}(j\omega_i)) \right]^2 \right) \quad (277)$$

где  $n$  – индекс частоты  $\omega_{\text{гр}}$ .

Под  $X$  в нашем случае нужно понимать коэффициенты числителя и знаменателя  $W_{\text{ку,реал.}}(p)$ . Начальное приближение  $X_0$  для этих коэффициентов можно определить через нули и полюса идеального корректирующего устройства. При этом если числитель  $W_{\text{ку,реал.}}(p)$  имеет порядок  $m$ , а знаменатель – порядок  $n$ , в расчет нужно брать  $m$  наименьших по модулю нулей и  $n$  наименьших по модулю полюсов  $W_{\text{ку.}}(p)$ , так как именно они в большей степени определяют характеристику  $W_{\text{ку.}}(j\omega)$  в диапазоне низких и средних частот. По этим нулям и полюсам с учетом согласующего коэффициента и рассчитывается начальное приближение для  $W_{\text{ку,реал.}}(p)$ .

В заключение можно привести следующую рекомендацию к расчету  $W_{\text{ку,реал.}}(p)$ . Начинать расчет нужно с максимально простого устройства коррекции, имеющего первый или второй порядок и нулевой или первый относительный порядок. Если рассчитанное устройство не в состоянии обеспечить требуемое качество регулирования, следует повторить расчет уже для более сложной структуры. В любом случае последовательное усложнение устройства приведет к цели, так как качество системы с идеальным корректирующим устройством «гарантировано».

## 7.4. Система имитационного моделирования Simulink

### 7.4.1. Общая характеристика

Система Simulink – программный продукт семейства Matlab, предназначенный для моделирования динамических систем. Она работает в тесном взаимодействии со средой Matlab, обмениваясь с ней данными. Создание модели системы в Simulink происходит в наиболее простой и естественной форме – путем сборки модели из блоков, представляющих динамические звенья, статические характеристики и другие алгоритмы преобразования сигналов (в том числе и нелинейные). Расчет моделей производится с помощью методов численного интегрирования.

При работе с системой Simulink необходимо открыть пустое окно для набора модели системы и окно библиотеки блоков Simulink. Библиотека состоит из наборов блоков (blocksets). Базовый набор, который называется Simulink, содержит несколько разделов. Основные из них:

- Continues – блоки непрерывной обработки сигналов;
- Discontinuities – блоки «разрывных» функций;
- Discrete – блоки дискретной обработки;
- Look-Up Tables – блоки с табличным заданием характеристик;
- Math Operations – блоки математических операций;
- Ports & Subsystems – блоки-подсистемы;

Signal Routing – вспомогательные блоки, поддерживающие группировку, разгруппировку сигналов и другие подобные операции;

Sinks – блоки-приемники сигналов;

Sources – блоки-источники сигналов;

User-Defined Functions – блоки, представляющие пользовательские функции.

Пакеты прикладных программ Matlab добавляют свои наборы блоков.

Модель системы набирается перетаскиванием мышью блоков из разделов библиотеки в окно набора модели и внутри его с последующим соединением блоков стрелками, показывающими распространение сигналов от блока к блоку. Копирование блоков в пределах окна модели осуществляется также перетаскиванием с помощью правой кнопки мыши.

Модель обязательно должна содержать хотя бы один блок-источник сигналов из раздела Sources, – например, блок Step (ступенчатое изменение входного сигнала). Для «измерения» и запоминания контролируемых переменных (сигналов) модели применяются блоки-«приемники сигналов» раздела Sinks, чаще всего блок Scope (вывод временного графика изменения сигнала).

После помещения необходимых блоков в окно набора модели необходимо задать их параметры: значения коэффициентов, временные задержки и т.д. Доступ к параметрам возможен по двойному щелчку левой кнопкой мыши на интересующем блоке. При щелчке правой кнопкой мыши появляется меню, позволяющее работать с буфером обмена Windows, а также настроить внешний вид блока (например, изменить его ориентацию в окне модели).

Линии связи (стрелки), соединяющие блоки модели, могут показывать направление передачи как одного (скалярного), так и нескольких сигналов (вектора). В последнем случае блоки, как правило, обрабатывают одинаковым образом все компоненты вектора. Некоторые блоки, однако, предназначены специально для обработки векторов, – например, операции матричного умножения или свертки векторов. Просмотреть «ширину» линии можно пометив пункт Signal dimensions меню Format. Выделить векторные линии жирным можно пометив пункт Wide nonscalar lines.

После набора модели можно запустить процедуру расчета, предварительно задав ее параметры (при необходимости). Под параметрами в данном случае понимаются название функции-решателя, начальное и конечное время интегрирования, а также параметры обмена данными между системой Simulink и средой Matlab.

В Simulink используются два типа функций-решателей (методов численного интегрирования): с постоянным и с переменным шагом. При выборе первого типа пользователь может задать величину шага, которая и будет определять точность расчета. Для методов с переменным шагом можно задать максимальное и минимальное значения шага, а также абсолютную и относительную точность вычислений. Методы с переменным шагом условно разделяются на методы решения «нежестких» и «жестких» задач. В названии последних присутствует буква “s”.

Все методы, доступные в Simulink, отличаются друг от друга точностью и скоростью вычислений. В качестве практической рекомендации по их выбору можно привести следующее. Если модель не содержит разрывных функций (нежесткая задача) следует пользоваться методами ode45 или ode23 (методы Рунге-Кутты 4-5-х и 2-3-х порядков соответственно), в противном случае (жесткая задача) следует пользоваться методами ode15s и ode23s, разработанными специально для жестких систем. И, наконец, если в модели возможны переключения с теоретически бесконечной скоростью (скользящие режимы), единственным решением будет применение методов с постоянным шагом, так как другие останавливают вычисления, бесконечно уменьшая шаг.

Подробнее о методах см. справочную систему Matlab.

Запуск, приостановка расчета и досрочная остановка вычислений осуществляются с помощью кнопок панели инструментов окна модели. Просмотреть графики изменения переменных в окнах блоков Scope можно как по окончании процедуры вычисления, так и во время ее выполнения.

Модели Simulink хранятся в текстовых файлах специального формата с расширением mdl. Запуск системы и открытие окна модели производится путем ввода имени модели в командной строке Matlab.

В качестве упражнения постройте модель системы, приведенной на рис. 87, и осуществите расчет ее реакции на ступенчатое изменение сначала задающего, а потом и возмущающего воздействий. Обратите внимание, что для этого необходимо настроить параметры блоков Step.

Окно модели показано на рис. 89.

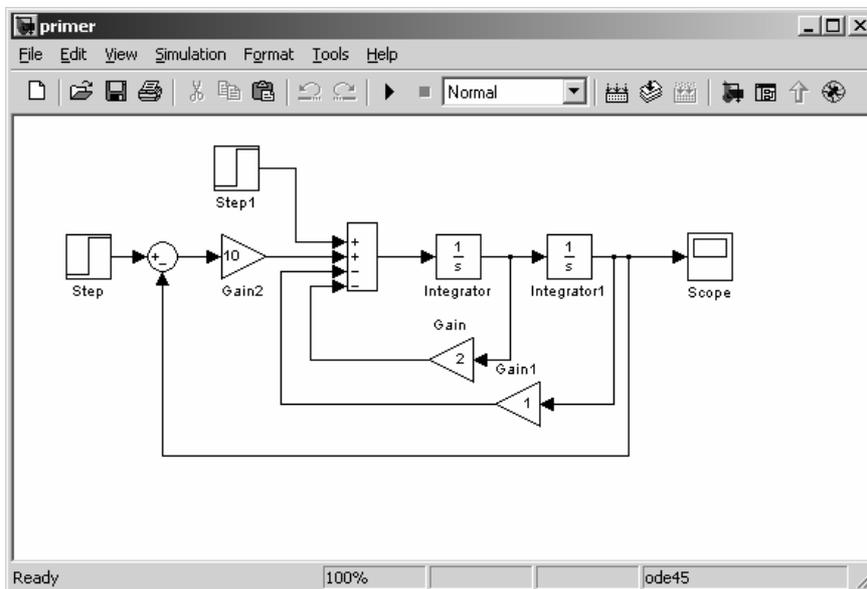


Рис. 89. Окно модели системы в Simulink.

Расчет производился при следующих параметрах:

Step: Step time = 0, Initial Value = 0, Final value = 1;

Step1: Step time = 10, Initial Value = 0, Final value = 1;

Simulation parameters: Start time = 0, Stop time = 20, Solver Type – ode45, Relative tolerance = 1e-6.

Результаты расчета приведены на рис. 90.

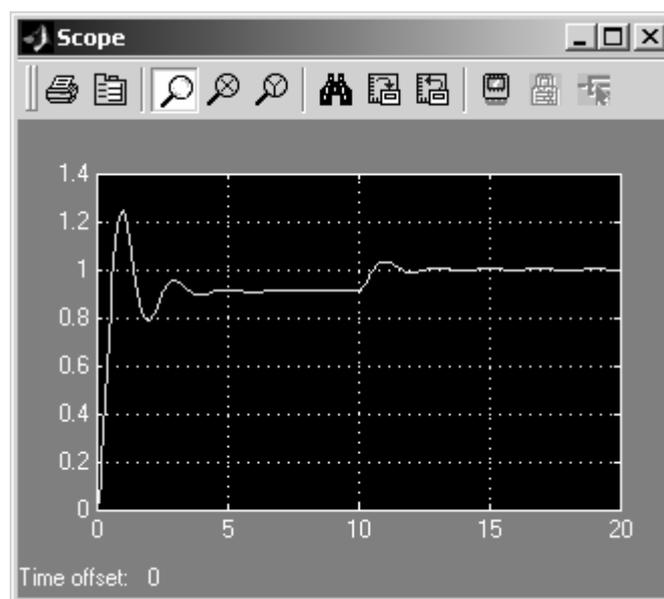


Рис. 90. Результаты моделирования в окне блока Scope.

#### 7.4.2. Блок-схема *Nonlinear Control Design (NCD)*

Блок-схема Nonlinear Control Design («нелинейное проектирование управления») входит в набор блоков NCD Blockset и используется в среде Simulink для расчета параметров регулирующих устройств с помощью численных методов оптимизации.

Блок NCD-Output непосредственно подключается к модели системы, набранной в Simulink, к линии выхода (контролируемой координаты). Модель должна содержать блоки, параметры которых подлежат определению в результате процедуры оптимизации – блоки моделей регуляторов, корректирующих устройств и т.п. Такие параметры задаются в модели не численными значениями, а именами и заранее инициализируются в среде Matlab из командной строки или путем выполнения соответствующего файла.

Кроме того, модель может содержать блоки с параметрами, точное значение которых неизвестно, но известен диапазон их изменения (как правило, блоки, моделирующие объект управления). Эти параметры также задаются в модели своими именами, но не инициализируются, а описываются в блоке NCD-Output.

В ходе выполнения процедуры оптимизации программа NCD оценивает качество функционирования системы непосредственно по виду переходного процесса, т.е. по степени близости реального процесса желаемому, вид которого задается пользователем.

На вход(ы) Simulink-модели системы путем подключения соответствующих блоков подается заданное воздействие, – например, ступенчатое. На выходе, в блоке NCD, пользователь формирует границы переходного процесса (или процессов) по времени и значению контролируемой переменной. Грани-

цы могут быть двух видов: «непересекаемые» (limiting constraints), за которые кривая процесса выходить не должна, и «пересекаемые» (overachieving constraints). При пересечении последних на оценку качества процесса накладывается штраф, пропорциональный удалению от границы и весовому коэффициенту, заданному пользователем для данной границы.

Цель оптимизации состоит в определении таких значений параметров регулирующих устройств, при которых: 1) кривая переходного процесса не выходит за «непересекаемые» границы; 2) за пересечения «пересекаемых» границ наложен минимальный штраф (в идеале равный нулю).

При первом запуске программы по умолчанию формируются границы, соответствующие некоторой желаемой реакции системы на единичное ступенчатое воздействие в момент времени  $t=0$  с 20-процентным перерегулированием. Изменить положение границ можно перемещая их мышью при нажатой левой кнопке. Задать точные координаты границы, ее тип (limiting/overachieving) и весовой коэффициент для штрафа при пересечении можно щелкнув по границе правой кнопкой мыши. Для разделения границы на две самостоятельные части нужно выделить ее мышью и нажать кнопку «Split».

Существует также возможность автоматического формирования стандартной системы границ реакции на входное ступенчатое воздействие. Показатели качества процесса при этом задаются с использованием пункта Step response... меню Options.

Параметры системы, подлежащие определению, обязательно должны быть описаны до запуска процедуры оптимизации (пункт Parameters меню Optimization). Здесь задаются: имена переменных, верхние и нижние пределы их изменения (в случае ограничений), ряд параметров, определяющих точность вычислений и некоторые характеристики процесса оптимизации.

Параметры системы, изменяющиеся в заданных пределах («дрейфующие»), описываются в пункте Uncertainty меню Optimization. Здесь задаются: имена переменных, верхние и нижние пределы их изменения (обязательно), а также то, какие именно значения этих переменных будут использоваться в процедуре оптимизации (номинальные, максимальные, минимальные, случайные в заданном диапазоне).

Запуск процедуры оптимизации возможен лишь после инициализации системы, включающей инициализацию переменных и загрузку структуры границ.

Процесс оптимизации описывается в рабочей области памяти Matlab структурой NcdStruct, содержащей информацию о границах, переменных системы и параметрах оптимизации, и вспомогательными переменными OPT\_STEP, OPT\_STOP.

Кроме того, в рабочей области должны присутствовать переменные, подлежащие определению, с их начальными значениями.

Инициализацию системы можно провести в командной строке Matlab или путем загрузки соответствующего mat-файла, используя пункт Load меню File. Последний способ предпочтителен, так как позволяет использовать результаты предыдущей работы.

Запуск процедуры оптимизации осуществляется с помощью кнопки Start. После запуска в окне команд Matlab выводится соответствующая информация. Если установлена опция «Display optimization information» в пункте Parameters меню Optimization, выводится также информация о каждом шаге вычислений.

Процедура заканчивается успешно, если достигнут минимум штрафа и кривая переходного процесса не вышла за «непересекаемые» границы. Если достичь этого не удастся, также выводится соответствующее сообщение. «Досрочная» остановка процедуры – с помощью кнопки Stop.

Текущие значения определяемых переменных можно получить в командном окне. Сохранить полученные значения, а также параметры системы можно используя Save меню File. При выходе из программы это сделать будет предложено автоматически.

Кроме описанного, программа NCD предлагает ряд сервисных услуг: управление осями (пункты Time range и Y-axis меню Options), вывод начального (до оптимизации параметров) отклика системы (пункт Initial response меню Options), печать графика и др.

В случае, если проектируется система с несколькими выходами, система границ задается по каждой выходной координате, переключение между которыми осуществляется с помощью поля ввода Port.

В качестве примера определим параметры ПИ-регулятора для системы с объектом управления, описываемым передаточной функцией третьего порядка (рис. 91). Кроме управляющего воздействия, объект подвергается возмущению, противодействующему управлению. Поэтому Simulink-модель системы содержит два блока входных сигналов.

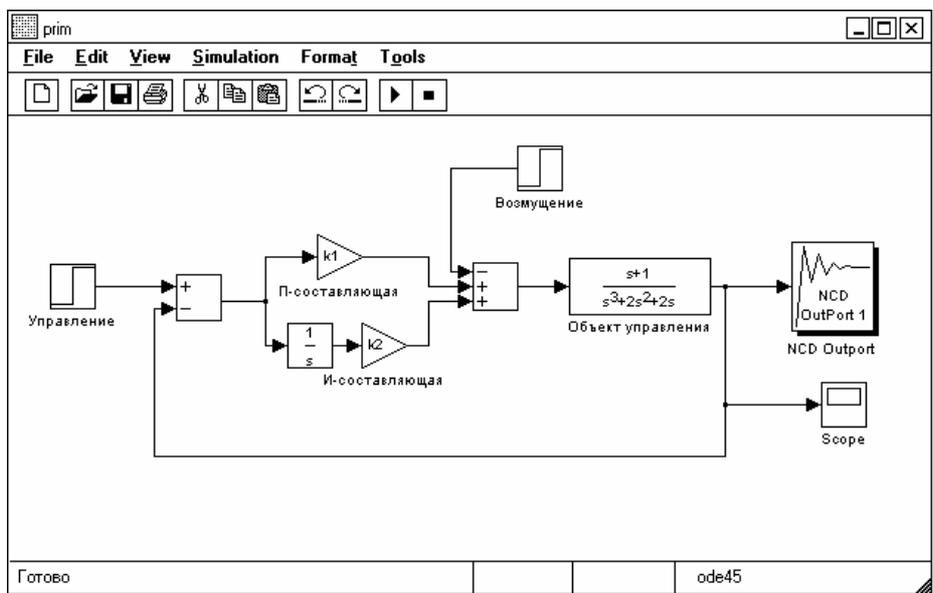


Рис.91. Модель системы.

Предположим, что характер воздействий на систему достаточно полно учитывается в модели при следующих параметрах входных сигналов: единичное управление скачкообразно подается в момент времени  $t=0$ ; возмущение,

максимальное по модулю и равное единице, подается в момент времени  $t=10$ . При этом считается, что к моменту подачи возмущения переходный процесс по управлению должен завершиться.

При описанных входных воздействиях требования к системе сформируем следующим образом: быстродействие системы при обработке управляющего сигнала и возмущения не больше 4 сек. («трубка допуска»  $\pm 5\%$ ), перерегулирование по управлению – не больше 40 %, максимальное отклонение при нанесении возмущения – не более 50%.

Изменяя коэффициенты регулятора с достаточно крупным шагом (например, равным 1), исследуем переходные процессы в системе, наблюдая их с помощью блока Scope. По результатам исследований определим первое (наилучшее) приближение для параметров регулятора:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ .

В блоке NCD строим систему границ процесса (рис. 90). Все границы имеют тип limiting. В поле ввода Tunable Variables пункта Parameters меню Optimization введем имена переменных, подлежащих определению ( $k_1$ ,  $k_2$ ).

С помощью кнопки Start запустим процесс оптимизации. За его ходом будем наблюдать по изменению графика процесса в окне NCD и по информации в окне команд Matlab.

По окончании процесса, введя в окне команд имена переменных, получим их окончательные значения:  $k_1 = 1.79$ ,  $k_2 = 0.93$ .

На рис. 92 показаны графики переходных процессов для первого приближения и окончательного варианта значений параметров регулятора.

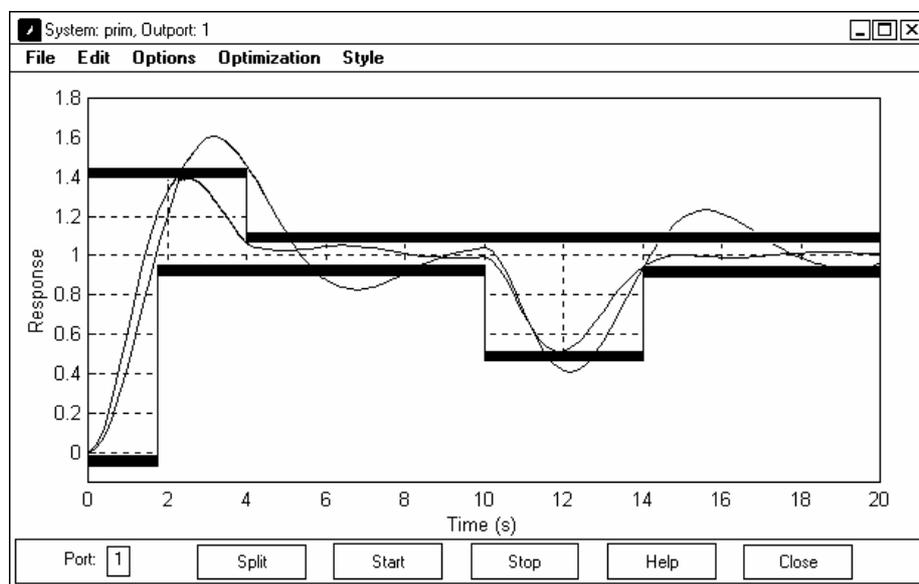


Рис. 92. Результаты оптимизации.

Приведенный пример, конечно, не претендует на какую-либо практическую значимость или полноту освещения возможностей программы NCD, но показывает этапы подготовки модели и основные принципы работы с программой. Для более глубокого изучения рекомендуется использовать набор демонстрационных примеров.

В заключение приведем несколько рекомендаций по использованию программы.

1. Перед применением программы следует определить, насколько это возможно, лучшее первое приближение для параметров, подлежащих определению. Иначе может возникнуть ситуация, когда в ходе процедуры оптимизации будут определены параметры, соответствующие некоторому локальному минимуму оптимизируемой функции, не удовлетворяющие предъявляемым требованиям.

С целью получить наилучшее первое приближение рекомендуется исследовать систему известными аналитическими или другими методами, предварительно упростив ее. Другой вариант – подбор неизвестных значений при моделировании непосредственно в Simulink.

2. При заметном замедлении скорости вычислений рекомендуется остановить процесс и, если достигнутые результаты не удовлетворительны, повторить его с новым начальным приближением.

### 7.4.3. Моделирование ограничений и релейных характеристик

Ограничения и релейные характеристики в Simulink-моделях можно представить с помощью блоков раздела Discontinuities базового набора.

Ограничение сигнала задается блоком Saturation. Его параметрами

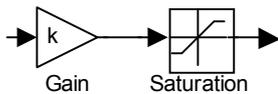


Рис. 93. Модель ограничения.

являются верхний и нижний пределы выходного сигнала. На линейной части характеристики блок имеет единичный коэффициент передачи. Если требуется другой коэффициент, следует предварительно усилить сигнал с помощью блока Gain из раздела Math Operations (см. рис. 93).

В ряде случаев требуется более сложные схемы ограничения. Часто, например, ограничение выходного сигнала какого-либо устройства физически связано с ограничением его внутренних сигналов. Рассмотрим Simulink-модель ПИД-регулятора, предлагаемую автором (рис. 94).

В ряде случаев требуется более сложные схемы ограничения. Часто, например, ограничение выходного сигнала какого-либо устройства физически связано с ограничением его внутренних сигналов. Рассмотрим Simulink-модель ПИД-регулятора, предлагаемую автором (рис. 94).

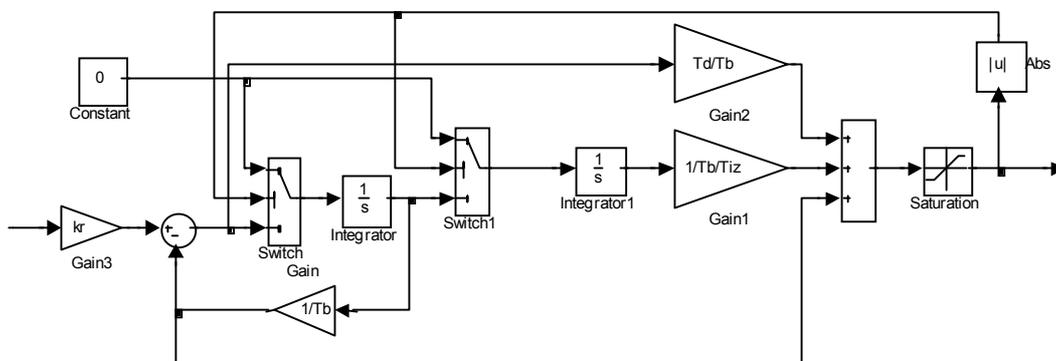


Рис. 94. Модель ПИД-регулятора.

Модель построена по уравнениям в пространстве состояний физически реализуемого ПИД-регулятора с учетом ограничения выходного сигнала. На линейном участке характеристики его передаточная функция

$$W_p(p) = k_p \frac{T_d T_{из} p^2 + T_{из} p + 1}{T_{из} p (T_б p + 1)}, \quad (228)$$

где  $T_б$  – постоянная времени «балластного» аperiodического звена, введенного в структуру регулятора для его физической реализуемости. Чем меньше эта постоянная, тем ближе характеристики регулятора к характеристикам идеального ПИД-регулятора с передаточной функцией (195).

Ограничение выходного сигнала производится с помощью блока Saturation на выходе регулятора. Кроме того, при достижении выходным сигналом предельных уровней производится «замораживание» переменных состояния регулятора путем обнуления сигналов на входах интеграторов. Эту задачу выполняют переключатели Switch и Switch1 (раздел Signal Routing), которые подключают к входам интеграторов постоянный нулевой сигнал, если модуль выходного сигнала достигает уровня ограничения. «Замораживание» состояния регулятора позволяет ему «безударно» включиться в работу после выхода из зоны ограничения.

Моделирование «отсечек» производится с помощью блока Dead Zone.

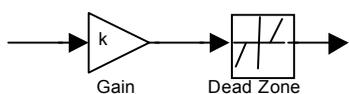


Рис. 95. Моделирование «отсечки».

На линейных частях характеристики блок имеет единичный коэффициент передачи. Если требуется другой коэффициент, следует предварительно усилить сигнал с помощью блока Gain (рис. 95).

Двухпозиционные реле представляются блоком Relay. Параметры блока задают «точки» (значения входного сигнала) включения и выключения реле и уровни выходного сигнала во «включенном» и «выключенном» состояниях. В окне настройки блока Relay, приведенном на рис. 97, показаны значения настроек, соответствующих статической характеристике реального двухпозиционного реле, показанной на рис. 75. Очевидно, что для моделирования идеального двухпозиционного реле параметры Switch on point и Switch off point нужно задать нулевыми.

Трехпозиционные реле можно представить в виде параллельного соединения двух блоков Relay (рис. 96). Для моделирования статической характеристики реального трехпозиционного реле, показанной на рис. 77, настройки блоков Relay и Relay1 должны быть такими, как показано на рис. 98. Если необходимо исключить зону неоднозначности, следует ввести  $b=c$ .

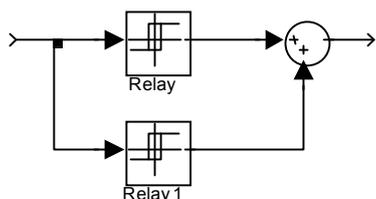


Рис. 96. Модель трехпозиционного реле.

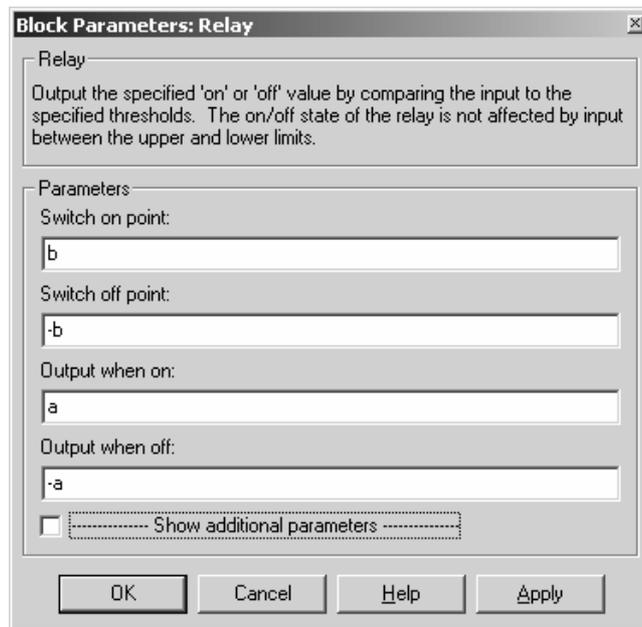


Рис. 97. Настройки блока Relay для моделирования двухпозиционного реле.

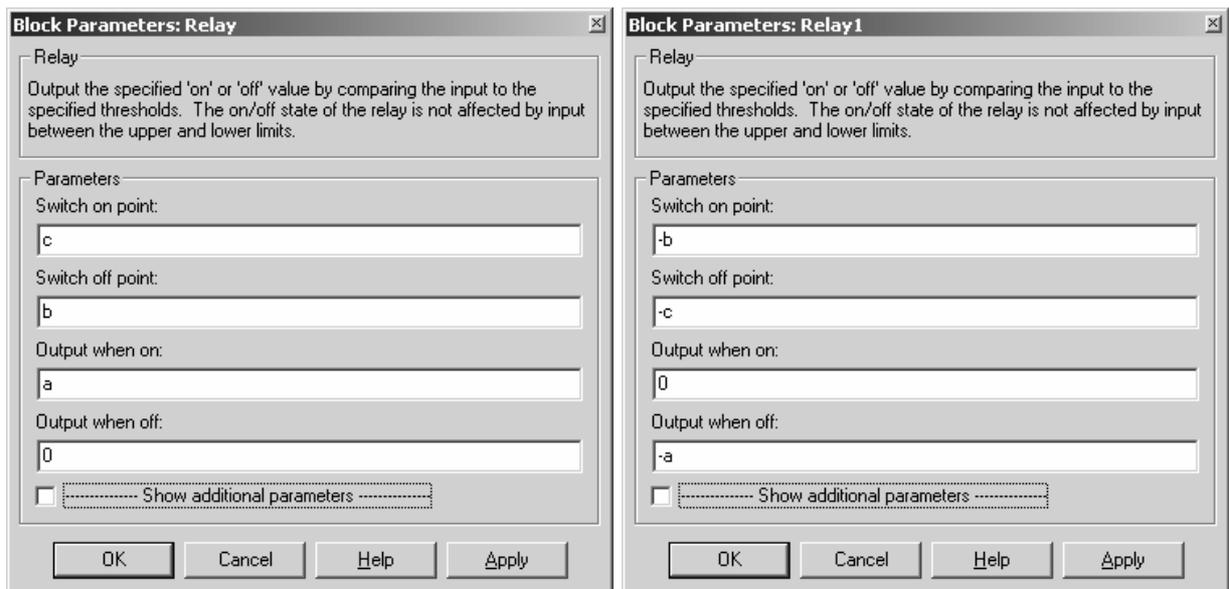


Рис. 98. Параметры блоков модели трехпозиционного реле.

В заключение отметим, что для расчета моделей релейных систем необходимо пользоваться процедурами численного интегрирования, предназначенными для «жестких» задач или (что лучше) с постоянным шагом.

### *Библиографический список*

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. 4-е изд. Ростов н/Д: изд-во Феникс, 1998. 512 с.
2. *Иващенко Н.И.* Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. Учебник для вузов. Изд. 4-е, перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1978. 736 с.
3. *Магергут В.З., Вент Д.П., Кацер И.А.* Инженерные методы выбора и расчета оптимальных настроек промышленных регуляторов. Новомосковск.: НФ РХТУ им. Д.И. Менделеева, 1994. 158 с.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т.: Учебник. Рек. Минобразования РФ/ Ред. Н.Д. Егупов. М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та, 2000.
5. *Потемкин В.Г.* Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: В 2 т. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999, 366 с.
6. Справочник по электрическим машинам: В 2 т./ Под общ. ред. И.П. Копылова и Б.К. Клокова. Т.1. М.: Энергоатомиздат, 1988. 456 с.: ил.
7. *Юревич Е.И.* Теория автоматического управления. Л.: Энергия, 1969. 375 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
<b>1. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ</b>	<b>4</b>
1.1. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ	4
1.2. ЗАДАНИЕ	7
1.2.1. Математическое описание линейной системы и ее анализ	7
1.2.2. Синтез линейной системы	8
1.2.3. Анализ нелинейной САР	9
<b>2. УПРАВЛЕНИЕ И РЕГУЛИРОВАНИЕ</b>	<b>11</b>
2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	11
2.2. СТРУКТУРА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ	14
<b>3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ</b>	<b>17</b>
3.1. УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ	17
3.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ	19
3.3. ПЕРЕХОДНАЯ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ	24
3.4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ САР	30
3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ САР	43
3.5.1. Передаточная матрица системы	43
3.5.2. Структурные преобразования модели САР	45
<b>4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ САР</b>	<b>49</b>
4.1. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА САР В СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ	49
4.1.1. Определение стационарных режимов	49
4.1.2. Качество САР в статических режимах	49
4.1.3. Качество САР в стационарных динамических режимах	52
4.2. УСТОЙЧИВОСТЬ САР И ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	54
4.2.1. Понятие устойчивости.	
Условие устойчивости линейных САР.	54
4.2.2. Критерии устойчивости линейных САР	57
4.2.3. Показатели качества переходных процессов	65
4.2.4. Влияние коэффициента усиления разомкнутой системы на устойчивость и качество переходных процессов	71
<b>5. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОЙ САР</b>	<b>75</b>
5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ	75
5.2. РАСЧЕТ ПРОМЫШЛЕННОГО РЕГУЛЯТОРА	76
5.2.1. Типовые законы регулирования	76
5.2.2. Определение требований к оптимальным настройкам регулятора по критерию максимального подавления низкочастотных возмущений	78

5.2.3. Расчет регулятора на заданное значение частотного показателя колебательности	80
5.2.4. Расчет параметров настройки регуляторов на заданный корневой показатель колебательности	87
5.3. РАСЧЕТ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ С ПОМОЩЬЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	91
<b>6. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ</b>	<b>98</b>
6.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ САР	98
6.2. ОГРАНИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ В САР	99
6.3. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ	103
6.4. АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ	111
<b>7. НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМЫ МАТЛАВ ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ</b>	<b>116</b>
7.1. ОБЗОР СИСТЕМЫ	116
7.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	117
7.2.1. Пакет <i>Control</i> для исследования линейных объектов и систем	117
7.2.2. Символьные вычисления в <i>Matlab</i> . Получение математического описания САР с неизвестными коэффициентами	122
7.3. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	124
7.3.1. Анализ и синтез линейных систем с помощью программы <i>SisoTool</i> .	124
7.3.2. Численное решение задач оптимизации в <i>Matlab</i> . Расчет регулятора на заданный частотный показатель колебательности.	126
7.3.3. Операции над комплексными числами в <i>Matlab</i> . Реализация метода расчета регуляторов по РАФЧХ	129
7.3.4. Расчет корректирующего устройства методом динамической компенсации в <i>Matlab</i>	130
7.4. СИСТЕМА ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ SIMULINK	132
7.4.1. Общая характеристика	132
7.4.2. Блок-схема <i>Nonlinear Control Design (NCD)</i>	135
7.4.3. Моделирование ограничений и релейных характеристик	139
<b>Библиографический список</b>	<b>142</b>
<b>СОДЕРЖАНИЕ</b>	<b>143</b>

**Андрей Николаевич Рыбалев,**  
доцент кафедры АПП и Э АмГУ  
канд. техн. наук

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. ПОСОБИЕ К КУРСОВО-  
МУ ПРОЕКТУ**  
*Учебное пособие*

---

Изд-во АмГУ. Подписано к печати ???.2002. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 8,37, уч. - изд. л. 8,5. Ти-  
раж 150. Заказ 264.