

Министерство образования и науки Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.И. Усенко, В.Л. Русинов

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

**ЧАСТЬ 3. СИНТЕЗ НЕПРЕРЫВНЫХ
ЛИНЕЙНЫХ САР**

Учебное пособие

Благовещенск

2016

ББК 32.965я73
У 93

*Рекомендовано
учебно-методическим советом университета*

Рецензенты:

*Казакул А.А., ведущий инженер по расчетам и режимам АО «ДРСК»,
канд. техн. наук;*

*Козлов А.Н., доцент кафедры энергетики АмГУ,
канд. техн. наук*

Усенко В.И, Русинов В.Л.

У 93 Теория автоматического управления. Часть 3. Синтез непрерывных линейных САР. Учебное пособие к выполнению практических и самостоятельных работ. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2016.

Пособие предназначено для студентов 3-го курса направления подготовки «Автоматизация технологических процессов и производств» и полностью соответствует рабочей программе дисциплины «Теория автоматического управления».

ББК 32.965я73

В авторской редакции.

© Амурский государственный университет, 2016
© Усенко В.И, Русинов В.Л, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Практика 1. Быстрый синтез систем управления методом логарифмических частотных характеристик.....	5
1.1. Проектирование систем управления в частотной области	5
1.2. Методика синтеза корректирующего устройства по ЛАЧХ	7
1.3. Домашнее задание.....	24
2. Практика 2. Синтез системы управления методом стандартных передаточных функций	26
2.1. Теоретические сведения	26
2.2. Задание	38
3. Практика 3. Расчет регулирующего устройства в виде обратных связей по переменным состояниям объекта (синтез путем размещения полюсов)	40
3.1. Управляемость.....	40
3.2. Синтез путем размещения полюсов	42
3.3. Задание	56
3.4. Пример выполнения задания	56
4. Практика 4. Синтез наблюдателя состояния	61
4.1. Наблюдаемость.....	61
4.2. Синтез наблюдателя.....	63
4.3. Задание	72
5. Практика 5. Расчет системы с помощью принципа динамической компенсации и уравнений синтеза	73
5.1. Задание	78
6. Практика 6. ПИД-регуляторы и модифицированные ПИД-регуляторы...	79
6.1. Классификация промышленных регуляторов.....	79
6.2. Синтез пид регулятора в matlab.....	95
6.3. Интерактивный графический инструмент для проектирования ПИД регулятора	99
Список литературы	103

ВВЕДЕНИЕ

Третья часть пособия посвящена синтезу линейных стационарных систем. При синтезе системы управления используется возможность влиять на вид переходной характеристики и поведения системы в установившемся режиме. Исходными данными для синтеза систем управления обычно являются некоторые показатели реакции системы на входной сигнал определённого вида, а также желаемая точность в установившемся режиме. Часто в процессе синтеза эти данные пересматриваются ради достижения некоторого компромисса между показателями.

Первое занятие посвящено синтезу систем управления методом диаграмм Бode. Рассчитывается и подбирается корректирующее устройство, обеспечивающее желаемую ЛАЧХ.

На втором занятии рассматривается синтез методом ПФ со стандартными характеристическими полиномами замкнутой системы.

В третьем и четвертом занятиях изучается модальное управление, т.е. синтез путем размещения полюсов, и синтез наблюдателя состояния при наличии переменных состояния, не подлежащих измерению.

В пятом занятии рассматривается применение принципа динамической компенсации при проектировании регуляторов на основе заданной эталонной ПФ замкнутой системы; последняя выбирается из условия обеспечения необходимого качества работы САУ в переходном и установившемся режимах.

В шестом рассматривается регулятор с отставанием и опережением по фазе представленный в виде ПИД-регулятора, наиболее часто применяемого в замкнутых системах управления. Синтез проводится с использованием возможностей программы MATLAB.

Материалы для всех занятий включают задания для самостоятельной работы по темам занятий.

1. ПРАКТИКА 1. БЫСТРЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

1.1. Проектирование систем управления в частотной области

Имеются, по существу, два подхода к проектированию систем управления в частотной области. Первый состоит в построении полярных диаграмм (годографов Найквиста), второй – в построении логарифмических частотных характеристик (диаграмм Боде). Введение пропорционального регулятора в разомкнутый контур приводит к изменению формы полярной диаграммы, и мы должны строить новый годограф, а это требует дополнительных затрат, рис.1.1. С другой стороны, диаграмма Боде пропорционального регулятора может быть просто просуммирована с первоначальной диаграммой, что упрощает построения. Если коэффициент усиления разомкнутого контура меняется, то ЛАЧХ смещается вверх или вниз без изменения формы кривой, а ЛФЧХ вообще остается неизменной, рис.1.2. Подтвердим сказанное примером:

```
W1=tf(2,[1 2 4])  
W2=tf(5,[1 2 4])  
nyquist(W1,W2)  
bode(W1,W2)
```

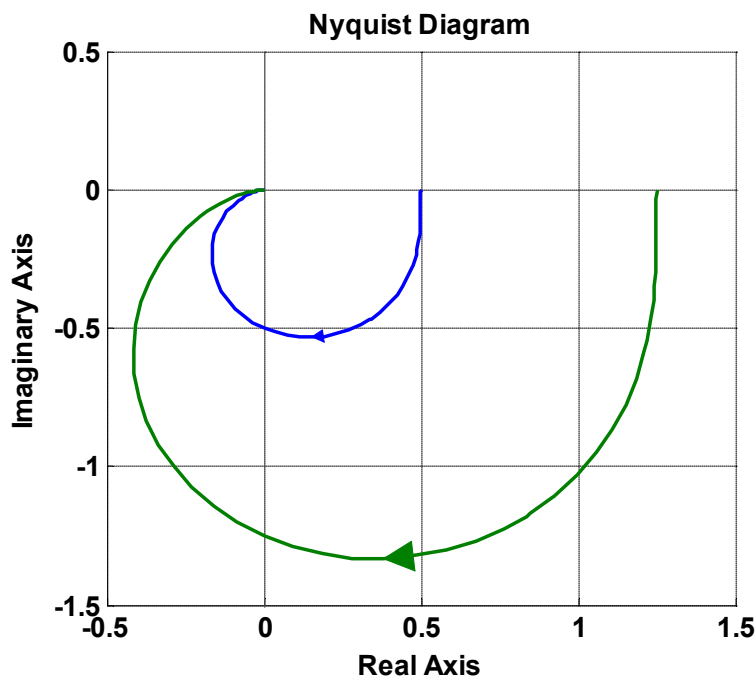


Рис. 1.1. Диаграммы Найквиста двух одинаковых систем с разными коэффициентами усиления

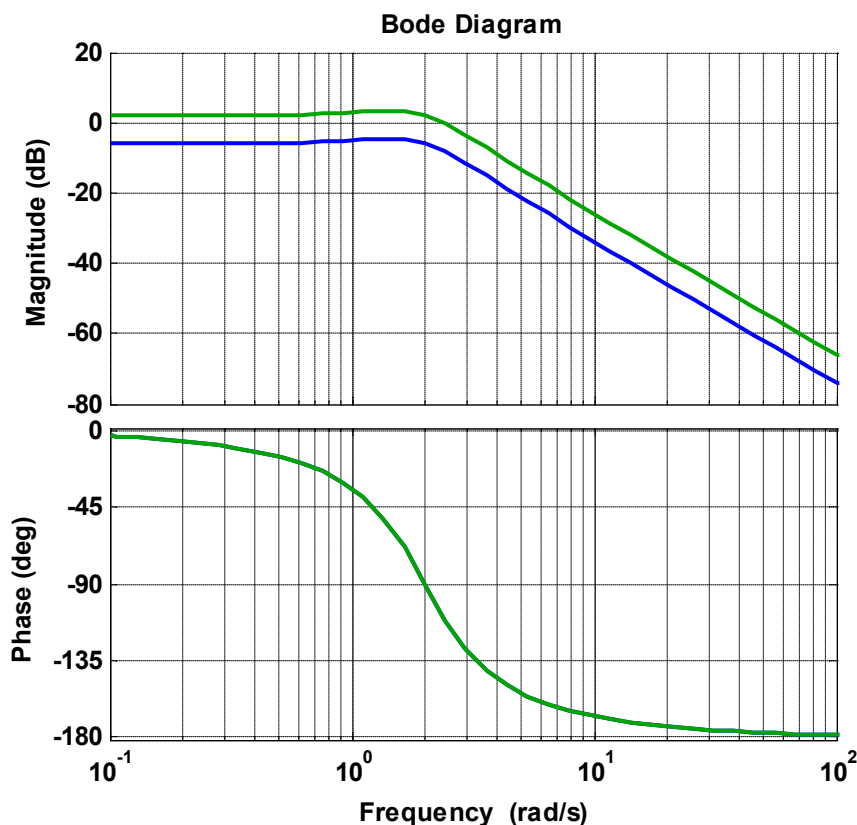


Рис. 1.2. Диаграммы Бode двух одинаковых систем с разными коэффициентами усиления

Таким образом, *при проектировании систем лучше работать с диаграммами Бode*. При этом общий подход состоит в следующем. Вначале мы изменяем коэффициент усиления (КУ) разомкнутого контура так, чтобы получить нужную точность в установившемся режиме. Увеличение КУ приводит к уменьшению ошибок практически во всех типовых режимах. Это вытекает из того, что общий КУ разомкнутого контура входит в качестве делителя во все коэффициенты ошибок. Однако повышение КУ приближает систему к колебательной границе устойчивости. При некотором его значении в замкнутой системе возникают незатухающие колебания, что представляет собой противоречие между требованиями к точности и требованиями к устойчивости системы регулирования. Поэтому необходимо строить диаграммы Бode для определения запасов устойчивости по амплитуде и фазе. Если требования по запасам устойчивости не удовлетворены, то нужно добавить *компенсатор* (корректирующее устройство или последовательный регулятор), позволяющий получить требуемый вид ПФ разомкнутого контура. Во многих практических случаях применение компенсатора позволяет достичь компромисса между точностью в установившихся режимах и относительной устойчивостью (запасами устойчивости).

1.2. Методика синтеза корректирующего устройства по ЛАЧХ

Методика синтеза компенсатора по ЛАЧХ состоит из таких этапов.

1. Построение асимптотической характеристики $L(\omega)$ неизменяемой части, соответствующей передаточной функции $W(p)$ разомкнутой системы. Неизменяемая часть АСР по отклонению (по ошибке регулирования) содержит объект регулирования и исполнительный элемент, элемент основной обратной связи и элемент сравнения.

2. Построение *желаемой* асимптотической характеристики $L_{\text{ж}}(\omega)$ разомкнутой системы $W_{\text{ж}}(p)$. Желаемая ЛАЧХ астатической системы состоит из четырех асимптот: низкочастотной (**НЧ**) с наклоном -20 дБ/дек, сопрягающей (**С**) с наклоном -40 или -60 дБ/дек, среднечастотной (**СЧ**) с наклоном -20 дБ/дек и высокочастотной (**ВЧ**) с наклоном -40 или -60 дБ/дек (Рис. 1.3). Таким образом, имеется четыре типа разомкнутой астатической ЛАЧХ. Каждая типовая ЛАЧХ определяется четырьмя параметрами: передаточным коэффициентом разомкнутой цепи (добротностью по скорости) и сопрягающими частотами:

$$\omega_1 = 1/T_1; \quad \omega_2 = 1/\tau_2; \quad \omega_3 = 1/T_3.$$

Так, например, желаемая ПФ I типа может быть записана в виде:

$$W_{\text{ж}}^I(p) = \frac{K(\tau_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}.$$

Диаграмма Боде желаемой ПФ I типа представлена на рис. 1.3.

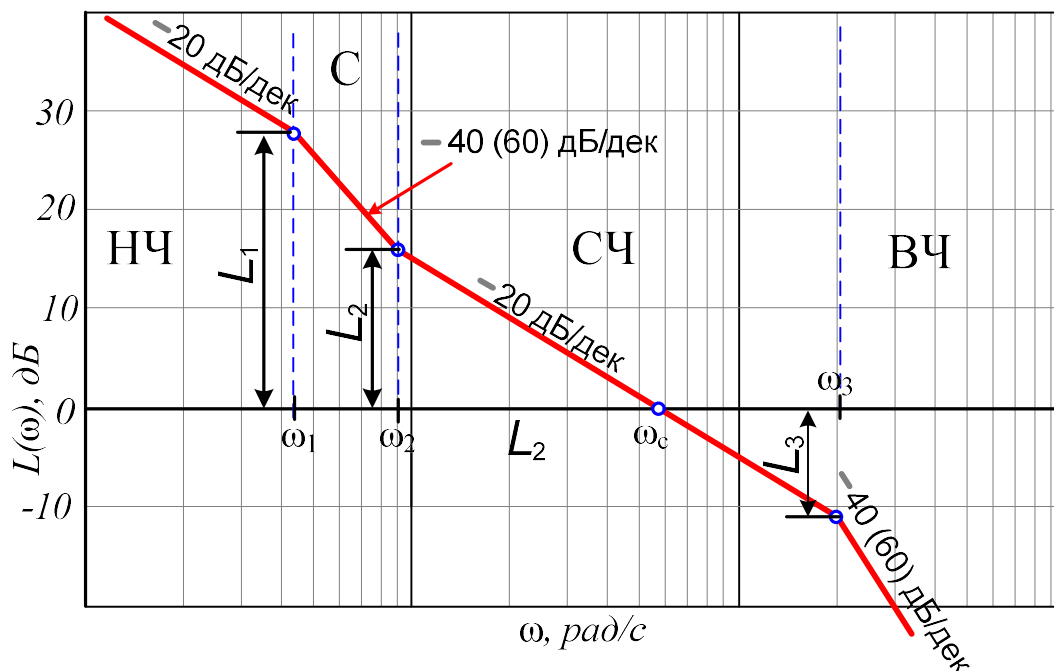


Рис. 1.3. Желаемая ЛАЧХ разомкнутой системы I типа

Запишем также ПФ остальных типов:

$$W_{\varepsilon}^{\text{II}}(p) = \frac{K(\tau_2 p + 1)^2}{p(T_1 p + 1)^2(T_3 p + 1)}; \quad W_{\varepsilon}^{\text{III}}(p) = \frac{K(\tau_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)^3};$$

$$W_{\varepsilon}^{\text{IV}}(p) = \frac{K(\tau_2 p + 1)^2}{p(T_1 p + 1)^2(T_3 p + 1)^2}.$$

Студентам предлагается построить ЛАЧХ последних трех типов.

Рассмотрим отдельные части желаемой ЛАЧХ астатической системы.

НЧ часть в интервале частот $0 \leq \omega \leq \omega_1$ определяет статическую точность системы – точность в установившихся режимах. В статических системах НЧ асимптота параллельна оси ω , т.е. имеет наклон 0 дБ/дек. В астатической системе с астатизмом первого порядка (с одним нулевым полюсом, или одним свободным интегратором) наклон этой асимптоты составляет –20 дБ/дек, с астатизмом второго порядка наклон равен –40 дБ/дек.

СЧ часть в интервале частот $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_3$ определяет устойчивость и запас устойчивости, следовательно, качество переходных процессов. Основные параметры СЧ асимптоты – ее наклон и частота среза $\omega_{\text{н}}$ (частота, при которой $L_{\varepsilon}(\omega)$ пересекает ось частот). Наиболее целесообразен наклон –20 дБ/дек и крайне редко он превышает –40 дБ/дек. Частота среза определяет быстродействие системы: *чем больше $\omega_{\text{н}}$, тем выше быстродействие системы, тем меньше время переходного процесса*. НЧ и СЧ части $L_{\varepsilon}(\omega)$ соединяются в интервале частот $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ сопрягающей частью (С) с наклоном –40 или –60 дБ/дек.

ВЧ часть $L_{\varepsilon}(\omega)$ при $\omega > \omega_3$ должна иметь наклон от –40 дБ/дек и более, т.к. ВЧ предназначена для уменьшения мощности исполнительного органа и ослабления ВЧ помех.

Примечание. Для упрощения структуры компенсатора (регулятора) за счет исключения лишних типовых звеньев из его ПФ, которая находится по формуле $W_{\varepsilon}(p) = \frac{W_{\varepsilon}(p)}{W(p)}$, при формировании желаемой ЛАЧХ *необходимо стремиться максимально совмещать частоты сопряжения и изменения наклонов асимптот графиков $L_{\varepsilon}(\omega)$ и $L(\omega)$* .

3. Нахождение графическим вычитанием

$$L_{\hat{\epsilon}}(\omega) = L_{\infty}(\omega) - L(\omega)$$

асимптотических характеристик $L_k(\omega)$ последовательного регулятора (компенсатора), т.е. дополнительного элемента, который нужно ввести в систему для придания ей необходимых свойств.

4. Восстановление типовых звеньев и ПФ компенсатора.

НЧ участку $L_{\hat{\epsilon}}(\omega)$ с наклоном 0, -20 дБ/дек или -40 дБ/дек соответствует начальное типовое звено с ПФ

$$W_{\hat{\epsilon}0}(p) = K_0; \quad W_{\hat{\epsilon}0}(p) = \frac{K_0}{p} \quad \text{или} \quad W_{\hat{\epsilon}0}(p) = \frac{K_0}{p^2}$$

и коэффициентом усиления

$$K_0 = 10^{0,05 L_1},$$

который определяется по ординате $L_1 = L(\omega_1)$.

Перемещаясь слева направо по оси частот, фиксируем частоты сопряжения ω_i (частоты точек пересечения асимптот) асимптотической ЛАЧХ компенсатора. Каждому изменению ее наклона на ± 20 дБ/дек соответствует типовое звено компенсатора с ПФ

$$W_{\hat{\epsilon}i}(p) = \left(1 + \frac{p}{\omega_i}\right)^{\pm 1} = (1 + T_i p)^{\pm 1}$$

Каждому изменению ее наклона на ± 40 дБ/дек соответствует типовое звено компенсатора с ПФ

$$W_{\hat{\epsilon}i}(p) = \left(1 + \frac{p}{\omega_i}\right)^{\pm 2} (1 + T_i p)^{\pm 2}$$

Составляем из типовых звеньев передаточную функцию компенсатора

$$R(p) = \prod_{i=0}^N W_{\hat{\epsilon}i}(p)$$

5. Нахождение ПФ замкнутой системы $T(p)$ и построение переходной характеристики. По ПХ определяются фактические показатели качества замкнутой системы.

6. Сравнение статических и динамических свойств ПХ с требуемыми. Если требуемые свойства достигнуты, то выполняется техническая реализация полученной ПФ компенсатора: разрабатывается техническое устройство, реализующее компенсатор в требуемой элементной базе.

Если требуемые свойства замкнутой системы не достигнуты, желаемые логарфмические характеристики корректируются в приведенной выше последовательности, начиная со второго этапа.

Требования, предъявляемые к *замкнутой* системе, позволяют сформулировать следующие правила построения участков желаемой ЛАЧХ *разомкнутой* системы:

– *низкочастотный участок*. Начальный участок НЧ участка желаемой ЛАЧХ должен иметь:

– наклон 0 дБ/дек в случае проектирования статической системы. По допустимой относительной погрешности $\delta_0\%$ определяются коэффициент статической ошибки (коэффициент статизма S)

$$c_0 = \frac{\delta_0\%}{100}$$

и коэффициент $K = W_{\text{э}}(0)$ статического усиления разомкнутой системы, удовлетворяющий условию

$$K \geq \frac{1}{c_0} - 1;$$

– наклон –20 дБ/дек в случае проектирования астатической системы с астатизмом первого порядка ($v_n=1$). Коэффициент усиления статической части передаточной функции $K = W_{\text{э}}(1)$ выбирается из условия обеспечения в замкнутой системе желаемого коэффициента скоростной ошибки c_1 : [(1 р. 469)]:

$$K \geq \frac{1}{c_1};$$

– *среднечастотный участок* ограничивается частотами ω_2 и ω_3 , содержит частоту среза и имеет наклон –20 дБ/дек (крайне редко –40 дБ/дек), т.е. степень астатизма $v_c = 1$ (крайне редко $v_c = 2$).

Частота среза ω_n выбирается по заданным показателям качества переходной характеристики t_0 (время установления) и σ (перерегулирование) с помощью изображенных на рис.1.4 номограмм. Аргумент этих номограмм, имеющий *вспомогательный характер*, представляет собой отношение максимального P_{max} и начального P_0 значений вещественной частотной характеристики замкнутой системы.

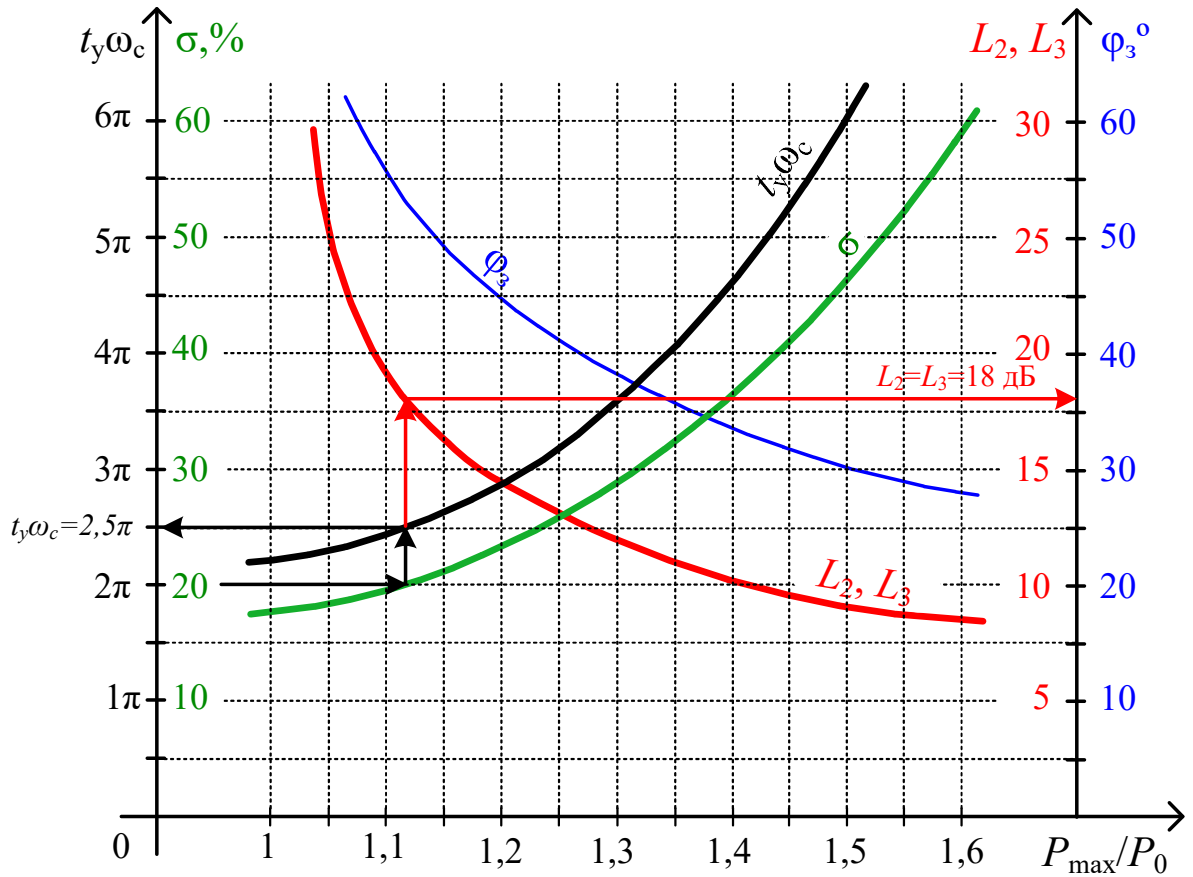


Рис. 1.4. Номограммы для определения параметров типовой ЛАЧХ

Последовательность применения номограмм показана стрелками:

1). По заданному перерегулированию σ % определяем вспомогательный аргумент P_{max}/P_0 и соответствующее ему произведение времени установления на частоту среза $t_{\phi} \omega_{\tilde{n}}$;

2). По заданному времени $t_{\phi, \zeta}$ подсчитываем частоту среза, деля произведение $t_{\phi} \omega_{\tilde{n}}$ на время установления:

$$\omega_{\tilde{n}} = \frac{t_{\phi} \omega_{\tilde{n}}}{t_{\phi, \zeta}}.$$

3). По дополнительным номограммам $\phi_{\zeta}(P_{max}/P_0)$ и $L_2, L_3(P_{max}/P_0)$ определяем запас устойчивости по фазе (запас устойчивости по амплитуде L_{ζ} принят равным 6 дБ) и минимальные значения краевых амплитуд $L_2 = L_{\infty}(\omega_2)$ и $L_3 = L_{\infty}(\omega_3)$ в дБ, по которым можно определить границы СЧ диапазона со степенью астатизма ν_c :

$$\omega_2 \leq 10^{-\frac{L_2}{20 \nu_{\tilde{n}}}} \cdot \omega_{\tilde{n}}; \omega_3 \geq 10^{\frac{L_3}{20 \nu_{\tilde{n}}}} \cdot \omega_{\tilde{n}}.$$

Вывод записанных *формул* для степени астатизма $\nu_c = 1$.

Для частот ω_2 и ω_c можно записать:

$$L_2 = 20 \lg \frac{K}{\omega_2}, \quad 0 = 20 \lg \frac{K}{\omega_{\tilde{n}}}$$

откуда

$$\frac{K}{\omega_2} = 10^{\frac{L_2}{20}} \quad \text{è} \quad \frac{K}{\omega_c} = 1.$$

Разделив второе выражение на первое, получим:

$$\frac{\omega_2}{\omega_c} = \frac{1}{10^{\frac{L_2}{20}}} \quad \text{èèè} \quad \omega_2 = \omega_c \cdot 10^{\frac{-L_2}{20}}.$$

Для частот ω_3 и ω_c можно записать:

$$L_3 = -20 \lg \frac{K}{\omega_3}, \quad 0 = 20 \lg \frac{K}{\omega_{\tilde{n}}}$$

откуда

$$\frac{K}{\omega_3} = 10^{\frac{-L_3}{20}} \quad \text{è} \quad \frac{K}{\omega_c} = 1.$$

Разделив второе выражение на первое, получим:

$$\frac{\omega_3}{\omega_c} = \frac{1}{10^{\frac{-L_3}{20}}} \quad \text{èèè} \quad \omega_3 = \omega_c \cdot 10^{\frac{L_3}{20}}.$$

Номограмма позволяет получить формулы для частоты среза и граничные частоты СЧ участка при обычно задаваемом перерегулировании в 20 %. Запишем эти формулы:

$$\omega_{\tilde{n}} = \frac{2,5\pi}{t_{\phi,\zeta}}; \quad \omega'_2 \leq 0,126\omega_{\tilde{n}}; \quad \omega'_3 \geq 7,94\omega_{\tilde{n}}.$$

НЧ и **СЧ** участки ЛАЧХ в интервале $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ соединяются сопрягающей частью (С), имеющей наклон -40 или -60 дБ/дек, рис.1.3.

ВЧ участок желаемой ЛАЧХ строится вправо от частоты ω_3 , повторяя изменения наклонов характеристики $L(\omega)$ неизменяемой части.

Пример 1.1. Для объекта

$$W_i(p) = \frac{K_i}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}$$

с коэффициентом $K_n = 20$ и $T_1 = 50$ с, $T_2 = 10$ с, $T_3 = 1$ с рассчитать компенсатор, дающий замкнутой системе астатизм первого порядка с коэффициентом скоростной ошибки $c_1 = 0,1$ с, показателями качества $t_{\sigma} \leq 2$ с, $\sigma_{\zeta} \leq 20\%$ и запасами устойчивости $G_m \geq 6$ дБ и $P_h \geq 30^\circ$.

Решение.

Запишем ПФ объекта в виде

$$W_i(p) = \frac{20}{(50p + 1)(10p + 1)(p + 1)}.$$

Найдём показатели качества системы и запасы устойчивости:

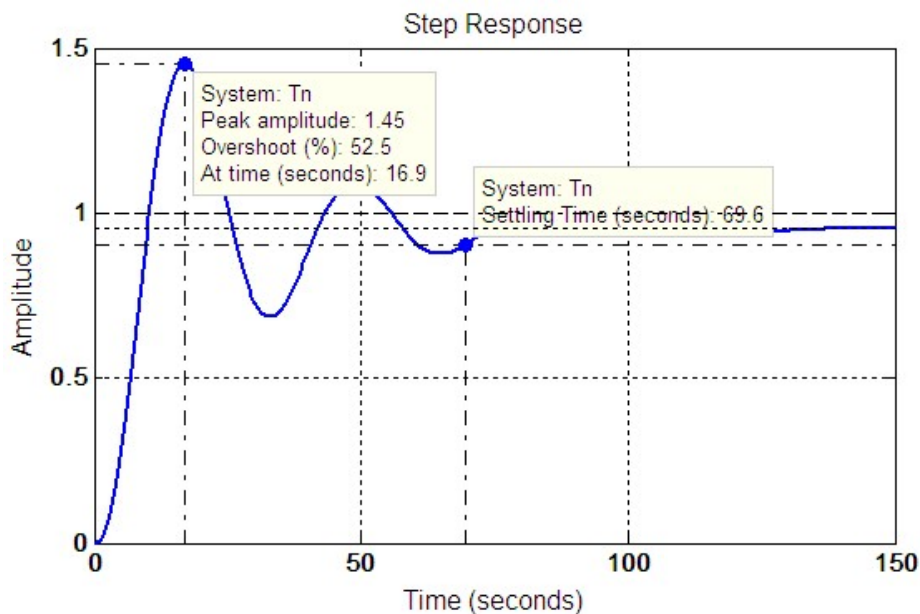


Рис. 1.5. Переходная характеристика замкнутой системы без компенсатора

Система устойчива, перерегулирование $\sigma = 52,5\%$, время установления $t_{\sigma} = 69,6$ с.

Запасы устойчивости неизменяемой части по амплитуде и фазе составляют $G_m = 10,5$ дБ и $P_h = 24^\circ$ соответственно.

Далее синтезируем компенсатор.

1. Строим асимптотическую логарифмическую характеристику $L(\omega)$ неизменяемой части.

Находим частоты излома ЛАЧХ звеньев объекта:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{50} = 0,02; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad \omega_3 = \frac{1}{T_3} = 1.$$

Коэффициенту усиления K соответствует $L(\omega) = 20 \lg K = 20 \lg 20 = 26$ дБ, поэтому проводим горизонтальную линию на уровне 26 дБ.

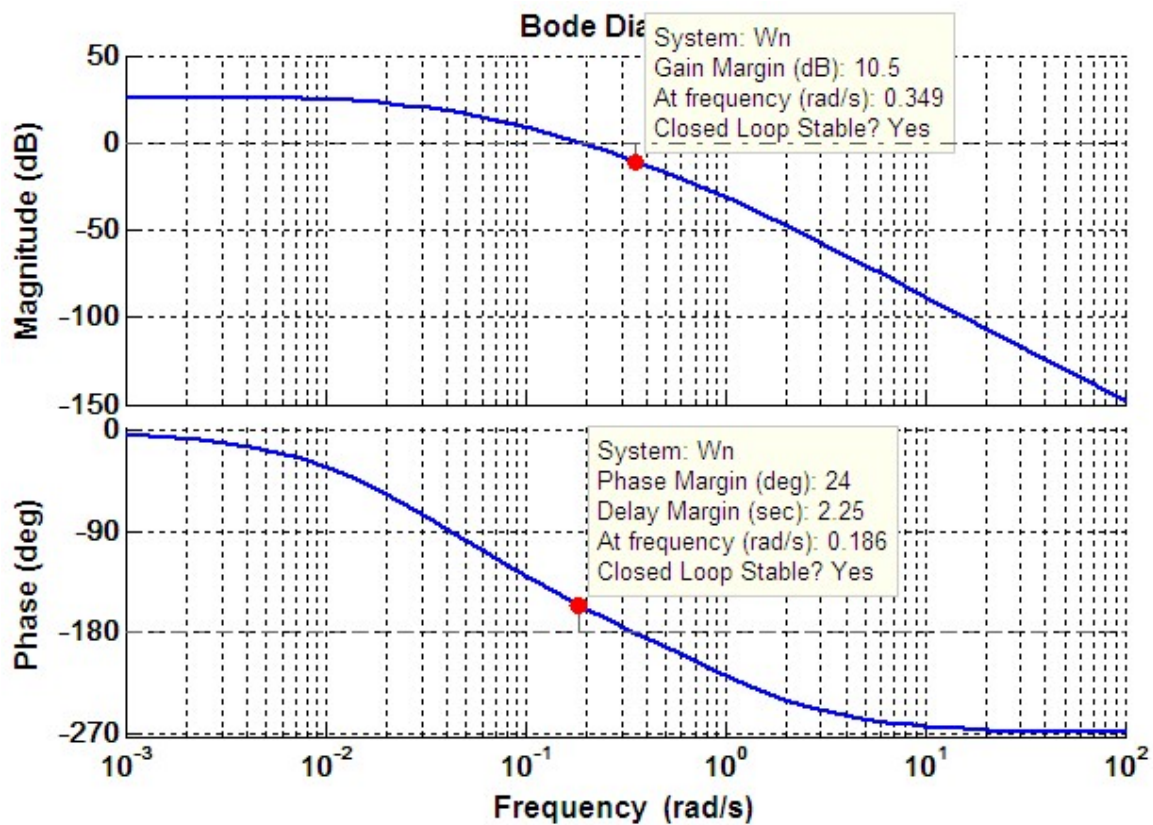


Рис. 1.6. ЛАФЧХ замкнутой системы без компенсатора

Учитывая, что полиномы первой степени находятся в знаменателе ПФ объекта, поворачиваем первоначальную асимптоту на 20 дБ по часовой стрелке при первой частоте излома ω_1 , затем вокруг второй частоты излома ω_2 и, наконец, вокруг третьей частоты излома ω_3 . В результате построения последняя асимптота имеет наклон -60 дБ/дек.

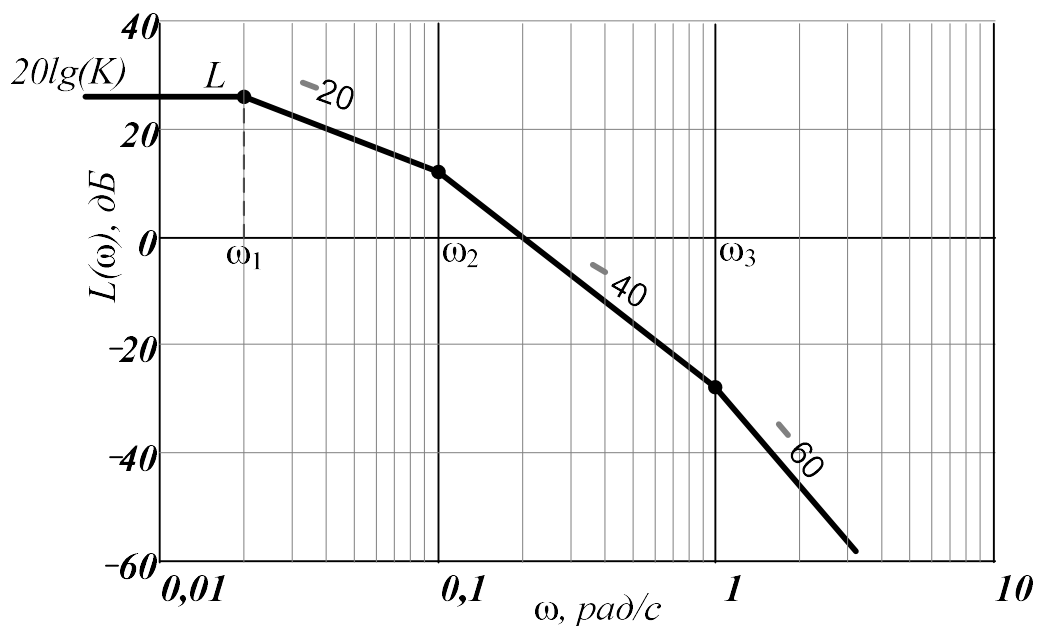


Рис. 1.7. ЛАЧХ неизменяемой части

2. Строим желаемую ЛАЧХ системы управления.

2.1. Определяем коэффициент усиления статической части желаемой системы:

$$K_{\text{э}} = \frac{1}{c_1} = \frac{1}{0,1} = 10.$$

2.2. **НЧ** часть желаемой ЛАЧХ в интервале частот $0 \leq \omega \leq \omega_1$ должна иметь наклон -20 дБ/дек (для получения астатизма первого порядка) и отсекать на оси L желаемое значение $L_{\text{э}}(1) = 20 \lg \frac{K_{\text{э}}}{\omega_{\text{е}}} = 20 \lg \frac{10}{1} = 20$ дБ. Влево от точки $(1; 20)$ проводим пунктиром низкочастотную асимптоту амплитудной характеристики с наклоном -20 дБ/дек, рис.1.8.

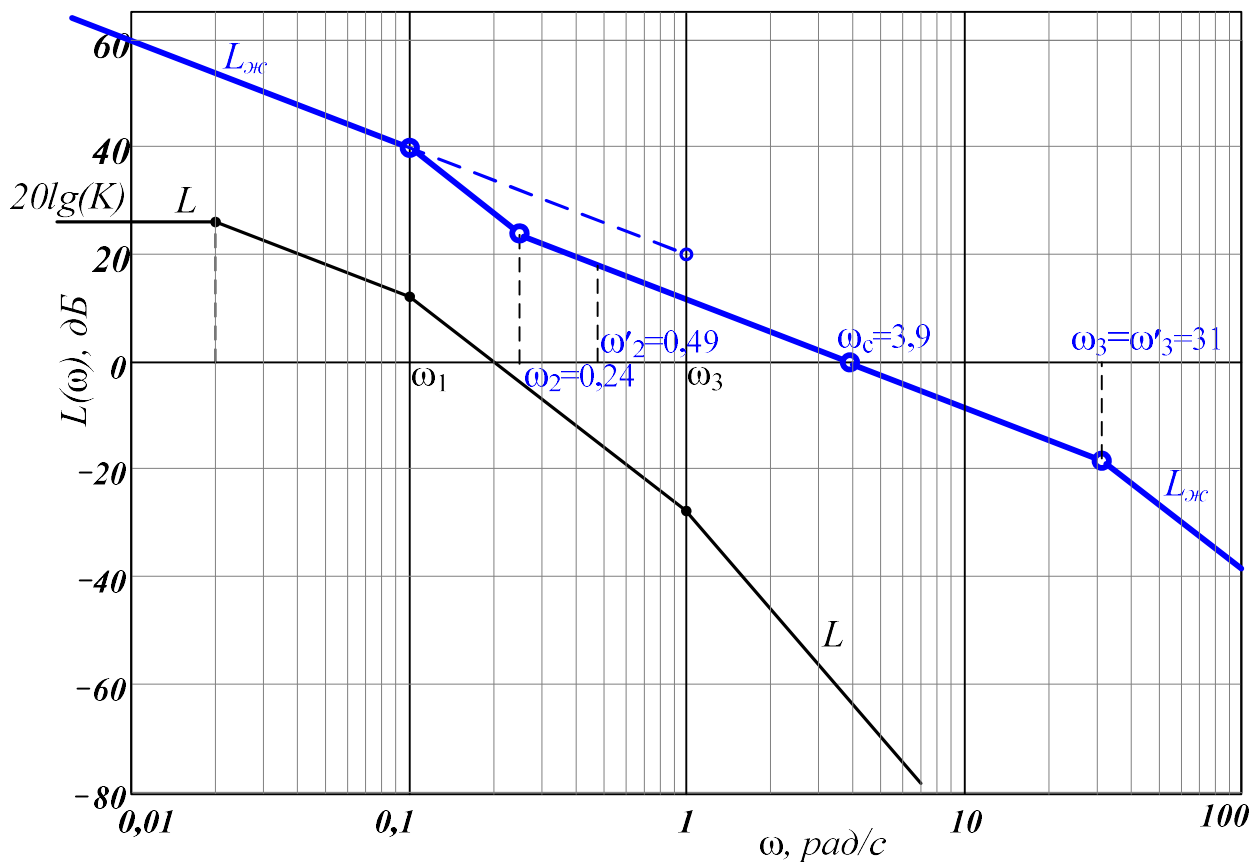


Рис. 1.8. Построение желаемой ЛАЧХ системы

2.3. Для $\sigma = 20\%$ определяем частоту среза амплитудной логарифмической характеристики, рад/с

$$\omega_{\text{н}} = \frac{2,5\pi}{t_{\text{о.с}}} = \frac{2,5\pi}{2} = 3,9$$

и границы среднечастотного диапазона, рад/с:

$$\omega'_2 \leq 0,126\omega_{\text{н}\delta} = 0,126 \cdot 3,9 = 0,49;$$

$$\omega'_3 \geq 7,94\omega_{\text{н}\delta} = 7,94 \cdot 3,9 = 31.$$

Через точку $(\omega_c; 0)$ проводим прямую с наклоном -20 дБ/дек до пересечения с вертикальными линиями, проведёнными через граничные частоты $\omega'_2 = 0,49$ рад/с и $\omega'_3 = 31$ рад/с СЧ диапазона.

Так как НЧ и СЧ части $L_{\text{ас}}(\omega)$ не пересекаются, то нужна сопрягающая часть с наклоном -40 дБ/дек. Совместим правую границу НЧ асимптоты с частотой сопряжения асимптот амплитудной характеристики объекта и получим $\omega_1 = 0,1$ рад/с и $T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 10$ с, а затем проведём прямую линию с наклоном -40 дБ/дек из этой точки. Сопрягающая асимптота проводится до пересечения со среднечастотной частью $L_{\text{ас}}(\omega)$, которая при необходимости дстраивается влево от частоты ω_2 . В данном случае сопрягающая и среднечастотная асимптоты пересекутся при $\omega_2 = 0,24$ рад/с, что дает постоянную времени $T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 4,2$ с.

2.4. Затем выбираем частоту $\omega_3 = \omega'_3 = 31$ рад/с сопряжения среднечастотной и высокочастотной асимптот желаемой амплитудной характеристики $L_{\text{ас}}(\omega)$ и находим соответствующую постоянную времени, с:

$$T_3 = \frac{1}{\omega_3} = \frac{1}{31} = 0,032.$$

2.6 По желаемой ЛАЧХ восстановим $W_{\text{ас}}(p)$, рис.1.9.

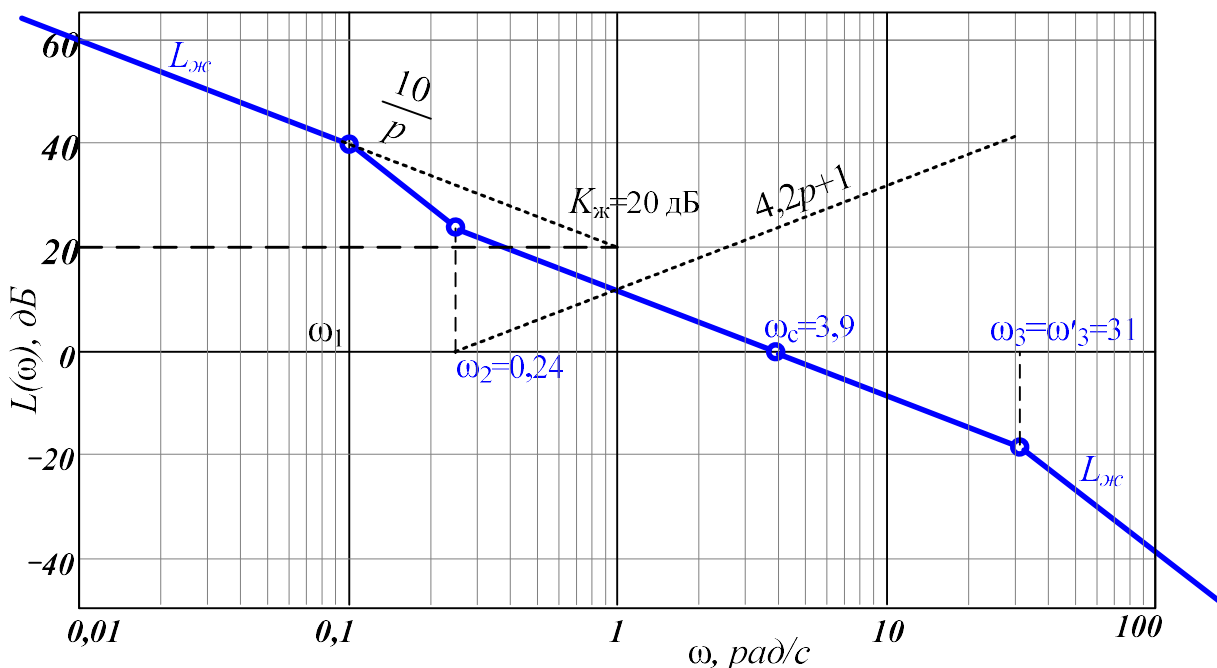


Рис. 1.9. Восстановление ПФ системы по желаемым ЛАЧХ

В результате получаем передаточную функцию желаемой разомкнутой системы:

$$W_{\text{æ}}(p) = \frac{K_{\text{æ}}(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)} = \frac{10(4,2 p + 1)}{p(10 p + 1)(0,032 p + 1)}.$$

Определим показатели качества переходного процесса по ПХ замкнутой системы, а также запас устойчивости по амплитуде и фазе.

```
p=tf('p')
Wd=(42*p+10)/(p*(10*p+1)*(0.032*p+1));
step(feedback(Wd,1))
[Gm,Ph]=margin(Wd)
```

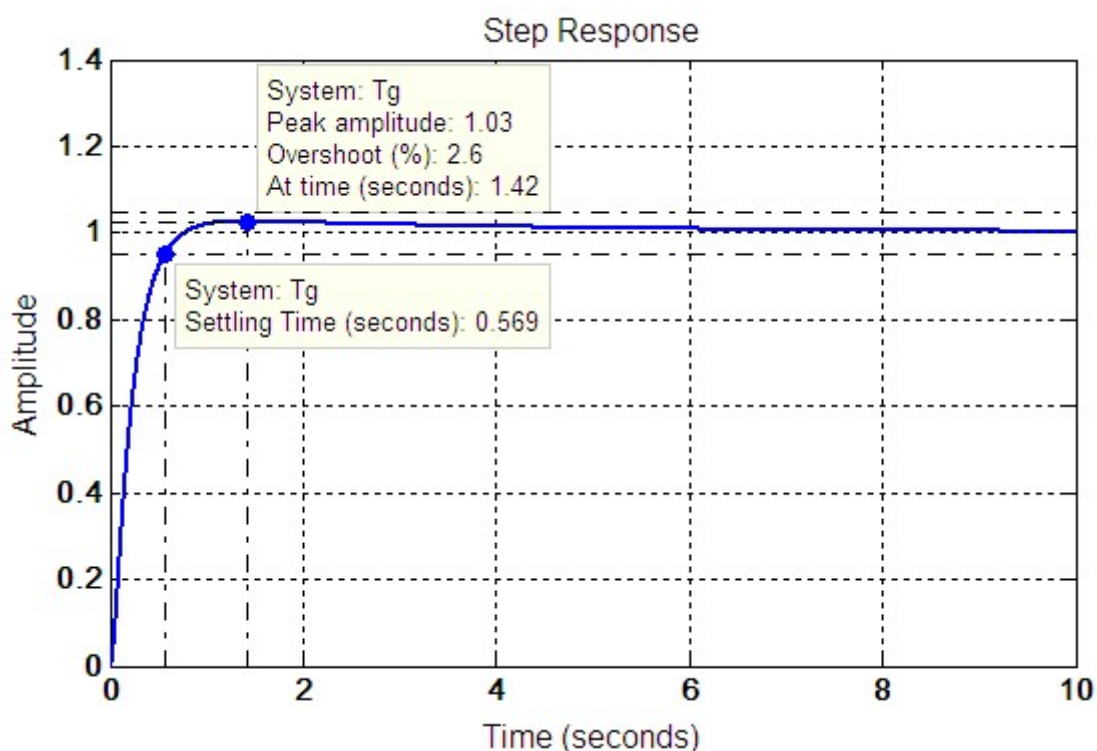


Рис. 1.10. Переходная характеристика системы с желаемыми ЛАЧХ

Перерегулирование $\sigma = 2,6\%$ и время установления $t_{\text{с}} = 0,569$, что меньше заданных значений. Замкнутая система, построенная на основе ПФ с желаемыми ЛАЧХ, по показателям качества переходного процесса соответствует заданию.

Запасы устойчивости составляют

$$G_m = \text{Inf}$$

$$P_h = 80.5070$$

3. Определение ПФ компенсатора.

Воспользуемся аналитическим способом определения ПФ компенсатора, определяя его передаточную функцию из соотношения

$$W_{\hat{e}}(p) = \frac{W_{\text{э}}(p)}{W_i(p)} = \frac{K_{\text{э}}(T_c p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_{\hat{a}} p + 1)} \cdot \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}{K_i} =$$

$$= \frac{K_{\text{э}}(T_c p + 1)(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}{K_i p(T_{\hat{a}} p + 1)} = \frac{0,5(50 p + 1)(4,2 p + 1)(p + 1)}{p(0,032 p + 1)}.$$

Пример выполнения домашнего задания. Рассчитать методом ЛАЧХ компенсатор (последовательный регулятор) для астатической системы с единичной ООС и астатизмом первого порядка, позволяющий получить в замкнутой системе коэффициент скоростной ошибки и время установления, в два раза меньшие, чем в нескорректированной системе, с перерегулированием $\sigma \leq 20\%$ и запасами устойчивости $L_{\varphi} \geq 6\text{дБ}$ и $\varphi_{\varphi} \geq 30^\circ$.

Передаточные функции объекта прямого пути передачи сигнала:

$$W_1(p) = \frac{K_1}{p}; \quad W_2(p) = \frac{1}{T_2 p + 1}; \quad W_3(p) = \frac{1}{T_3 p + 1}.$$

Пусть $K_1 = 20$, $T_2 = 0,5$ с, $T_3 = 0,01$ с. Тогда

$$W_1(p) = \frac{20}{p}; \quad W_2(p) = \frac{1}{0,5 p + 1}; \quad W_3(p) = \frac{1}{0,01 p + 1}.$$

Решение.

Запишем ПФ разомкнутой системы в виде

$$W(p) = \frac{20}{p} \cdot \frac{1}{0,5 p + 1} \cdot \frac{1}{0,01 p + 1}$$

и найдем частоты излома асимптот, рад/с:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,5} = 2; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{0,01} = 100.$$

Подсчитаем коэффициент скоростной ошибки:

$$c_{1i} = \frac{1}{\lim_{p \rightarrow 0} p W(p)} = \frac{1}{\lim_{p \rightarrow 0} \frac{20}{(0,5 p + 1)(0,01 p + 1)}} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Скорректированная система должна иметь $c_1 = c_{1i} / 2 = 0,05 / 2 = 0,025$.

Построим в Matlab диаграммы Боде и переходную характеристику для определения показателей качества и запасов устойчивости.

```

% Исходные данные
K1=20;T2=0.5;T3=0.01;
W1=tf(K1,[1 0]);
W2=tf(1,[T2 1]);
W3=tf(1,[T3 1]);
%Передаточная функция разомкнутой системы
W=W1*W2*W3;
figure(1)
%Диаграммы Боде
bode(W,'k'),grid
figure(2)
%Переходная характеристика замкнутой системы
step(feedback(W,1)),grid

```

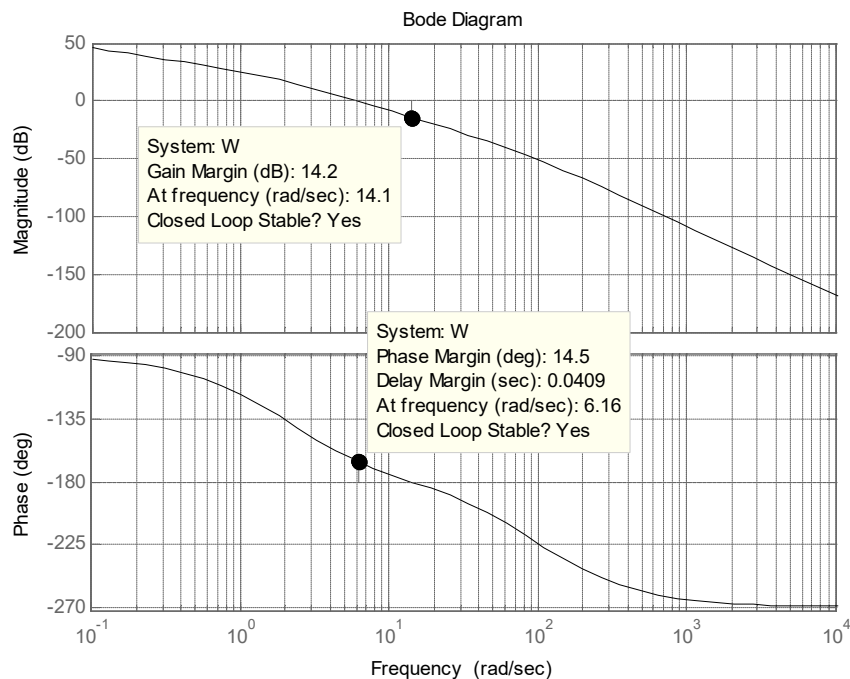


Рис. 1.11. Логарифмические характеристики разомкнутой системы

На характеристиках указаны запасы устойчивости по амплитуде (Gain Margin) и фазе (Phase Margin). Они имеют значения:

$$L_{\zeta} = 14,2 \text{ дБ и } \varphi_{\zeta} = 14,5^{\circ}.$$

Запас по амплитуде достаточный, а по фазе – меньше требуемого. Его, естественно, нужно увеличить до нужного значения: $\varphi_{\zeta} \geq 30^{\circ}$.

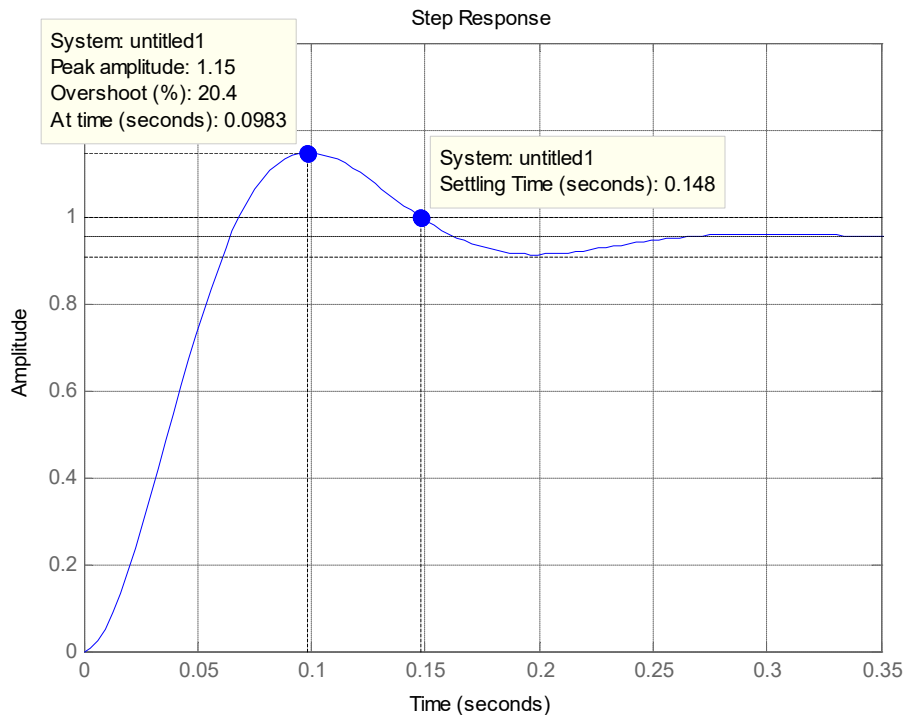


Рис. 1.12. Переходная характеристика замкнутой системы

На графике ПХ указаны ее показатели качества – перерегулирование (Overshoot) и время установления (Settling Time), исходя из 5% критерия. Они имеют значения:

$$\sigma = 66,5 \%; \quad t_{oi} = 0,148 \text{ с.}$$

Согласно заданию, эти показатели должны быть такими:

$$\sigma \leq 20\%; \quad t_o = t_{oi} / 2 = 0,074 \text{ н.}$$

Таким образом, синтезируемая система должна иметь следующие характеристики:

- коэффициент скоростной ошибки $c_1 = 0,025$;
- время установления $t_o \leq 0,074 \text{ н.}$;
- перерегулирование $\sigma \leq 20\%$;
- запасы устойчивости $L_{\varphi} \geq 6 \text{ дБ}$ и $\varphi_{\varphi} \geq 30^\circ$.

Построим $L(\omega)$ разомкнутой неизменяемой системы. Для построения $L(\omega)$ проводим вертикальные линии, соответствующие частотам излома.

Затем для звена $W_1(p) = \frac{20}{p}$ находим значение $L_1(\omega) = 20 \lg \frac{20}{\omega}$ при частоте

$\omega_1 = 2$ рад/с: $L_1(\omega_1) = 20 \lg \frac{20}{2} = 20$ дБ. Откладываем это значение на вертикали, соответствующей ω_1 , отступаем влево на декаду, затем поднимаемся вверх на 20 дБ и наносим точку; через две полученные точки проводим прямую линию. Наличие в знаменателе полиномов первой степени поворачивает эту прямую при ω_1 на 20 дБ по часовой стрелке, а затем при $\omega = \omega_2 = 100$ рад/с еще на 20 дБ по часовой стрелке. Т.о. получается ЛАЧХ $L_i(\omega)$ неизменяемой части.

Сформируем желаемую ЛАЧХ и проверим показатели качества ПХ замкнутой системы.

Коэффициент усиления статической части передаточной функции выбирается из условия обеспечения в замкнутой системе желаемого коэффициента скоростной ошибки c_1 :

$$K_{\text{э}} = \frac{1}{c_1} = \frac{1}{0,025} = 40.$$

НЧ часть желаемой ЛАЧХ в интервале частот $0 \leq \omega \leq \omega_1$ должна иметь наклон -20 дБ/дек (для получения астатизма первого порядка) и отсекают на оси L желаемое значение $L_{\text{э}}(1) = 20 \lg \frac{K_{\text{э}}}{\omega_{\text{е}}} = 20 \lg \frac{40}{1} = 32$ дБ. Влево от точки (1; 32) проводим пунктиром низкочастотную асимптоту амплитудной характеристики с наклоном -20 дБ/дек.

Частота среза амплитудной логарифмической характеристики для перерегулирования 20 %:

$$\omega_{\text{н}} = \frac{2,5\pi}{t_{\text{о}}} = \frac{2,5\pi}{0,074} \approx 85 \text{ рад/с}.$$

Границы среднечастотного диапазона:

$$\omega'_2 \leq 0,126 \omega_{\text{н}} = 0,126 \cdot 85 = 10 \text{ рад/с}, \quad (1.1)$$

$$\omega'_3 \geq 7,94 \omega_{\text{н}} = 7,94 \cdot 85 = 670 \text{ рад/с}.$$

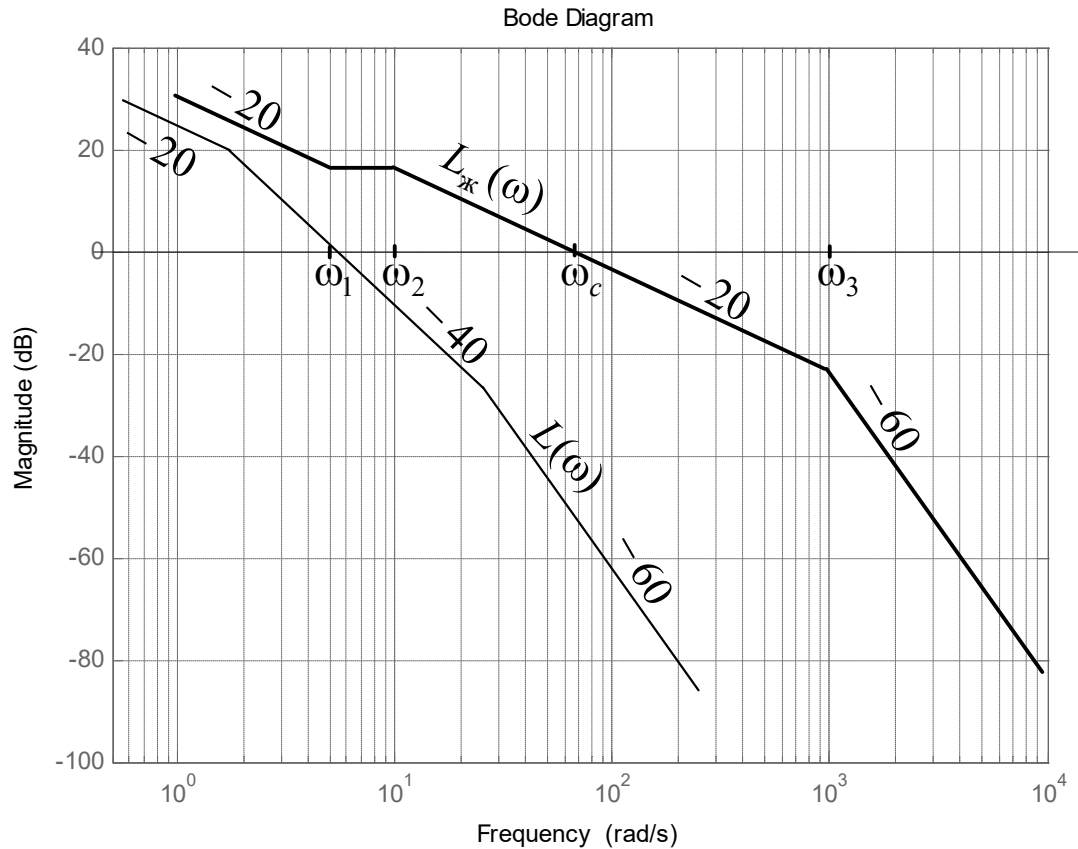
Для упрощения желаемой характеристики принимаем:

$$\omega_2 = 10 \text{ рад/с}; \quad T_2 = 1/\omega_2 = 1/10 = 0,1 \text{ с}, \quad (1.2)$$

$$\omega_3 = 1000 \text{ рад/с}; \quad T_3 = 1/\omega_3 = 1/1000 = 0,001 \text{ с}.$$

Уменьшим частоту среза:

$$\omega_{\text{н}} = 70 \text{ рад/с}.$$



Через частоту среза проводим среднечастотную асимптоту с наклоном -20 дБ/дек.

Так как низкочастотная и среднечастотная части $L_{\text{ж}}(\omega)$ не пересекаются, то нужна сопрягающая часть с наклоном -40 дБ/дек. Ее проводим из точки, соответствующей левой границе среднечастотной асимптоты с частотой $\omega_2 = 10$ рад/с; тогда сопрягающая и нижнечастотная асимптоты пересекутся на частоте $\omega_1 = 5$ рад/с, откуда получаем $T_1 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{5} = 0,2$ с.

Частота $\omega_3 = 1000$ рад/с сопряжения среднечастотной и высокочастотной асимптот желаемой амплитудной характеристики выбрана выше.

Теперь запишем ПФ желаемой разомкнутой системы, построим для нее диаграмму Бode (рис.1.13), а затем ПХ замкнутой системы (рис.1.14):

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{K_{\text{ж}}}{p} \cdot \frac{T_{\text{н}}p + 1}{T_i p + 1} \cdot \frac{1}{(T_{\text{д}}p + 1)^2} = \frac{40(0,2p + 1)}{p(0,1p + 1)(0,001p + 1)}.$$

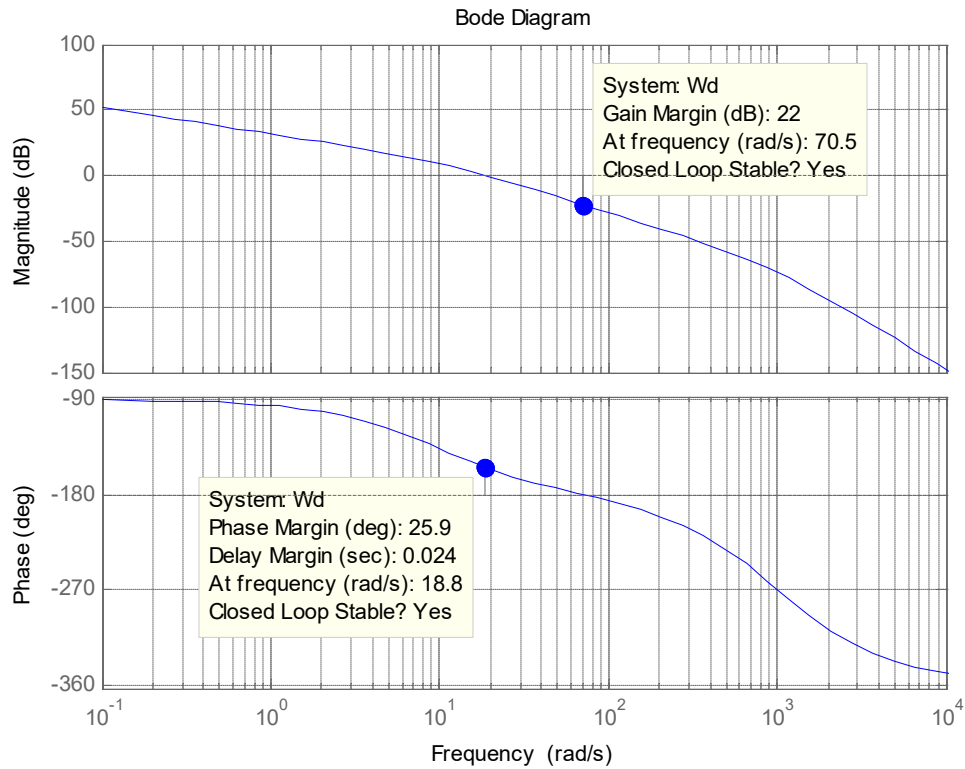


Рис. 1.13. Диаграммы Бode разомкнутой системы

Как показывают надписи на графиках, все требования удовлетворены, причем даже в большей степени, чем требовалось.

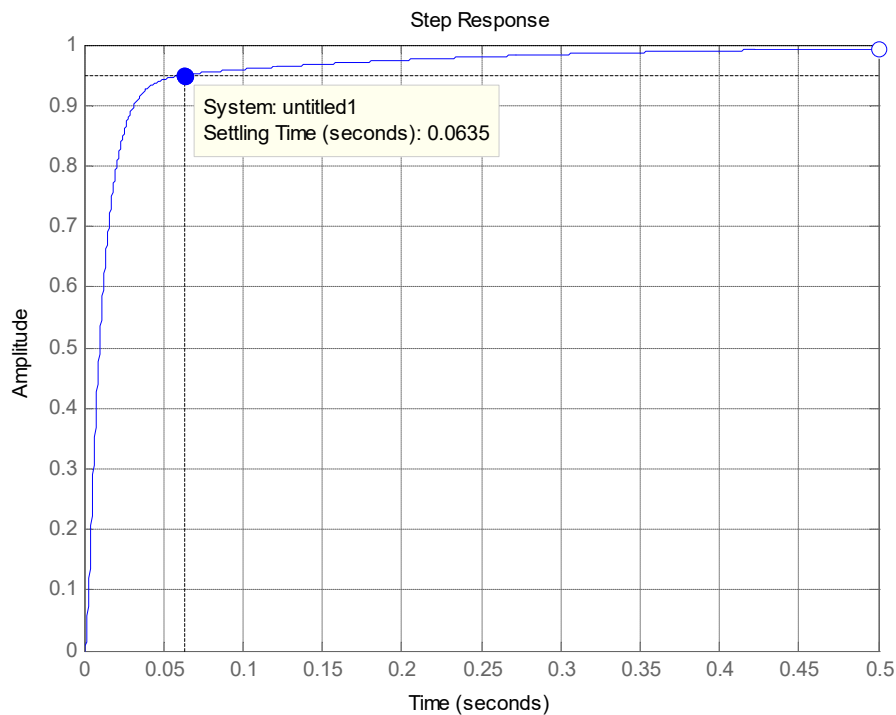


Рис. 1.14. Переходная характеристика замкнутой системы

Воспользуемся аналитическим способом определения ПФ компенсатора, определяя его передаточную функцию из соотношения

$$W_{\hat{e}}(p) = \frac{W_{\infty}(p)}{W_i(p)} = \frac{2(0,2p+1)(0,5p+1)(0,01p+1)}{(0,1p+1)(0,001p+1)}$$

1.3. Домашнее задание

Дана структурная схема САУ с единичной ОС (Рис. 1.15).

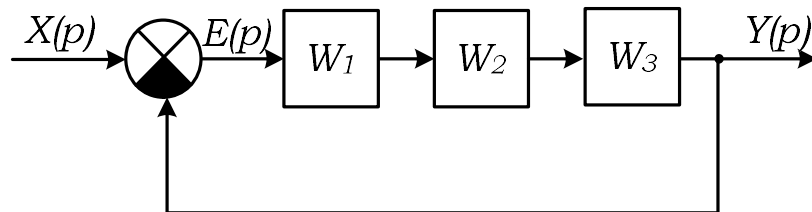


Рис. 1.15. Структурная схема замкнутой системы

Передаточные функции звеньев:

$$W_1(p) = \frac{K_1}{p}; \quad W_2(p) = \frac{1}{T_2 p + 1}; \quad W_3(p) = \frac{1}{T_3 p + 1}.$$

Значения параметров звеньев берутся из таблицы 1.1.

Таблица 1.1. Таблица коэффициентов полиномов

№ варианта	K_1	T_2	T_3
1	25	0,8	0,012
2	15	0,6	0,01
3	20	0,1	0,008
4	30	0,12	0,009
5	40	0,14	0,01
6	35	0,16	0,005
7	25	0,18	0,006
8	20	0,2	0,007
9	30	0,22	0,008
10	10	0,24	0,008
11	15	0,012	0,85
12	20	0,015	0,65
13	35	0,004	0,105
14	40	0,006	0,1
15	35	0,008	0,14
16	40	0,01	0,16

№ варианта	K_I	T_2	T_3
17	35	0,012	0,18
18	30	0,014	0,2
19	25	0,016	0,22
20	20	0,018	0,24
21	25	0,02	0,26
22	20	0,022	0,28
23	25	0,024	0,3

Требуется:

Рассчитать методом быстрого синтеза компенсатор (последовательный регулятор) для астатической системы с единичной ООС и астатизмом первого порядка, позволяющий получить в замкнутой системе коэффициент скоростной ошибки и время установления, в два раза меньшие, чем в нескорректированной системе, с перерегулированием $\sigma \leq 20\%$ и запасами устойчивости $L_\varphi \geq 6\text{дБ}$ и $\varphi_\varphi \geq 30^\circ$.

2. ПРАКТИКА 2. СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ СТАНДАРТНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Метод стандартных передаточных функций (СПФ) прост в применении, эффективен, но ему присущ один главный недостаток – применимость для класса сравнительно простых систем.

2.1. Теоретические сведения

Идея метода заключается в подборе такой структуры и таких значений параметров ПФ корректирующего устройства (КУ) реальной системы, чтобы *замкнутая система* обладала заданными статистическими и динамическими свойствами, т.е. имела желаемую передаточную функцию $T_{\text{ж}}(p)$. Такие ПФ называются стандартными (СПФ) или эталонными (ЭПФ). Их обычно выбирают, исходя из условия получения переходной характеристики $h_{\text{ж}}(t)$ определенного типа. Для физической реализуемости КУ необходимо, чтобы разностный порядок ЭПФ был не меньше разностного порядка объекта $W_0(p)$, т.е. передаточной функции всех функционально необходимых элементов. Запишем ПФ объекта и ПФ желаемой замкнутой системы в виде

$$W_i(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (m < n);$$

$$T_{\text{ж}}(p) = \frac{\beta_{\mu} p^{\mu} + \beta_{\mu-1} p^{\mu-1} + \dots \beta_1 p + \beta_0}{\alpha_n p^{\nu} + \alpha_{n-1} p^{\nu-1} + \dots \alpha_1 p + \alpha_0} = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}, \quad (\mu < \nu).$$

ПФ разомкнутой желаемой системы имеет вид:

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{T_{\text{ж}}(p)}{1 - T_{\text{ж}}(p)} = \frac{\beta(p)}{\alpha(p) - \beta(p)}.$$

Учитывая, что ПФ разомкнутой желаемой системы равна $W_{\text{ж}}(p) = W_{\text{сб}}(p) \cdot W_i(p)$, можно получить ПФ корректирующего устройства:

$$W_{\text{сб}}(p) = \frac{W_{\text{ж}}(p)}{W_i(p)} = \frac{\beta(p) \cdot A(p)}{[\alpha(p) - \beta(p)] \cdot B(p)}.$$

Некоторые ЭПФ **разомкнутых** систем приведены в таблице 2.1.

Порядок применения метода СПФ. Имеются следующие исходные данные: ПФ объекта $W_i(p)$, т.е. ПФ всех функционально необходимых элементов; порядок астатизма; величина перерегулирования σ %; время переходного процесса $t_{\text{п}}$. Подбирается некоторая стандартная ПФ *разомкнутой* системы $W^{\text{нб}}(p)$, обладающая необходимым порядком астатизма и

включающая параметр ω_0 , который обеспечивает необходимое быстродействие через нормированное время переходного процесса $\omega_0 = \tau_0 / t_i$. Величина перерегулирования σ %, не превышающая известной величины, обеспечена подбором коэффициентов СПФ.

Таблица 2.1.

N	σ %	$W^{\text{нб}}(p)$	τ_0
1	5	$\frac{\omega_0^2}{p^2 + 1,4\omega_0 p}$	5
2	8	$\frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p}$	7
3	10	$\frac{\omega_0^4}{p^4 + 2,6\omega_0 p^3 + 3,4\omega_0^2 p^2 + 2,6\omega_0^3 p}$	9
4	10	$\frac{2,5\omega_0 p + \omega_0^2}{p}$	7
5	10	$\frac{6,3\omega_0^2 p + \omega_0^3}{p^3 + 5,1\omega_0 p^2}$	9
6	10	$\frac{12\omega_0^3 p + \omega_0^4}{p^4 + 7,2\omega_0 p^3 + 16\omega_0^2 p^2}$	11
7	10	$\frac{18\omega_0^4 p + \omega_0^5}{p^5 + 9\omega_0 p^4 + 29\omega_0^2 p^3 + 38\omega_0^3 p^2}$	13
8	10	$\frac{25\omega_0^5 p + \omega_0^6}{p^6 + 11\omega_0 p^5 + 43\omega_0^2 p^4 + 83\omega_0^3 p^3 + 73\omega_0^4 p^2}$	15

Поскольку время t_n задано, а относительное время переходного процесса $\tau_0 = \omega_0 t_i$ находится из таблицы, то можно рассчитать значение параметра ω_0 и, следовательно ПФ разомкнутой системы. Т.о, СПФ разомкнутой системы, обеспечивающая заданные параметры переходного процесса и значение динамической ошибки замкнутой системы, известна.

Синтез завершается подбором ПФ наиболее простого КУ таким образом, чтобы имело место равенство

$$W_i(p)W_{\text{до}}(p) = W^{\text{нб}}(p). \quad (2.1)$$

Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя ПФ корректирующего устройства $W_{\text{до}}(p)$ определяются путем сравнения.

Пример 2.1. На рис.2.1 изображена структурная схема системы управления скоростью ракеты, состоящая из ПИ-регулятора и объекта, отражающего динамику системы.

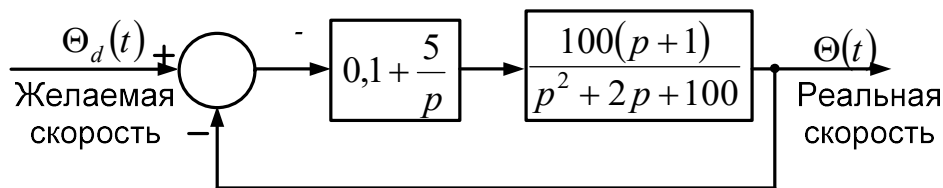


Рис. 2.1. Система управления скоростью ракеты

Нужно определить показатели качества переходной характеристики СУ, а затем с помощью СПФ подобрать такое КУ, которое позволяет получить соответствующее перерегулирование и вдвое меньшее время переходного процесса.

Решение.

ПФ регулятора и объекта:

$$W_{\text{reg}}(p) = 0,1 + \frac{5}{p} = \frac{0,1p + 5}{p}; \quad W_{\text{ob}}(p) = \frac{100p + 100}{p^2 + 2p + 100}.$$

ПФ разомкнутой и замкнутой систем:

$$W(p) = W_{\text{reg}}(p)W_{\text{ob}}(p) = \frac{0,1p + 5}{p} \cdot \frac{100p + 100}{p^2 + 2p + 100} =$$

$$= \frac{10p^2 + 510p + 500}{p^3 + 2p^2 + 100p};$$

$$T(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{10p^2 + 510p + 500}{p^3 + 12p^2 + 610p + 500}.$$

Переходная характеристика СУ, Рис. 2.2:

```
clc
Wreg=tf([0.1 5],[1 0])
Wob=tf([100 100],[1 2 100])
W=Wreg*Wob
T=feedback(W,1)
figure(1)
step(T),grid
```

Показатели качества ПХ по критерию 2%:

$$\sigma = 30\%; \quad t_{\text{г}} = 2,55 \tilde{n}.$$

Выбираем из таблицы СПФ №2:

$$W^{\tilde{n}0}(p) = \frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p}$$

с параметрами $\sigma = 8 \%$ и $\tau_0 = 7$. Время переходного процесса должно составлять $t_{\tilde{i}} = 1,2 \tilde{n}$.

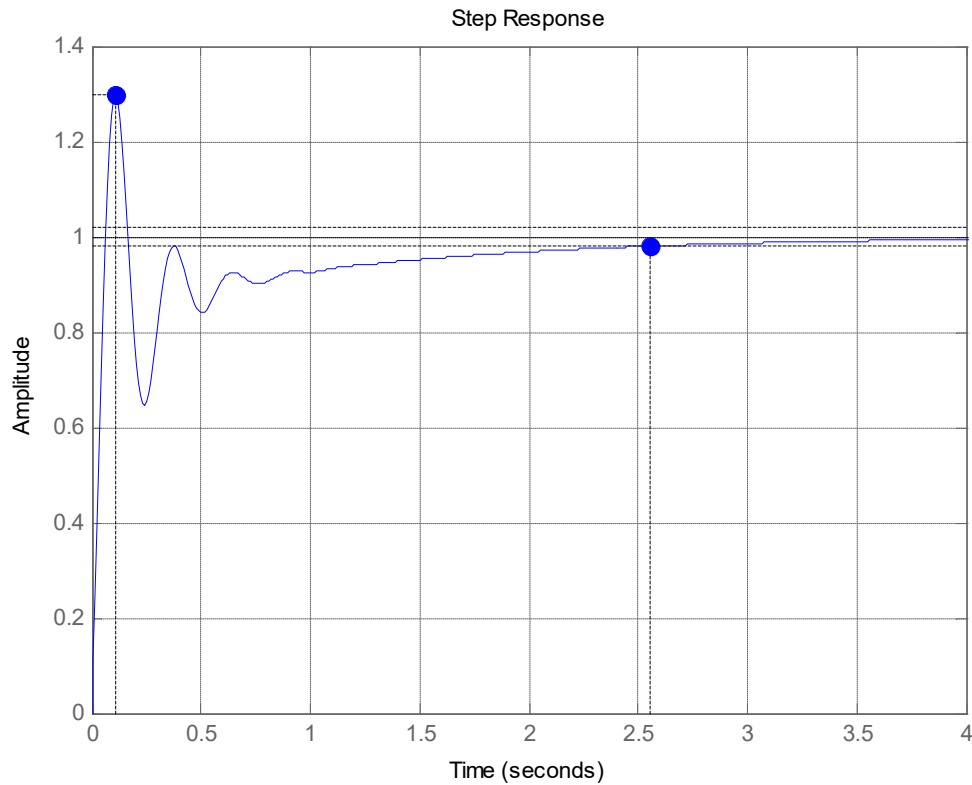


Рис. 2.2. ПХ системы управления скоростью ракеты

Тогда частота $\omega_0 = \tau_0 / t_{\tilde{i}} = 7 / 1,2 = 5,83 \tilde{n}^{-1}$, и СПФ разомкнутой системы принимает вид:

$$W^{\tilde{n}0}(p) = \frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p} = \frac{5,83^3}{p^3 + 2 \cdot 5,83 p^2 + 2 \cdot 5,83^2 p} =$$

$$= \frac{198,5}{p^3 + 11,67 p^2 + 68,1 p}.$$

ПФ замкнутой системы с СПФ:

$$T^{\tilde{n}0}(p) = \frac{W^{\tilde{n}0}(p)}{1 + W^{\tilde{n}0}(p)} = \frac{198,5}{p^3 + 11,67 p^2 + 68,1 p + 198,5}.$$

Используя формулу (2.1), найдем ПФ корректирующего устройства:

$$\begin{aligned}
W_{\dot{e}o}(p) &= \frac{W_{\dot{n}o}(p)}{W_i(p)} = \frac{198,5 p^2 + 397 p + 19850}{(p^3 + 11,67 p^2 + 68,1 p)(100 p + 100)} = \\
&= \frac{198,5 p^2 + 397 p + 19850}{p(100 p^3 + 1267 p^2 + 7972 p + 6806)} = \\
&= \frac{1,985 p^2 + 3,97 p + 198,5}{p(p^3 + 12,67 p^2 + 79,72 p + 68,06)}.
\end{aligned}$$

Программа Matlab.

```

tau0=7;Tp=1.2;w0=tau0/Tp;
num=[w0^3];den=[1 2*w0 2*w0^2 0];
disp('СПФ разомкнутой системы')
Wst=tf(num,den)
disp('СПФ замкнутой системы')
Tst=feedback(Wst,1)
figure(2)
step(Tst),grid
disp('ПФ корректирующего устройства')
Wky=Wst*Wob^-1
disp('ИЛИ')
Wky=minreal(Wky)
>>СПФ разомкнутой системы

```

```

              198.5
-----
s^3 + 11.67 s^2 + 68.06 s
СПФ замкнутой системы

              198.5
-----
s^3 + 11.67 s^2 + 68.06 s + 198.5
ПФ корректирующего устройства

      198.5 s^2 + 397 s + 1.985e004
-----
100 s^4 + 1267 s^3 + 7972 s^2 + 6806 s
ИЛИ
1.985 s^2 + 3.97 s + 198.5
-----
s^4 + 12.67 s^3 + 79.72 s^2 + 68.06 s

```

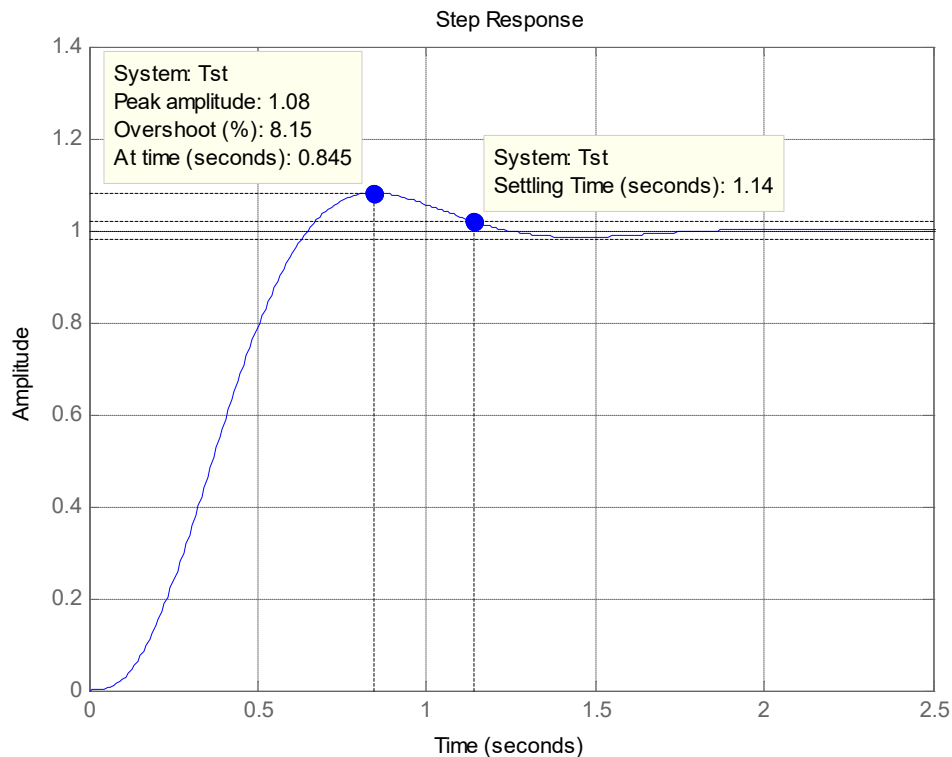


Рис. 2.3. ПХ системы управления скоростью ракеты с СПФ

При решении практических задач синтеза часто выбирают желаемую ПФ замкнутой системы в форме, которая называется стандартной и имеет простой следующий простой вид:

$$T_{\alpha}(p) = \frac{\alpha_0}{p^v + \alpha_{v-1}p^{v-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0} = \frac{\alpha_0}{\alpha(p)}. \quad (2.2)$$

Тогда из формулы для ПФ замкнутой системы

$$T_{\alpha}(p) = \frac{W_{\dot{o}o}(p)W_o(p)}{1 + W_{\dot{o}o}(p)W_o(p)}$$

можно найти ПФ корректирующего устройства:

$$W_{\dot{o}o}(p) = \frac{T_{\alpha}(p)}{W_o(p)[1 - T_{\alpha}(p)]} \quad (2.3)$$

Коэффициенты полинома знаменателя (2.2) выбирают по одной из стандартных форм, приведенных в . К ним относятся полиномы биномиальной форма, полиномы Баттерворта, полиномы минимума интеграла взвешенного модуля ошибки (ИВМО) и полиномы для получения минимального времени переходного процесса.

Таблица 2.2. Стандартные полиномы $\alpha(p)$ замкнутой САР для $v = 1; 2; \dots; 6$

Биномиальная форма
$p + \omega_0$
$p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2$
$p^3 + 3\omega_0 p^2 + 3\omega_0^2 p + \omega_0^3$
$p^4 + 4\omega_0 p^3 + 6\omega_0^2 p^2 + 4\omega_0^3 p + \omega_0^4$
$p^5 + 10\omega_0 p^4 + 10\omega_0^2 p^3 + 10\omega_0^3 p^2 + 5\omega_0^4 p + \omega_0^5$
$p^6 + 6\omega_0 p^5 + 15\omega_0^2 p^4 + 20\omega_0^3 p^3 + 15\omega_0^4 p^2 + 6\omega_0^5 p + \omega_0^6$
Форма Баттерворта
$p + \omega_0$
$p^2 + 1,4142 \omega_0 p + \omega_0^2$
$p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3$
$p^4 + 2,6131 \omega_0 p^3 + 3,4142 \omega_0^2 p^2 + 2,6131 \omega_0^3 p + \omega_0^4$
$p^5 + 3,2361 \omega_0 p^4 + 5,2361 \omega_0^2 p^3 + 5,2361 \omega_0^3 p^2 + 3,2361 \omega_0^4 p + \omega_0^5$
$p^6 + 3,86 \omega_0 p^5 + 7,46 \omega_0^2 p^4 + 9,14 \omega_0^3 p^3 + 7,46 \omega_0^4 p^2 + 3,86 \omega_0^5 p + \omega_0^6$
$\min \int_0^{t_1} t e(t) dt$
$p + \omega_0$
$p^2 + 1,4\omega_0 p + \omega_0^2$
$p^3 + 1,75 \omega_0 p^2 + 2,15 \omega_0^2 p + \omega_0^3$
$p^4 + 2,1\omega_0 p^3 + 3,4\omega_0^2 p^2 + 2,7\omega_0^3 p + \omega_0^4$
$p^5 + 2,8\omega_0 p^4 + 5,0\omega_0^2 p^3 + 5,5\omega_0^3 p^2 + 3,4\omega_0^4 p + \omega_0^5$

$p^6 + 3,25 \omega_0 p^5 + 6,60 \omega_0^2 p^4 + 8,60 \omega_0^3 p^3 + 7,45 \omega_0^4 p^2 + 3,95 \omega_0^5 p + \omega_0^6$
$\min t_i$
$p + \omega_0$
$p^2 + 1,4 \omega_0 p + \omega_0^2$
$p^3 + 1,55 \omega_0 p^2 + 2,10 \omega_0^2 p + \omega_0^3$
$p^4 + 1,60 \omega_0 p^3 + 3,15 \omega_0^2 p^2 + 2,45 \omega_0^3 p + \omega_0^4$
$p^5 + 1,575 \omega_0 p^4 + 4,05 \omega_0^2 p^3 + 1,10 \omega_0^3 p^2 + 3,025 \omega_0^4 p + \omega_0^5$
$p^6 + 1,45 \omega_0 p^5 + 5,10 \omega_0^2 p^4 + 5,30 \omega_0^3 p^3 + 6,25 \omega_0^4 p^2 + 3,425 \omega_0^5 p + \omega_0^6$

Примечание. Значения коэффициентов полинома 6-степени округлены из-за недостатка места в таблице.

Простейшая стандартная форма называется биномиальной, так как знаменатель желаемой ПФ замкнутой системы записывается в виде бинома:

$$T_{\alpha}(p) = \frac{\omega_0^v}{(p + \omega_0)^v} \quad (2.4)$$

где ω_0 – относительная частота. Передаточная функция (2.4) соответствует последовательному соединению из v инерционных звеньев первого порядка с одинаковыми постоянными времен $T_i = \frac{1}{\omega_0}$, и следовательно, с

одинаковыми полюсами $p_i = -\omega_0$. Переходный процесс будет апериодическим, и на такой процесс ориентируются в тех редких случаях, когда перерегулирование в синтезируемой системе нежелательно.

Довольно часто используется стандартная форма Баттерворта, полиномы которой имеют v корней p_i , расположенных в левой полуплоскости равномерно на дуге с радиусом ω_0 . Например, для полинома третьей степени при $\omega_0 = 1$ получим следующие корни:

```
>> R=roots([1 2 2 1])
R =
-1.0000
-0.5000 + 0.8660i
```

-0.5000 - 0.8660i

Для полинома четвертой степени при $\omega_0 = 2$ получим:

```
w0=2;
% Корни
R=roots([1 2.6*w0 3.4*w0^2 2.6*w0^3 w0^4])
% Модули корней
M1=abs(R(1)), M2=abs(R(2)), M3=abs(R(3)), M4=abs(R(4))
% Аргументы корней
K=180/pi;
arg1=angle(R(1))*K, arg2=angle(R(2))*K
arg3=angle(R(3))*K, arg4=angle(R(4))*K
>> M1 = 2.0000 M2 = 2.0000 M3 = 2.0000 M4 = 2.0000

arg1 = 112.5002 arg2 = -112.5002

arg3 = 157.4976 arg4 = -157.4976
```

Наиболее распространенной является форма полинома знаменателя, которой соответствуют переходные процессы с минимальным значением ИВМО – интеграла от взвешенного модуля ошибки, имеющего вид:

$$\hat{e} = \int_0^{t_i} t |e(t)| dt.$$

Эта оценка качества уменьшает вклад начальной большой ошибки в интеграл и учитывает ошибку, появляющуюся в дальнейшем.

Четвертая из рассматриваемых стандартных форм применяется для обеспечения минимальной длительности переходного процесса t_i (время вхождения ПХ в 5-процентную зону).

Для ПФ замкнутой системы общего вида

$$T(p) = \frac{a_1 p + a_0}{p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (2.5)$$

были определены значения коэффициентов, которые минимизируют оценку ИВМО при линейном входном сигнале. Такая система отрабатывает линейный сигнал с нулевой установившейся ошибкой. Оптимальные значения коэффициентов, основанные на критерии ИВМО, приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3.

$\min \int_0^{t_f} t e(t) dt$
$p^2 + 3,2\omega_0 p + \omega_0^2$
$p^3 + 1,75\omega_0 p^2 + 3,25\omega_0^2 p + \omega_0^3$
$p^4 + 2,41\omega_0 p^3 + 4,93\omega_0^2 p^2 + 5,14\omega_0^3 p + \omega_0^4$
$p^5 + 2,19\omega_0 p^4 + 6,50\omega_0^2 p^3 + 6,30\omega_0^3 p^2 + 5,24\omega_0^4 p + \omega_0^5$

Пример 2.2. Система управления креном самолета.

Точная матмодель, описывающая поведение самолета в воздухе, управляемого автопилотом, представляет собой систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений. Здесь мы воспользуемся упрощенной моделью динамики самолета в виде ПФ, связывающей отклонение элеронов и угол крена самолета (рис.2.4).

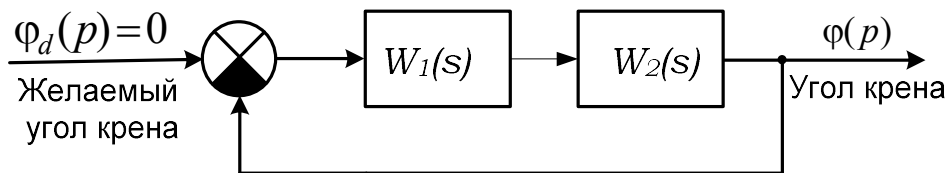


Рис. 2.4. Структурная схема замкнутой системы

ПФ элерона и динамики самолета равны соответственно:

$$W_1(p) = \frac{10}{p+10}; \quad W_2(p) = \frac{11,4}{p(p+1,4)}.$$

Цель системы управления состоит в поддержании угла крена, близкого к нулю градусов, в условиях непредвиденных внешних возмущений.

Определить переходную характеристику системы, и в случае плохих ее показателей подобрать КУ, обеспечивающее время переходного процесса, равное $t_f = 5 \tilde{n}$.

Решение. ПФ объекта:

$$W_o(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = \frac{10}{p+10} \cdot \frac{11,4}{p(p+1,4)} = \frac{114}{p^3 + 11,4p^2 + 14p}.$$

ПФ замкнутой системы:

$$T(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p)} = \frac{114}{p^3 + 11,4p^2 + 14p + 114}.$$

Построим ПХ с помощью Matlab по следующей программе:

```
%ПФ отдельных звеньев
W1=tf(10,[1 10]);W1=tf(11.4,[1 1.4 0]);
%ПФ разомкнутой и замкнутой систем
Wo=W1*W2
Transfer function W:
          114
-----
s^3 + 11.4 s^2 + 14 s
T=feedback(W,1);
>>Transfer function T:
          114
-----
s^3 + 11.4 s^2 + 14 s + 114
figure(5)
step(T,25),grid
```

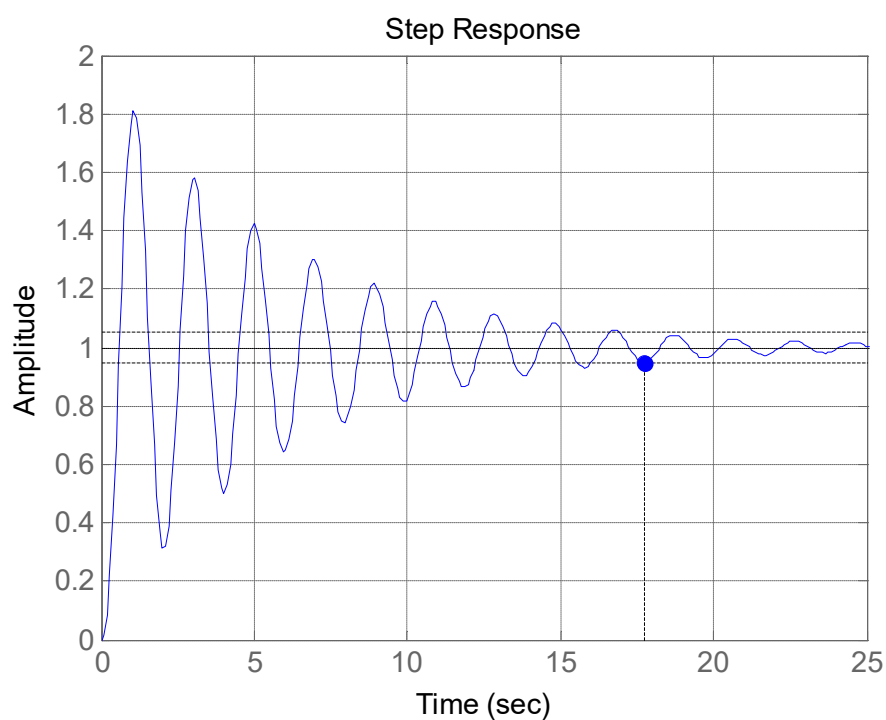


Рис. 2.5. ПХ замкнутой системы без КУ

Время переходного процесса $t_{\text{п}} = 17,4$ с; перегулирование $\sigma = 81,4\%$; большая колебательность. Такая ПХ не подходит для данного устройства.

Стандартную ПФ замкнутой системы выбираем в форме Баттерворта:

$$T_B(p) = \frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3}.$$

Относительное время переходного процесса $\tau_0 = 7$. Это позволяет определить необходимый параметр:

$$\omega_0 = \frac{\tau_0}{t_i} = \frac{7}{5} = 1,4 \text{ н}^{-1}.$$

Запишем ПФ замкнутой и разомкнутой систем:

$$T_A(p) = \frac{2,744}{p^3 + 2,8p^2 + 3,92p + 2,744};$$

$$W_A(p) = \frac{T_A(p)}{1 - T_A(p)} = \frac{2,744}{p^3 + 2,8p^2 + 3,92 \cdot p}.$$

ПФ корректирующего устройства:

$$W_{\text{до}}(p) = \frac{W_A(p)}{W_o(p)} = \frac{2,744(p^2 + 11,4p + 14)}{114(p^2 + 2,8p + 3,92)} = \frac{0,0241p^2 + 0,2744p + 0,337}{p^2 + 2,8p + 3,92}.$$

Переходная характеристика скорректированной системы:

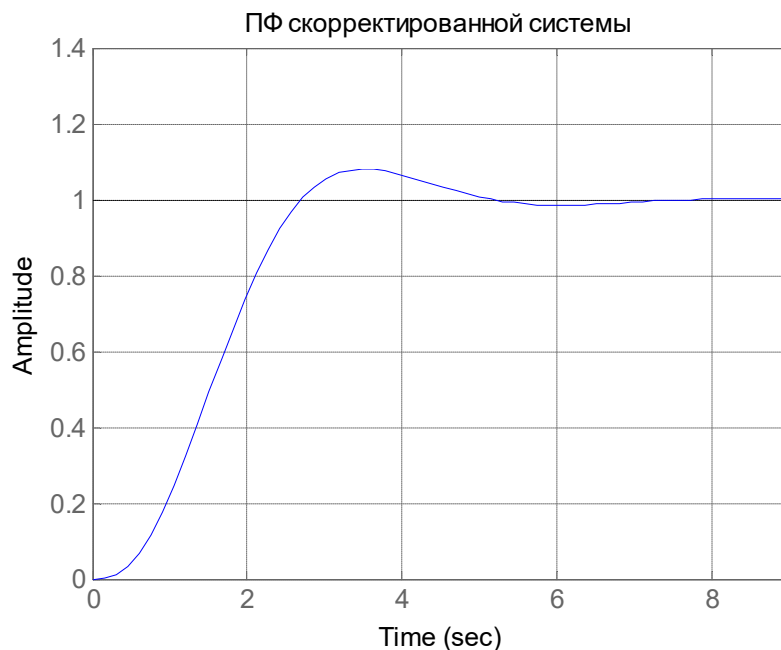


Рис. 2.6. ПХ замкнутой системы с КУ

В результате использования полученного корректирующего устройства ПХ обладает приемлемыми показателями качества: время переходного процесса $t_n = 4,74$ с; перегулирование $\sigma = 8,14\%$.

2.2. Задание

Дана структурная схема САУ с единичной обратной связью

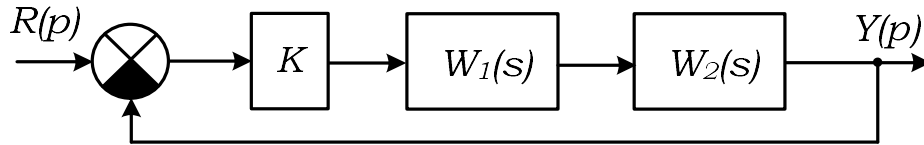


Рис. 2.7. Структурная схема замкнутой системы

Передаточные функции звеньев:

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2^2 p^2 + 2\xi_2 T_2 p + 1}, \quad K = 1,$$

где $k_1 = \frac{b_0}{a_0}$, $k_2 = \frac{b_0}{a_0}$, $T_1 = \frac{1}{a_0}$, $T_2 = \sqrt{\frac{1}{a_0}}$, $\xi_2 = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$.

Таблица 2.4. Таблица коэффициентов полиномов

№ варианта	b_0	b_1	a_1	a_0
1	72	72	4	36
2	450	450	16	300
3	1100	1100	20	550
4	1500	1500	28	750
5	1350	1350	34	900
6	165	165	7	55
7	120	120	6	80
8	450	450	12	225
9	750	750	18	500
10	210	210	7	105
11	520	520	14	260
12	800	800	10	450
13	1050	1050	26	700
14	1200	1200	30	800
15	396	396	8	132
16	600	600	16	400
17	900	900	22	600

№ варианта	b_0	b_1	a_1	a_0
18	320	320	9	160
19	750	750	14	300
20	350	350	8	175

1. Построить ПХ замкнутой системы без корректирующего устройства с объектом $W_o(p) = W_1(p)W_2(p)$. Определить показатели качества ПХ. Внести их в таблицу.

2. Получить ПФ корректирующего устройства с распределением полюсов по Баттерворту и по минимуму ИВМО для двух значений угловой частоты: $\omega_0 = 2$ и $\omega_0 = 4$. Построить ПХ замкнутых систем с КУ: на одном графике – для частоты $\omega_0 = 2$, на другом – для частоты $\omega_0 = 4$. Определить показатели качества для всех случаев и внести их в ту же таблицу (п.1). Сделать выводы по работе.

3. ПРАКТИКА 3. РАСЧЕТ РЕГУЛИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА В ВИДЕ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ПО ПЕРЕМЕННЫМ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА (СИНТЕЗ ПУТЕМ РАЗМЕЩЕНИЯ ПОЛЮСОВ)

В работе рассматривается метод синтеза систем управления, базирующийся на модели объекта в пространстве состояний. Такая модель позволяет использовать специфический вид обратной связи, так называемой *обратной связи по состоянию*, которая является обязательным атрибутом всех аналитических методов проектирования систем в пространстве состояний. Критерий качества задается с помощью характеристического полинома желаемой системы (*задача регулирования*) или в виде передаточной функции желаемой системы (*задача воспроизведения-слежения*). В задаче регулирования фиксируется расположение полюсов, а в задаче слежения – расположение нулей и полюсов проектируемой системы. Будем рассматривать задачу регулирования, которая в контексте приведенных рассуждений называется также синтезом модальных управлений или модальным управлением.

Метод размещения полюсов в заданных точках, другими словами, модальное управление представляет собой один из фундаментальных методов проектирования систем управления. Этот метод позволяет построить такую обратную связь по состоянию, при которой все полюсы проектируемой системы принимают заданные значения. *При этом предполагается, что все переменные состояния объекта доступны для измерения.*

Все полюсы замкнутой системы не могут быть размещены в заданных точках, если объект является неуправляемым. Поэтому необходимо дать определение понятию управляемость.

3.1. Управляемость

Линейная стационарная система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

является *управляемой*, если существует такой неограниченный сигнал управления $u(t)$, который позволяет за конечное время перевести эту систему из одного состояния в другое.

Для исследования SISO систем на управляемость для них вводится так называемая матрица управляемости $\mathbf{P}_c$ размерности $n \times n$, которая выражается через матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ следующим образом:

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]. \quad (3.1)$$

Если определитель матрицы $\mathbf{P}_c$ отличен от нуля (матрица $\mathbf{P}_c$ имеет себе обратную), то система является управляемой.

Пример 3.1. Рассмотрим систему, определенную уравнением состояния

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Проверим систему на управляемость, для чего составим матрицу управляемости:

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \\ 6 & 29 & 31 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \\ 6 & 29 & 31 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 31 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Определитель матрицы управляемости:

$$\det \mathbf{P}_c = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{vmatrix} = -1$$

Определитель матрицы $\mathbf{P}_c$ отличен от нуля, следовательно, заданная система управляема.

Управляемость системы, описываемой уравнениями состояния, можно определить в программе Matlab с помощью функции `ctrb` (Controllability matrix). Аргументами этой функции являются матрица коэффициентов $\mathbf{A}$ и матрица входа $\mathbf{B}$. Проведем проверку на управляемость системы данного примера.

```
% Этот скрипт определяет управляемость САУ
% Матрица коэффициентов и матрица входа
A=[0 1 0;0 0 1;-1 -5 -6]; B=[0;0;1];
% Матрица управляемости
Pc=ctrb(A,B)
% Определитель матрицы управляемости
n=det(Pc)
if abs(n)<eps
    disp('Система неуправляема')
else
    disp('Система управляема')
end
>>Pc =
    0     0     1
    0     1    -6
    1    -6    31
n = -1
Система управляема
```

3.2. Синтез путем размещения полюсов

Ограничимся случаем линейных непрерывных стационарных SISO систем, входная $u(t)$ и выходная $y(t)$ величины которых есть скалярные переменные. В таких системах модель объекта в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Предположим, что возмущающее воздействие $f(t)$ представляет собой импульсы, поступающие в случайные моменты t_i , $i=0,1,2,\dots$. Пусть система находится в нулевом состоянии. Итак, поступает очередной им-

пульс, вследствие чего объект переходит из нулевого начального состояния в ненулевое. Затем импульс заканчивается. Обработка возмущающего импульса заключается в возвращении объекта в прежнее нулевое состояние.

Цель управления заключается в стабилизации управляемой величины $y(t)$ на нулевом уровне. При этом задающее воздействие принимается равным нулю, $v(t)=0$. По существу система должна работать так, чтобы привести управляемую величину $y(t)$, следовательно, состояние $x(t)$ в начало координат из начального состояния, обусловленного возмущающим импульсом. В методе размещения полюсов требуемая скорость затухания свободного движения проектируемой системы, то есть длительность процесса перехода системы из ненулевого состояния $x(0)$ в нулевое состояние $x(\infty)=0$ обеспечивается неявно путем фиксации полюсов проектируемой системы. Задача заключается в том, чтобы система была настолько быстрой, чтобы могла вернуться в прежнее состояние до прихода следующего импульса. Таким образом, свободное движение системы должно затухать достаточно быстро, а это можно обеспечить за счет правильного (желаемого) размещения полюсов системы. Поэтому рассматриваемая задача называется *размещением полюсов системы*.

Критерий качества задаётся в виде характеристического многочлена желаемой системы. Допустим, что по условиям синтеза корни характеристического уравнения должны иметь значения $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots -\lambda_n$. Тогда можно записать желаемое характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\alpha_{\alpha}(p) = (p + \lambda_1)(p + \lambda_2) \dots (p + \lambda_n) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0 = 0. \quad (3.2)$$

Допустимый закон управления с обратной связью по состоянию можно записать в виде

$$u(t) = v(t) - u_{\text{ин}}(t), \quad (3.3)$$

скалярная величина $u_{\text{ин}}(t) = \mathbf{K}x(t)$ называется сигналом обратной связи по состоянию. Вектор-строка $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]$ называется *векторным коэффициентом обратной связи по состоянию*. Операционную структурную схему проектируемой системы можно представить в виде, показанном на рис.3.1.

В общем случае вход объекта управления $u(t)$ является функцией переменных состояния, т.е.

$$u(t) = f[\mathbf{x}(t)].$$

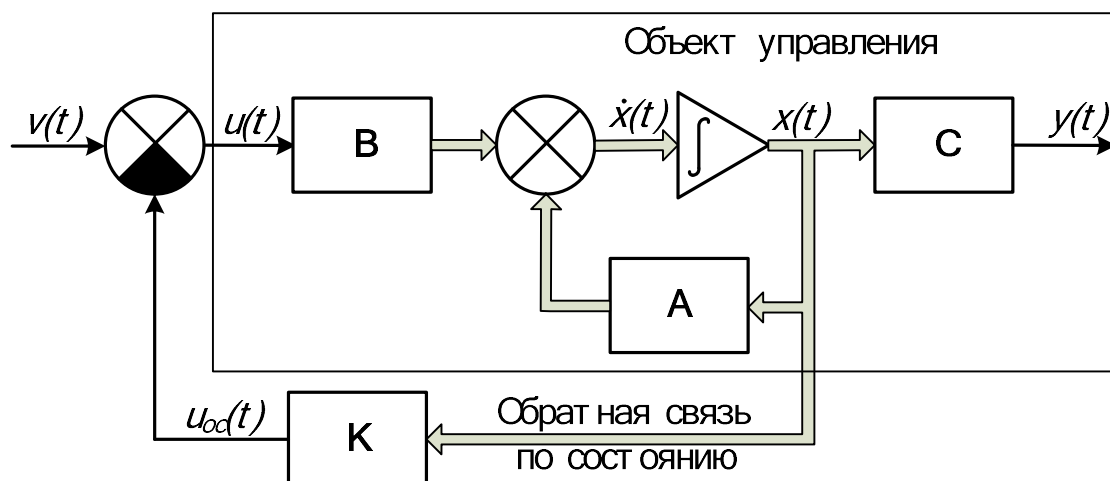


Рис. 3.1. Структурная операционная схема системы с обратной связью по состоянию

Это уравнение обычно называют *законом управления*. При синтезе путем размещения полюсов поступающий на вход объекта сигнал представляет собой сумму входного воздействия и линейную комбинацию всех переменных состояния:

$$u(t) = r(t) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t).$$

Рассмотрим случай, когда вход системы, обозначаемый как $v(t)$, равен нулю, т.е. назначение системы сводится к тому, чтобы поддерживать равной нулю выходную переменную. Тогда закон управления определится как

$$u(t) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t),$$

Этот закон позволяет разместить все полюсы замкнутой системы в заданных точках.

Например, для системы 3-го порядка

$$u(t) = -[K_1 \quad K_2 \quad K_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = -K_1 \cdot x_1(t) - K_2 \cdot x_2(t) - K_3 \cdot x_3(t).$$

Задача синтеза системы управления заключается в определении желаемых полюсов ПФ замкнутой системы и нахождении коэффициентов K_i , обеспечивающих заданное размещение полюсов на p -плоскости.

Метод синтеза САУ путем размещения полюсов основан на измерении переменных состояния и формировании из них управляющего сигнала $u(t)$, оптимизирующего качество системы.

Сначала продемонстрируем метод размещения полюсов на примере, а затем изложим общие принципы процедуры синтеза.

Пример 3.2. Рассмотрим систему стабилизации угла крена самолета.

Цель системы управления состоит в поддержании угла крена, близкого к нулю градусов, в условиях непредвиденных внешних возмущений.

При этом система должна быстро ликвидировать возникшее отклонение. Поэтому задающее воздействие равно нулю: $\varphi_d(p)=0$. Структурная схема системы приведена на рис.3.2:

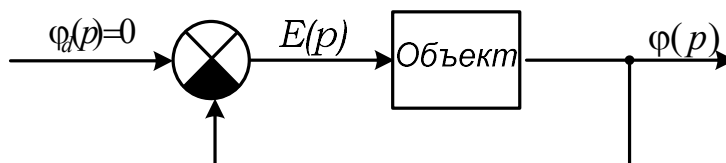


Рис. 3.2. Структурная схема системы стабилизации угла крена самолета

ПФ объекта состоит из двух ПФ – элерона $W_1(p)$ и динамики самолета $W_2(p)$:

$$W_1(p) = \frac{10}{p+10}; \quad W_2(p) = \frac{11,4}{p(p+1,4)}.$$

Следовательно, ПФ объекта имеет вид:

$$W_{ia}(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{10}{p+10} \cdot \frac{11,4}{p(p+1,4)} = \frac{114}{p^3 + 11,4p^2 + 14p}.$$

Составим SS модель объекта в канонической форме управляемости. Эта форма получила именно такое название в связи с тем, что она позволяет легко определить коэффициенты K_i .

Если объект, например, 3-го порядка имеет передаточную функцию

$$W_{ia}(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0},$$

то матрицы модели в пространстве состояний для такой системы записываются в виде:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [b_0 \quad b_1 \quad b_2].$$

Отметим особенность матрицы $\mathbf{A}$ для данной формы SS модели. Все элементы матрицы равны нулю, кроме элементов, расположенных над главной диагональю (они равны единице) и элементов последней строки. В последней строке находятся коэффициенты характеристического урав-

нения, взятые со знаком минус и расположенные в обратном порядке: первым элементом является последний (свободный) член, вторым – предпоследний и т.д.

Для модели самолета получим:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -11,4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [114 \ 0 \ 0].$$

Проверим модель на управляемость:

```
A=[0 1 0;0 0 1;0 -14 -11.4];
B=[0;0;1];
% Матрица управляемости
Pc=ctrb(A,B)
% Определитель матрицы управляемости
n=det(Pc)
if abs(n)<eps
    disp('Система неуправляема')
else
    disp('Система управляема')
end
>>Pc =
           0           0    1.0000
           0    1.0000  -11.4000
    1.0000  -11.4000  115.9600
n =    -1
Система управляема
```

ПФ замкнутой системы с единичной ООС, состоящей только из объекта:

$$T(p) = \frac{W_{ia}(p)}{1 + W_{ia}(p)} = \frac{114}{p^3 + 11,4p^2 + 14p + 114}.$$

Построим реакцию на начальные условия системы $T(p)$, рис.3.3:

```
W1=tf(10,[1 10]); W2=tf(11.4,[1 1.4 0]);
W=W1*W2;
T=feedback(W,1);
Ts=ss(T);
[A B C D]=ssdata(Ts);
x0=[1; 0; 0]; % вектор начальных значений переменных
состояния
C1=[1 0 0];
initial(A,[],C1,[],x0,20)
```

Полюса ПФ замкнутой системы:

$$p_1 = -0,167 + j3,205; \quad p_2 = -0,167 - j3,205; \quad p_3 = -11,1.$$

Два первых корня являются доминирующими, они и определяют показатели качества переходной характеристики. Коэффициент затухания – вещественная часть комплексного корня, частота затухающих колебаний – мнимая часть и частота незатухающих колебаний – модуль корня равны соответственно:

$$\alpha = 0,167; \quad \beta = 3,205; \quad \omega_i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 3,209.$$

Так как на начальном этапе третий корень можно не учитывать, то коэффициент демпфирования, перерегулирование и время переходного процесса можно определить по формулам колебательного звена:

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_i} = \frac{0,167}{3,214} = 0,052; \quad \sigma = e^{\frac{-\xi \cdot \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100 = e^{\frac{-0,052 \cdot \pi}{\sqrt{1-0,052^2}}} \cdot 100 = 84\%;$$

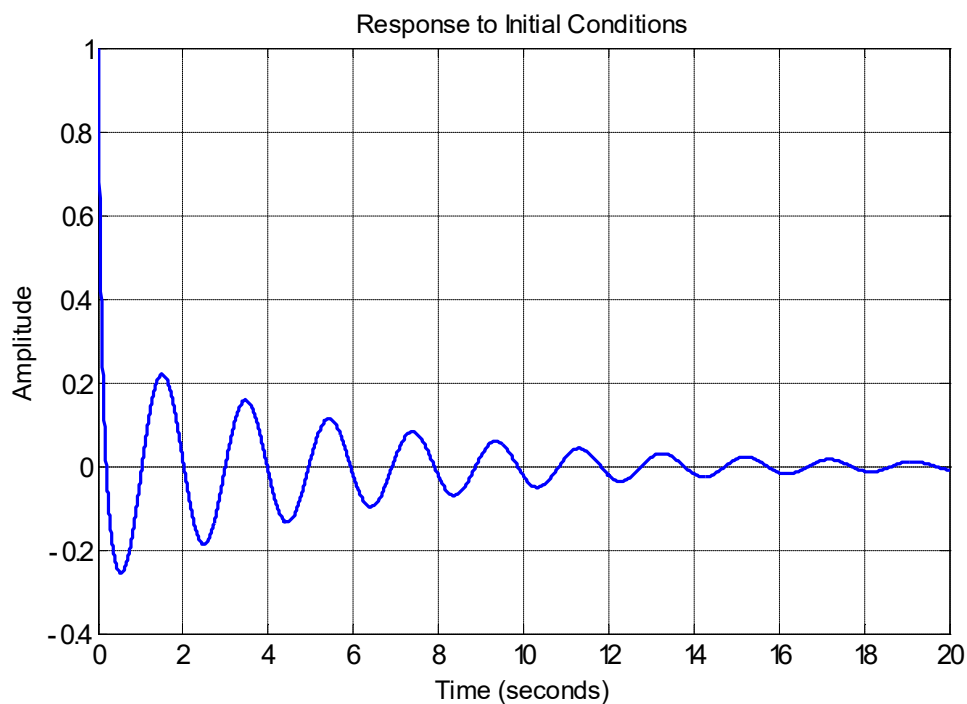


Рис. 3.3. Отклик исходной системы стабилизации на начальные условия

$$t_i = \frac{4}{\alpha} = \frac{4}{0,167} = 24 \text{ н.}$$

Предположим, что нам нужно получить систему с временем $t_n=1$ с и коэффициентом демпфирования $\xi=0,707$. Это означает, что корни характеристического уравнения (полюсы ПФ замкнутой системы) будут такими (третий корень почти оставим без изменения):

$$p_1 = -4 + j4; \quad p_2 = -4 - j4; \quad p_3 = -10.$$

Тогда желаемое характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{е}}(p) &= (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) = (p + 4 - j4)(p + 4 + j4)(p + 10) = \\ &= p^3 + 18p^2 + 112p + 320 = p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0. \end{aligned}$$

Как указывалось ранее, метод синтеза САУ путем размещения полюсов основан на измерении переменных состояния и формировании из них управляющего сигнала $u(t)$, как показано на рис.3.4.

Согласно рассматриваемому методу, сигнал на входе объекта представляет собой линейную комбинацию всех переменных состояния:

$$u(t) = -K_1 \cdot x_1(t) - K_2 \cdot x_2(t) - K_3 \cdot x_3(t) = -[K_1 \quad K_2 \quad K_3] \cdot \mathbf{x}(t)$$

Уравнения состояния для замкнутой системы принимают вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -11,4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [K_1 \quad K_2 \quad K_3] \cdot \mathbf{x}(t) =$$

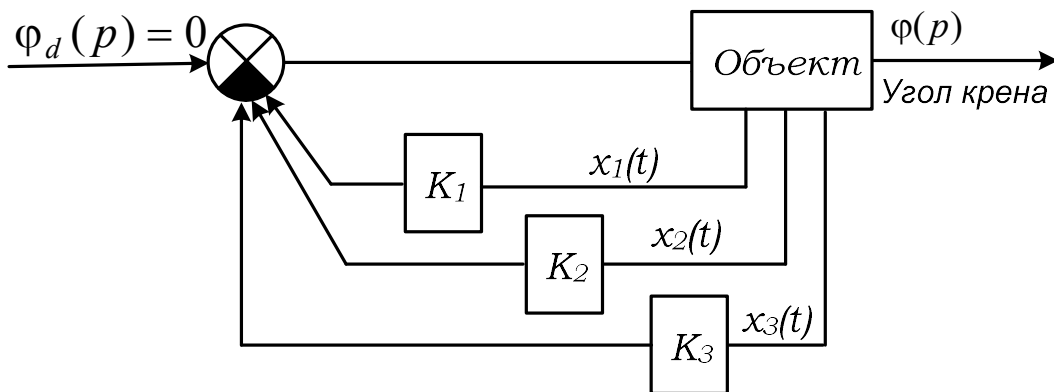


Рис. 3.4. Формирование управляющего сигнала с использованием всех переменных состояния

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -11,4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_1 & -14 - K_2 & -11,4 - K_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{A}_f$ – матрица коэффициентов замкнутой системы с обратными связями по переменным состояния.

Характеристическое уравнение замкнутой с обратными связями по переменным состояния:

$$\det[p\mathbf{E} - \mathbf{A}_f] = \begin{vmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ K_1 & 14 + K_2 & p + 11,4 + K_3 \end{vmatrix} =$$

$$= p^3 + (11,4 + K_3)p^2 + (14 + K_2)p + K_1 = 0.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p полученного и желаемого характеристических уравнений:

$$11,4 + K_3 = 18; 14 + K_2 = 112; K_1 = 320.$$

В результате получим значения коэффициентов:

$$K_1 = 320; K_2 = 112 - 14 = 98; K_3 = 18 - 11,4 = 6,6.$$

Построим реакцию синтезированной системы на начальные условия.

$$K1=320; K2=98; K3=6.6;$$

$$A_f = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; -K1 \ -14-K2 \ -11.4-K3]; B = [0; 0; 0]; C = [1 \ 0 \ 0]; D = 0;$$

$$x0 = [1; 0; 0];$$

$$\text{initial}(A_f, [], C, [], x0), \text{grid}$$

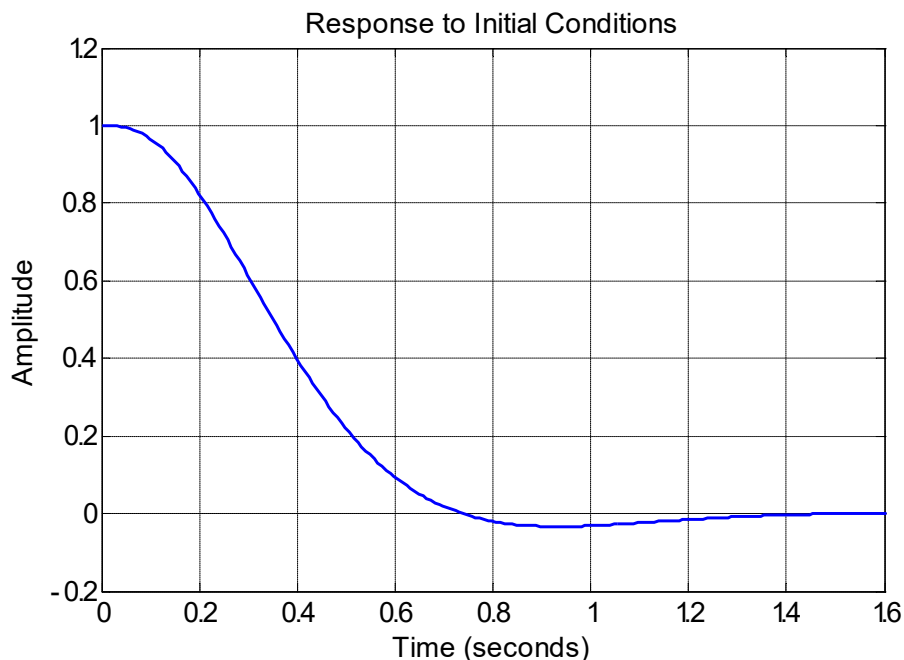


Рис. 3.5. Отклик синтезированной системы стабилизации на начальные условия

Теперь рассмотрим *общие принципы синтеза путем размещения полюсов*. Уравнения состояния и закон управления для линейной стационарной системы имеют вид, при отсутствии задающего воздействия $v(t)=0$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t); \quad u(t) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t),$$

где $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]$, n – порядок объекта.

После подстановки закона управления в уравнение состояния получим:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_f\mathbf{x}(t),$$

где $\mathbf{A}_f$ – матрица коэффициентов замкнутой системы с обратными связями по переменным состояния. Характеристическое уравнение такой системы:

$$|p\mathbf{E} - \mathbf{A}_f| = |p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = 0.$$

Теперь нужно найти такую матрицу $\mathbf{K}$, чтобы выполнялось равенство:

$$|p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = \alpha_{\kappa}(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0.$$

Это уравнение содержит n неизвестных $(K_1, K_2, \dots, K_n)$. Приравнивая в этом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях p , получим n уравнений с n неизвестными. Решив эти уравнения, получим элементы матрицы $\mathbf{K}$.

Для канонической формы управляемости характеристическое уравнение синтезированной системы и желаемое характеристическое уравнение запишем соответственно:

$$a_n(p) = p^n + (a_{n-1} + K_n)p^{n-1} + \dots + (a_1 + K_2)p + (a_0 + K_1) = 0;$$

$$\alpha_{\kappa}(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0 = 0.$$

Приравнивая в этих уравнения коэффициенты при одинаковых степенях p , получим:

$$a_{i-1} + K_i = \alpha_{i-1}.$$

Отсюда получаем формулы для искоемых коэффициентов:

$$K_i = \alpha_{i-1} - a_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Например, если объект имеет характеристический полином 3-го порядка

$$a(p) = p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0,$$

а желаемый полином замкнутой системы равен

$$\alpha_{\kappa}(p) = p^3 + \alpha_2p^2 + \alpha_1p + \alpha_0,$$

то коэффициенты, входящие в закон управления, определяются по формулам:

$$K_3 = \alpha_2 - a_2, \quad K_2 = \alpha_1 - a_1, \quad K_1 = \alpha_0 - a_0.$$

В нашем примере характеристический полином объекта имеет вид:

$$a(p) = \det[p\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ K_1 & 14 & p+11,4 \end{vmatrix} = p^3 + 11,4p^2 + 14p + 0.$$

Желаемый полином замкнутой системы равен:

$$\alpha_{\kappa}(p) = p^3 + 18p^2 + 112p + 320.$$

Поэтому коэффициенты принимают значения:

$$K_3 = 18 - 11,4 = 6,6; \quad K_2 = 112 - 14 = 98; \quad K_1 = 320 - 0 = 320.$$

Выражение для коэффициентов K_i представляет собой общее решение задачи синтеза путем размещения полюсов для SISO систем, но для этого необходимо, чтобы модель системы была представлена в канонической форме управляемости. Это требование трудно выполнить, так как, во-первых, не все переменные состояния в такой модели соответствуют переменным состояния реальной системы, а во-вторых, в общем случае эти переменные состояния могут быть недоступны для измерения.

Для SS модели, представленной в любой форме, Аккерманом была предложена формула для вычисления элементов матрицы $\mathbf{K}$ с использованием только двух матриц: $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Эта формула переводит заданную модель произвольной структуры в каноническую форму управляемости, после чего определяются искомые коэффициенты K_i . Затем полученное решение пересчитывается обратно применительно к исходной модели. Эти действия выполняются с помощью следующей формулы Аккермана:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \cdot [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1} \cdot \alpha_{\kappa}(\mathbf{A})$$

или

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \cdot \mathbf{P}_c^{-1} \cdot \alpha_{\kappa}(\mathbf{A}),$$

где $\mathbf{P}_c^{-1}$ – обратная матрица управляемости и $\alpha_{\kappa}(\mathbf{A})$ – матричный полином, образованный с использованием коэффициентов желаемого характеристического полинома $\alpha_{\kappa}(p)$, т.е.

$$\alpha_{\kappa}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1} \cdot \mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot \mathbf{A} + \alpha_0 \cdot \mathbf{E}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Применим формулу Аккермана для определения коэффициентов примера 3.2.

Для системы 3-го порядка ($n = 3$) формула Аккермана принимает вид:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \mathbf{P}_c^{-1} \cdot \alpha_{\infty}(\mathbf{A}).$$

Матричный полином имеет вид:

$$\alpha_{\infty}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + \alpha_2 \cdot \mathbf{A}^2 + \alpha_1 \cdot \mathbf{A} + \alpha_0 \cdot \mathbf{E}.$$

Коэффициенты желаемого полинома имеют значения:

$$\alpha_2 = 18; \quad \alpha_1 = 112; \quad \alpha_0 = 320.$$

Найдем обратную матрицу управляемости и степени матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$:

```
% Матрица управляемости и ее обратная матрица
Pc=[0 0 1; 0 1 -11.4; 1 -11.4 115.96];
Pci=inv(Pc)
% Матрица коэффициентов
A=[0 1 0; 0 0 1; 0 -14 -11.4];
% Степени матрицы коэффициентов
A2=A^2
A3=A^3
>>
Pci =
         14         11.4          1
        11.4          1          0
          1          0          0
A2 =
         0          0          1
         0         -14         -11.4
         0        159.6        115.96
A3 =
         0         -14         -11.4
         0        159.6        115.96
         0       -1623.4       -1162.3
```

Найдем матричный полином:

$$\alpha_{\infty}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -14 & -11,4 \\ 0 & 159,6 & 116 \\ 0 & -1623,4 & -1162,3 \end{bmatrix} + 18 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -11,4 \\ 0 & 159,64 & 115,96 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& +112 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & 11,4 \end{bmatrix} + 320 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -14 & -11,4 \\ 0 & 159,6 & 116 \\ 0 & -1623,4 & -1162,3 \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & -252 & -205,2 \\ 0 & 2872,8 & 2087,3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 112 & 0 \\ 0 & 0 & 112 \\ 0 & -1568 & -1276,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 320 & 0 & 0 \\ 0 & 320 & 0 \\ 0 & 0 & 320 \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} 320 & 98 & 6,6 \\ 0 & 227,6 & 22,76 \\ 0 & -318,64 & -31,864 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты обратных связей:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= [0 \ 0 \ 1] \cdot \mathbf{P}_c^{-1} \cdot \alpha_{\infty}(\mathbf{A}) = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 320 & 98 & 6,6 \\ 0 & 227,6 & 22,76 \\ 0 & -318,64 & -31,864 \end{bmatrix} = \\
&= [320 \ 98 \ 6,6],
\end{aligned}$$

где
$$[0 \ 0 \ 1] \cdot \mathbf{P}_c^{-1} = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 14 & 11,4 & 1 \\ 11,4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0]$$

По формуле Аккермана получены те же значения коэффициентов.

Из данного примера следует, что для систем порядка $n > 2$ применение формулы Аккермана вручную весьма затруднительно. Нужно для этой цели применять Matlab. Студенты без труда могут написать нужную программу. После этого можно провести проверку полученного результата, так как в MATLAB есть инструкция `acker`, которая вычисляет вектор коэффициентов $\mathbf{K}$. Входными аргументами инструкции являются матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и вектор-строка $\mathbf{Pp}$ желаемого расположения полюсов замкнутой системы управления:

$$\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{Pp})$$

Найдем коэффициенты для примера 3.2:

$$\mathbf{A} = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; 0 \ -14 \ -11,4];$$

$$\mathbf{B} = [0; 0; 1]; \mathbf{D} = 0; \mathbf{C} = [114 \ 0 \ 0];$$

$$\mathbf{Pp} = [-4+4*i \ -4-4*i \ -10];$$

$$\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Pp})$$

$$>> \mathbf{K} =$$

$$-5600$$

$$-494$$

$$6.6$$

Приведем схему практической реализации системы стабилизации угла крена самолета с использованием датчиков положения ДП, скорости ДС и ускорения ДУ (рис.3.6):

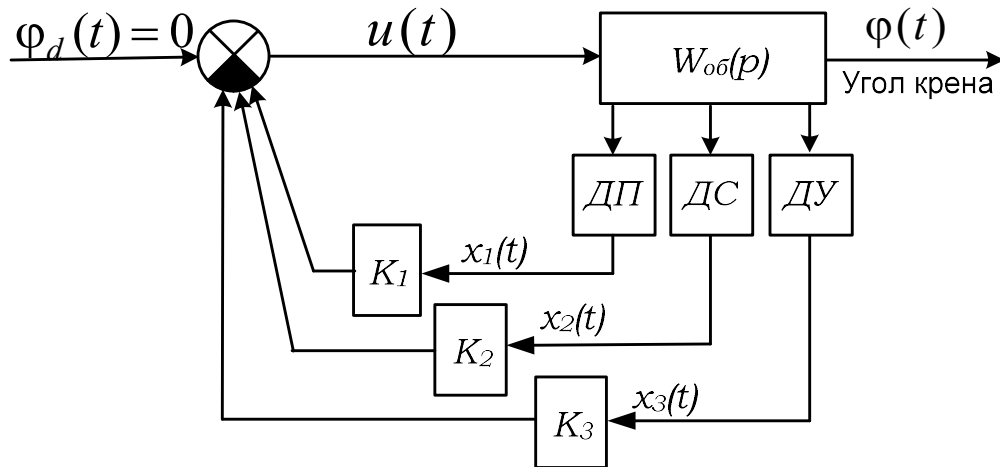


Рис. 3.6. Реализация метода синтеза путем размещения полюсов замкнутой системы

В рассмотренном выше примере у системы не было входного воздействия. Ее цель – вернуть значение выходной переменной (и всех переменных состояния) к нулевому значению определенным, наперед заданным образом. Системы такого типа (при входном сигнале, равном нулю) обычно называют *регулятором состояния*. Однако во многих случаях система должна отслеживать входное воздействие, т.е. задающий сигнал отличен от нуля. В следующем примере и рассматривается этот случай.

Пример 3.3. Определить параметры регулятора для системы, структурная схема которой приведена на рис.3.7, таким образом, чтобы обеспечить распределение полюсов системы по Баттерворту ($\omega_0 = 1$) и коэффициент передачи, равный единице. Все переменные состояния объекта измеряемы.

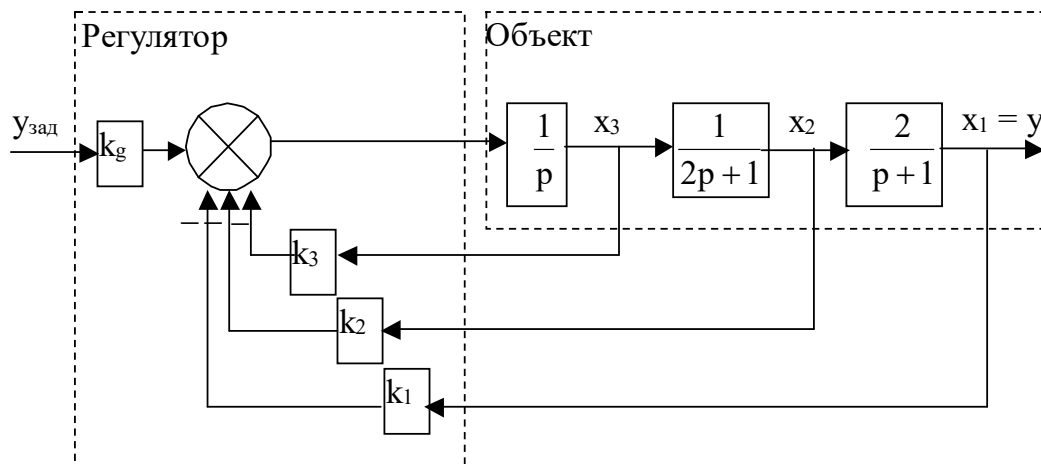


Рис. 3.7. Структурная схема системы управления при наличии входного воздействия

Передаточная функция замкнутой системы, удовлетворяющая требованиям задания, имеет вид:

$$T(p) = \frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}.$$

Уравнения системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_1; \\ \dot{x}_2 = 0,5x_3 - 0,5x_2; \\ \dot{x}_3 = k_g y_{\zeta\ddot{a}\ddot{a}} - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3, \end{cases}$$

$$y = x_1.$$

Матрицы модели:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_g \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \quad 0 \quad 0), \quad \mathbf{D} = 0.$$

Характеристический полином системы:

$$\begin{aligned} \det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \det \begin{pmatrix} p+1 & -2 & 0 \\ 0 & p+0,5 & -0,5 \\ k_1 & k_2 & p+k_3 \end{pmatrix} = \\ &= (p+1)(p+0,5)(p+k_3) + k_1 + 0,5k_2(p+1) = \\ &= p^3 + (1,5 + k_3)p^2 + (0,5 + 0,5k_2 + 1,5k_3)p + k_1 + 0,5k_2 + 0,5k_3. \end{aligned}$$

Равенство полинома заданному обеспечивают следующие коэффициенты: $k_3 = 0,5$, $k_2 = 1,5$, $k_1 = 0$.

Числитель передаточной функции системы

$$\text{num}(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}. \quad (3.4)$$

Найдем присоединенную матрицу $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+$:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^T = \begin{pmatrix} p+1 & 0 & k_1 \\ -2 & p+0,5 & k_2 \\ 0 & -0,5 & p+k_3 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{pmatrix} \times & \times & 1 \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

где знаком «×» помечены элементы, которые нас не интересуют с учетом структур матриц В и С.

Подставляя (3.6) в (3.4) получим:

$$\text{num}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & 1 \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k_g \end{pmatrix} = k_g.$$

Таким образом, требуемый коэффициент числителя достигается выбором значения $k_g = 1$.

3.3. Задание

Заданы ПФ неизменяемой части (объекта) $W_1(p)$ и $W_2(p)$, приведенные в задании к занятию №1. Выполнить синтез САР путем размещения полюсов т.о., чтобы время переходного процесса было в два раза меньше, чем при замыкании объекта единичной ОС. Система поддерживает нулевое значение выходной величины.

3.4. Пример выполнения задания

Структурная схема неизменяемой части (объекта управления) состоит из двух передаточных функций в основном соединении:

$$W_1(p) = \frac{30}{p}; \quad W_2(p) = \frac{1}{0,2p+1} = \frac{5}{p+5}.$$

Выполнить синтез САР путем размещения полюсов т.о., чтобы время переходного процесса было в два раза меньше, чем при замыкании объекта единичной ОС. Система поддерживает нулевое значение выходной величины.

Решение. Найдем ПФ объекта и запишем матрицы его модели в канонической форме управляемости:

$$W_o(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = \frac{30}{p} \cdot \frac{5}{p+5} = \frac{150}{p^2 + 5p};$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [150 \quad 0]; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Проверим модель объекта на управляемость.

Матрица управляемости модели второго порядка ($n = 2$):

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы управляемости:

$$\det \mathbf{P}_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1.$$

Определитель матрицы $\mathbf{P}_c$ отличен от нуля, следовательно, объектом можно управлять.

ПФ системы с единичной ООС:

$$T(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p)} = \frac{150}{p^2 + 5p + 150}.$$

Полюса ПФ – корни характеристического уравнения $p^2 + 5p + 150 = 0$:

$$p_{1,2} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 150} = -2,5 \pm j12 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициент затухания (модуль вещественной части корня) определяет время переходного процесса. Для уменьшения этого времени вдвое нужно взять удвоенное значение полученного коэффициента затухания. Кроме того, пусть коэффициент демпфирования $\xi = 0,707$. Тогда корни желаемого характеристического полинома и сам полином будут такими:

$$\alpha = 2\alpha = 2(2,5) = 5;$$

$$\omega_i = \frac{\alpha}{\xi} = \frac{5}{0,707} = 7,072;$$

$$\beta = \sqrt{\omega_i^2 - \alpha^2} = \sqrt{7,072^2 - 5^2} = 5.$$

$$p_{1\alpha} = -5 + j5 \text{ с}^{-1}; \quad p_{2\alpha} = -5 - j5 \text{ с}^{-1};$$

$$\alpha_{\alpha}(p) = (p - p_{1\alpha})(p - p_{2\alpha}) = (p + 5 - j5)(p + 5 + j5) = p^2 + 10p + 50.$$

Матрица коэффициентов замкнутой системы с обратными связями по переменным состояния:

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [K_1 \quad K_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -(5 + K_2) \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином системы:

$$|p\mathbf{E} - \mathbf{A}_f| = \begin{vmatrix} p & -1 \\ K_1 & p + (5 + K_2) \end{vmatrix} = p^2 + (5 + K_2)p + K_1$$

Приравниваем соответствующие коэффициенты полученного и желаемого полиномов:

$$K_1 = 50; \quad K_2 = 10 - 5 = 5.$$

Найдем коэффициенты в Matlab:

```
A=[0 1; 0 -5]; B=[0; 1];
Pp=[-5+5*i -5-5*i];
K=acker(A,B,Pp)
>>K =
    50     5
```

Начертим структурную схему системы с использованием модели объекта в канонической форме управляемости (рис.3.8):

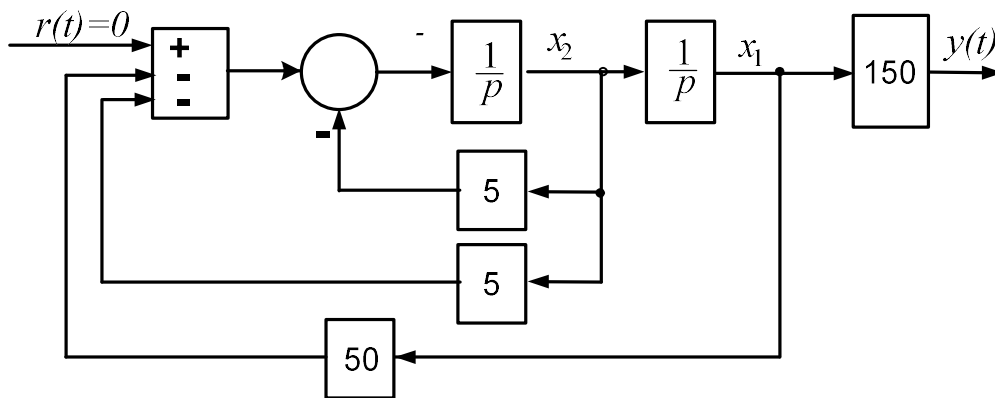


Рис. 3.8. Структурная схема системы управления для примера

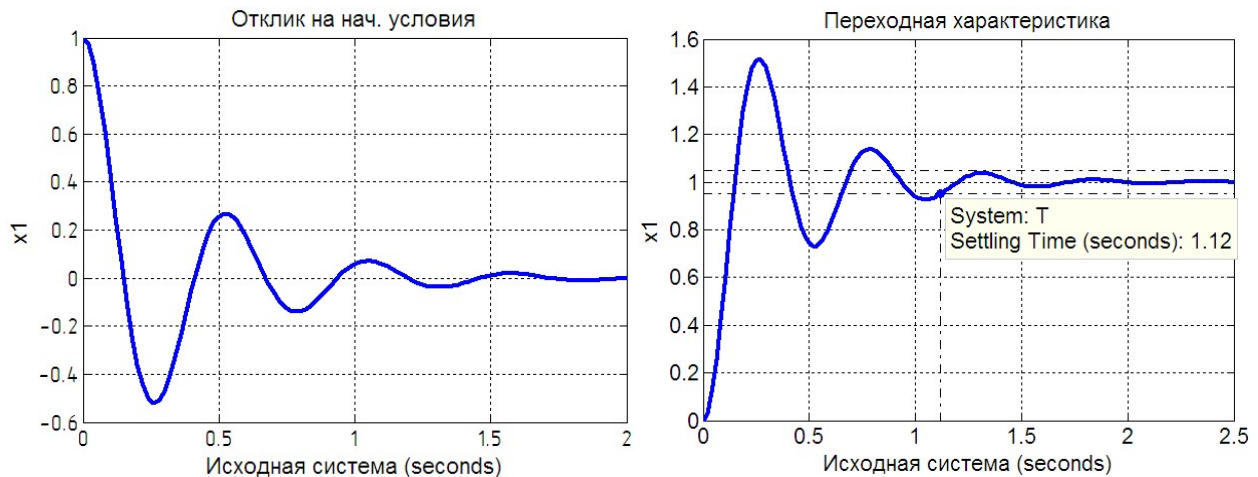
Построим отклик исходной системы с единичной ООС на начальные условия и единичный скачок:

```
% Исходные данные
W1=tf(30,[1 0]); W2=tf(1,[0.2 1]);
W=minreal(W1*W2); % ПФ объекта и его матрицы
A=[0 1;0 -5];B=[0;1];C=[150 0];D=0;
Wob=ss(A,B,C,D); % SS модель объекта
% SS модель системы с единичной ООС
T=feedback(Wob,1);
[A B C D]=ssdata(T); % Извлечение матриц SS модели
x0=[1;0]; % Вектор начальных значений
% Матрица для вывода первой переменной состояния
C1=[1 0];
figure(1)
% Построение графика отклика
```

```

initial(A, [], C1, [], x0, 2)
title('Отклик на нач. условия')
xlabel('Исходная система'), ylabel('x1')
figure(2), grid
step(T), grid
title('Переходная характеристика')
xlabel('Исходная система'), ylabel('x1')

```

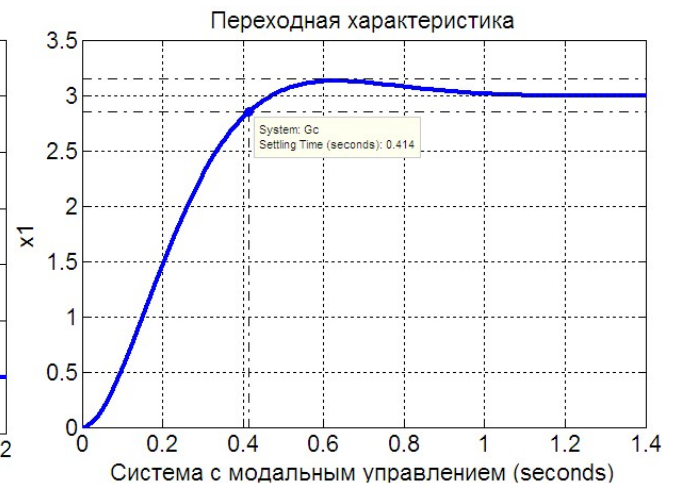
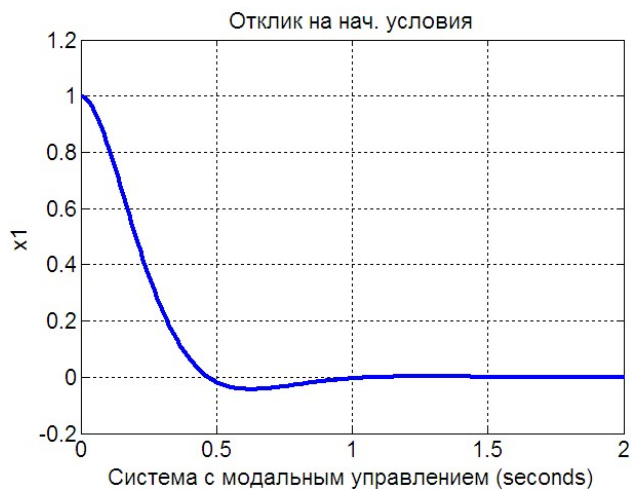


Построим отклик синтезированной системы на начальные условия и на единичный скачок:

```

% Матрицы SS модели объекта
A=[0 1;0 -5];B=[0;1];C=[150 0];D=0;
% Вектор желаемых полюсов системы
Pr=[-5+5*i -5-5*i];
% Вектор коэффициентов
K=acker(A,B,Pr);
% Матрица коэффициентов и SS модель замкнутой системы
Af=A-B*K; Gc=ss(Af,B,C,D);
figure(3)
initial(Af, [], C1, [], x0, 2)
grid
title('Отклик на нач. условия')
xlabel('Система с модаЛЬНЫМ управлением'), ylabel('x1')
figure(4), grid
step(Gc)
title('Переходная характеристика')
xlabel('Система с модаЛЬНЫМ управлением'), ylabel('x1')

```



4. ПРАКТИКА 4. СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ

Современная процедура синтеза, основанная на размещении полюсов и законе управления $u(t) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t)$, подразумевает, что все переменные состояния объекта могут быть измерены, т.е. в системе может быть использована полная обратная связь по состоянию. В сложных системах все переменные состояния измерить практически невозможно. Следовательно, чтобы реализовать данный метод синтеза, необходимо в результате некоторого наблюдения за поведением объекта оценить (если это возможно) те переменные состояния, которые не могут быть непосредственно измерены. Затем эти переменные могут быть использованы в уравнении закона управления. Оценка ненаблюдаемых переменных состояния в общем случае называется наблюдением. Прибор (или компьютерная программа), которая оценивает переменные состояния, наблюдая за ними, называется *наблюдателем состояния* или просто *наблюдателем*. Если наблюдатель оценивает все переменные состояния системы, несмотря на то, что некоторые из них поддаются прямому измерению, называется наблюдателем полного порядка. Если же наблюдатель оценивает меньше, чем n переменных состояния, где n – размерность вектора состояния, то он называется *наблюдателем пониженного порядка*.

Для синтеза наблюдателя, который оценивал бы все переменные состояния объекта, необходимо, чтобы объект был наблюдаемым. Поэтому необходимо дать определение понятию «наблюдаемость».

4.1. Наблюдаемость

Линейная стационарная система, описываемая матрицами ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$), является наблюдаемой тогда и только тогда, если существует конечное время t_1 такое, что начальное состояние $\mathbf{x}(0)$ может быть определено по значениям выходной переменной $y(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, при заданном управляющем воздействии $u(t)$.

Для исследования SISO систем на управляемость для них вводится так называется матрица наблюдаемости $\mathbf{Q}$ размерности $n \times n$, которая выражается через матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Система является наблюдаемой, если определитель матри $\mathbf{Q}$ отличен от нуля.

Пример 4.1. Рассмотрим систему, приведенную в п.3.4, определенную уравнениями состояния и выхода

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [150 \quad 0]; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Проверим систему на наблюдаемость, для чего составим матрицу наблюдаемости:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & 0 \\ 0 & 150 \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{C} = [150 \quad 0], \quad \mathbf{CA} = [150 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = [0 \quad 150].$$

Определитель матрицы наблюдаемости:

$$\det \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 150 & 0 \\ 0 & 150 \end{vmatrix} = 22500.$$

Определитель матрицы $\mathbf{Q}$ отличен от нуля, следовательно, заданная система наблюдаема.

Наблюдаемость системы, представленной моделью в пространстве состояний, можно определить в программе Matlab с помощью функции `obsv` (Observability matrix). Аргументами этой функции являются матрица коэффициентов $\mathbf{A}$ и матрица выхода $\mathbf{C}$. Проведем проверку на наблюдаемость системы данного примера.

```
% Матрица коэффициентов и матрица выхода
A=[0 1;0 -5];C=[150 0];
% Матрица наблюдаемости
Q=obsv(A,C)
% Определитель матрицы наблюдаемости
m=det(Q)
if abs(m)<eps
    disp('Система ненаблюдаема')
else
    disp('Система наблюдаема')
end
```

```
>> Q = 150    0
      0    150
      m = 22500
      Система наблюдаема
```

4.2. Синтез наблюдателя

Предположим, что имеется система с одним входом и одним выходом, описываемая уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}.$$

Вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ в любой момент времени неизвестен, в частности, неизвестны начальные условия. Нужно получить оценку вектора состояния системы, которую обычно обозначают $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Для этой цели мы можем использовать всю доступную информацию: входной сигнал $u(t)$, измеренное значение выхода $y(t)$ и матрицы системы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Как сказано выше, устройство оценки состояния называют *наблюдателем состояния* или просто *наблюдателем*. Он должен иметь такую же динамику, что и сама система. На него и подаются входной и выходной сигналы системы, а на выходе получается оценка переменных состояния (рис.4.1). Тогда уравнение состояния наблюдателя можно записать в виде:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{H}u(t) + \mathbf{K}_e y(t).$$

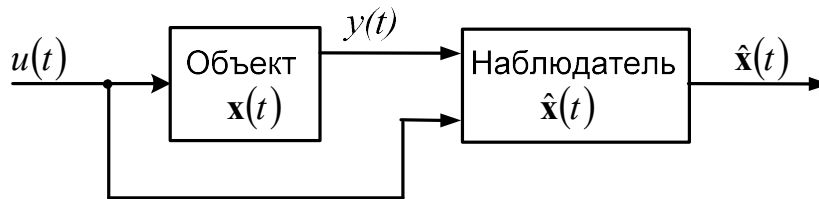


Рис. 4.1. Оценка состояния

Матрицы этого уравнения должны быть выбраны таким образом, чтобы вектор $\hat{\mathbf{x}}(t)$ давал точную оценку $\mathbf{x}(t)$. Тогда в системе управления вектор $\hat{\mathbf{x}}(t)$ можно использовать для формирования сигнала управления $u(t) = -\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t)$.

Уравнения для определения матриц $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{K}_e$ могут быть получены методом передаточной функции. Суть его заключается в том, что ПФ от входа $u(t)$ к переменной состояния наблюдателя $\hat{x}_i(t)$ должна быть равна ПФ от входа $u(t)$ к переменной состояния наблюдателя $x_i(t)$ для всех i , т.е.

$$\frac{\hat{X}_i(p)}{U(p)} = \frac{X_i(p)}{U(p)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Применение преобразования Лапласа к уравнениям объекта и наблюдателя при нулевых начальных условиях и приравнивание указанных ПФ позволяет получить следующий результат:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}.$$

Вывод полученных выражений показывает, что указанные ПФ будут равны независимо от матрицы $\mathbf{K}_e$. Поэтому матрицу $\mathbf{K}_e$ можно выбрать, учитывая желаемые ограничения.

С учетом полученных соотношений уравнение наблюдателя можно представить в виде:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_e y(t),$$

где подлежит определению матрица $\mathbf{K}_e$, которая называется усилителем наблюдателя (estimator gain matrix) и имеет размерность $n \times 1$:

$$\mathbf{K}_e = [K_{e1} \quad K_{e2} \quad \dots \quad K_{en}]^T.$$

Характеристическое уравнение наблюдателя:

$$|p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| = 0.$$

Матрица $\mathbf{K}_e$ обычно выбирается так, чтобы переходный процесс в наблюдателе заканчивался быстрее, чем в системе. Эмпирически установлено, что наблюдатель должен быть в 2–4 раза более быстродействующим. Это позволяет выбрать такое характеристическое уравнение наблюдателя, которое содержит информацию о желаемом быстродействии:

$$\alpha_e(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0.$$

Тогда матрица $\mathbf{K}_e$ должна удовлетворять уравнению

$$|p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| = \alpha_e(p).$$

При синтезе наблюдателя состояния для определения матрицы $\mathbf{K}_e$ может быть использована формула Аккермана, записанная в следующем виде:

$$\mathbf{K}_e = \alpha_e(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{Q}^{-1} [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T,$$

где $\mathbf{Q}$ – матрица наблюдаемости, $\mathbf{Q}^{-1}$ – обратная матрица наблюдаемости, $\alpha_e(\mathbf{A})$ – матричный полином, образованный с использованием коэффициентов характеристического полинома наблюдателя $\alpha_e(p)$, т.е.

$$\alpha_e(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1} \cdot \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \mathbf{A} + a_0 \cdot \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Усилитель наблюдателя K_e можно найти с помощью Matlab двумя способами – непосредственно по формуле Аккермана и с помощью команды `acker`. Следующий пример представляет собой задачу синтеза наблюдателя и реализацию закона управления.

Как указывалось выше, в системе управления вектор $\hat{x}(t)$ можно использовать для формирования сигнала управления $u(t) = -K \cdot \hat{x}(t)$. С учетом этого соотношение уравнение наблюдателя можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - K_e C)\hat{x}(t) + Bu(t) + K_e y(t) = (A - K_e C)\hat{x}(t) - BK \cdot \hat{x}(t) + K_e y(t) = \\ &= (A - K_e C)\hat{x}(t) - BK \cdot \hat{x}(t) + K_e y(t) = (A - K_e C - BK)\hat{x}(t) + K_e y(t).\end{aligned}$$

Следовательно, регулятор-наблюдатель описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - K_e C - BK)\hat{x}(t) + K_e y(t), \\ u(t) &= -K \cdot \hat{x}(t).\end{aligned}$$

Получим ПФ регулятора-наблюдателя. С этой целью запишем его уравнение состояния в операторной форме при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned}p\hat{X}(p) &= (A - K_e C - BK)\hat{X}(p) + K_e Y(p); \\ p\hat{X}(p) - (A - K_e C - BK)\hat{X}(p) &= K_e Y(p); \\ [pE - (A - K_e C - BK)]\hat{X}(p) &= K_e Y(p).\end{aligned}$$

Отсюда получаем выражение для $\hat{X}(p)$:

$$\hat{X}(p) = [pE - A + K_e C + BK]^{-1} K_e Y(p).$$

Подставляем это выражение в закон регулирования, записанный в операторной форме:

$$U(p) = -K \cdot \hat{X}(p) = -K \cdot [pE - A + K_e C + BK]^{-1} K_e Y(p).$$

Т.к. выходная величина подается со знаком минус, то ПФ регулятора-наблюдателя определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}G_{ec}(p) &= \frac{U(p)}{-Y(p)} = K \cdot [pE - A + K_e C + BK]^{-1} \cdot K_e = \\ &= K \cdot [pE - A_f + K_e C]^{-1} \cdot K_e.\end{aligned}$$

В данном случае система принимает вид, изображенный на рис.4.2, причем сумматор введен с целью инверсии знака сигнала на входе регулятора-наблюдателя.

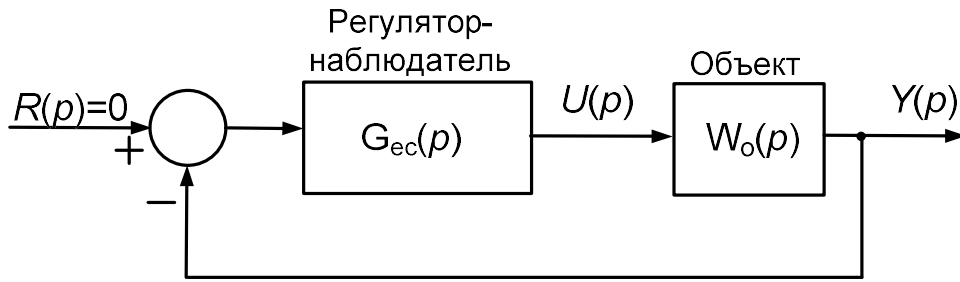


Рис. 4.2. Система с регулятором-наблюдателем

Пример 4.2. Рассмотрим систему, определенную уравнениями состояния и выхода

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [150 \ 0].$$

В результате синтеза с использованием полной обратной связью по состоянию получены следующие значения коэффициентов обратной связи:

$$K_1 = 50; \quad K_2 = 5.$$

В примере 4.1 показано, что эта система является наблюдаемой.

Итак, синтезирован *регулятор*, удовлетворяющий характеристическому уравнению

$$\alpha_{ae}(p) = p^2 + 10p + 50,$$

который обеспечивает постоянную времени $\tau=0,2$ с и коэффициент демпфирования $\xi=0,707$.

Теперь синтезируем *наблюдатель*, который обладал бы критическим демпфированием (корни вещественные и равные, $\xi=1$) с постоянной времени $\tau=0,1$ с, т.е. более быстроходный наблюдатель. Тогда $p_{1,2} = -10 \text{ с}^{-1}$, и характеристическое уравнение наблюдателя принимает вид:

$$\alpha_e(p) = (p+10)(p+10) = p^2 + 20p + 100.$$

Для нахождения матрицы $\mathbf{G}$ воспользуемся формулой Аккермана.

% Модель объекта

$\mathbf{A}=[0 \ 1; 0 \ -5]; \mathbf{B}=[0; 1]; \mathbf{C}=[150 \ 0]; \mathbf{D}=0;$

% SS и TF модели объекта

$\mathbf{S1}=\text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D});$

$\mathbf{Stf}=\text{tf}(\mathbf{S1});$

```

% Матрица наблюдаемости
Q=obsv(A,C);
disp('Матричный полином')
Alfa=A^2+20*A+100*eye(2)
disp('Матрица Ke наблюдателя')
Ke=Alfa*Q^-1*[0 1]'
>>G =    0.1000
        0.1667

```

Вычислим матрицу $\mathbf{K}_e$ с помощью команды `acker`:

```

A=[0 1;0 -5];B=[0;1];C=[150 0];D=0;
Pe=[-10 -10]
Gt=acker(A',C',Pe);
Ke=Gt'
>> G =    0.1000
        0.1667

```

В этой программе для вычисления коэффициентов наблюдателя используются команда `acker` и транспонированные матрицы, т.к.

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \Rightarrow \mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}.$$

Следовательно, в команде `acker` $\mathbf{A}^T$ заменяет $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}^T$ заменяет $\mathbf{B}$, а результатом является $\mathbf{K}_e^T$.

Таким образом, искомая матрица $\mathbf{G}$ имеет вид:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1667 \end{bmatrix}.$$

Теперь реализуем закон управления с помощью наблюдателя состояния. Для этого используем матрицу коэффициентов $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 50 & 5 \end{bmatrix}$, позволяющую разместить полюсы замкнутой системы в точках $p_{1,2} = -4 \pm j4$ с^{-1} , и матрицу коэффициентов наблюдателя $\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1667 \end{bmatrix}$.

Воспользуемся уравнением наблюдателя:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C} - \mathbf{BK}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_e y(t).$$

Проведем необходимые вычисления:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 25 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 50 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C} - \mathbf{B} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 50 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ -75 & -10 \end{bmatrix}.$$

В результате регулятор-наблюдатель описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ -75 & -10 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1667 \end{bmatrix} y(t); \\ u(t) &= [-K_1 \quad -K_2] \hat{\mathbf{x}}(t) = [-50 \quad -5] \hat{\mathbf{x}}(t). \end{aligned}$$

В этих уравнениях $y(t)$ есть *вход*, а $u(t)$ – *выход* наблюдателя. С учетом этого запишем матрицы наблюдателя:

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ -75 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1667 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_e = [-50 \quad -5], \quad \mathbf{D}_e = 0.$$

Выведем выражение для ПФ наблюдателя, используя формулу:

$$\mathbf{G}_{ec}(p) = \frac{-\mathbf{C}_e(p\mathbf{E}_e - \mathbf{A}_e)^+ \mathbf{B}_e + \mathbf{D}_e}{\det(p\mathbf{E}_e - \mathbf{A}_e)}.$$

Составим вначале матрицу $p\mathbf{E}_e - \mathbf{A}_e$:

$$p\mathbf{E}_e - \mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} p+15 & -1 \\ 75 & p+10 \end{bmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения полученной матрицы. Первая цифра индекса означает номер вычеркиваемой строки, вторая – номер вычеркиваемого столбца :

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= p+10; & \Delta_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot 75 = -75; \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1}(-1) = 1; & \Delta_{22} &= (-1)^{2+2}(p+15) = p+15. \end{aligned}$$

Для получения союзной матрицы нужно заменить каждый элемент матрицы $(p\mathbf{E}_e - \mathbf{A}_e)$ его алгебраическим дополнением, а затем полученную матрицу транспонировать. В результате получим:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+10 & 1 \\ -75 & p+15 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{C}_e(p\mathbf{E}_e - \mathbf{A}_e)^+ \mathbf{B}_e &= [50 \quad 5] \begin{bmatrix} p+10 & 1 \\ -75 & p+15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1667 \end{bmatrix} = \\
&= [50p+125 \quad 5p+125] \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1667 \end{bmatrix} = [5,834p + 33,34]
\end{aligned}$$

Определитель матрицы $(p\mathbf{E}_e - \mathbf{A}_e)$:

$$\det(p\mathbf{E}_e - \mathbf{A}_e) = \begin{vmatrix} p+10 & 1 \\ -75 & p+15 \end{vmatrix} = p^2 + 25p + 225$$

Передаточная функция с учетом отрицательной ОС:

$$G_{ec}(p) = -\frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{5,834p + 33,34}{p^2 + 25p + 225}$$

Найдем ПФ регулятора-наблюдателя в Matlab с помощью следующего фрагмента предыдущей программы:

```

% Матрицы модели регулятора-наблюдателя
K=[50 5]
AA=A-G*C-B*K;
BB=G;
CC=K;
DD=0;
% SS модель
Wss=ss(AA,BB,CC,DD);
% TF модель
Gec=tf(Wss)
>> Transfer function:
5.833 s + 33.33
-----
s^2 + 25 s + 225

```

Т.о., процесс синтеза регулятора-наблюдателя состоит из этапов:

- 1). Определение матрицы коэффициентов $\mathbf{K}$, удовлетворяющих заданному характеристическому уравнению системы $\alpha_{\text{э}}(p)$.
- 2). Синтез регулятора-наблюдателя, т.е. определение матрицы коэффициентов $\mathbf{K}_e$, удовлетворяющих заданному характеристическому уравнению наблюдателя $\alpha_e(p)$.

В результате получим структурную схему с единичной ОС, в которой регулятор-наблюдатель и объект соединены последовательно. Поэтому ПФ разомкнутой системы $W(p)$ равна произведению ПФ наблюдателя и объекта.

Найдем ПФ разомкнутой и замкнутой систем и запасы устойчивости, построим диаграмму Бode (рис.4.3) и построим ПХ (рис.4.4):

```
% ПФ разомкнутой системы
Wraz=Gec*Stf
% ПФ замкнутой системы
T=feedback(Wraz,1)
% Запасы устойчивости замкнутой системы
[gm,pm,wg,wp]=margin(Wraz)
gmdB=20*log10(gm)
figure(1)
bode(Wraz),grid
figure(2)
step(T),grid
>>Transfer function:
      875 s + 5000
-----
s^4 + 30 s^3 + 350 s^2 + 1125 s
>>Transfer function:
      875 s + 5000
-----
s^4 + 30 s^3 + 350 s^2 + 2000 s + 5000
>>gm = 5.8899 pm = 60.0900 wg = 14.467 wp = 4.1007
gmdB = 15.402
```

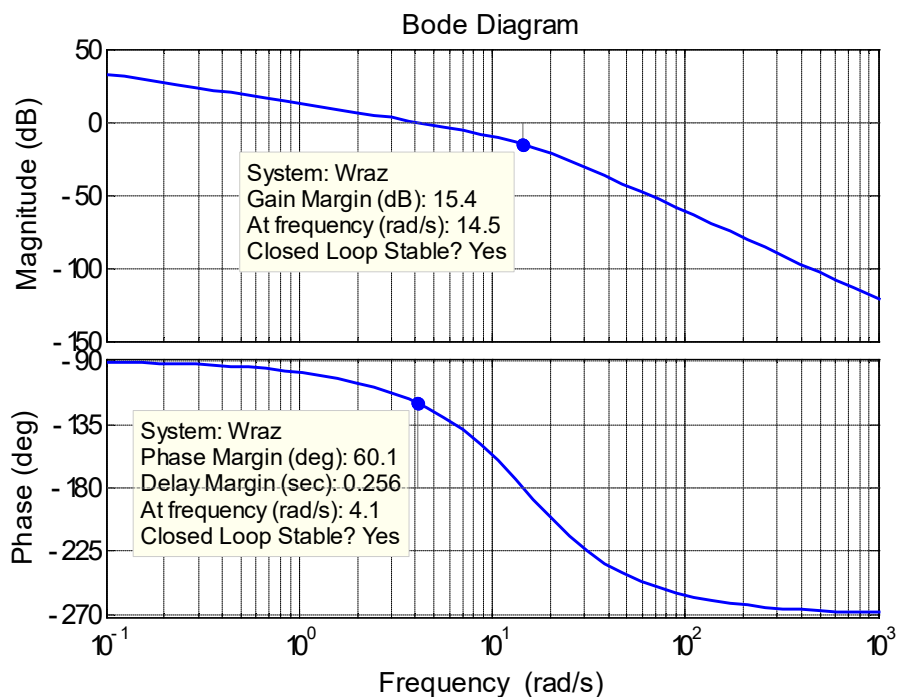


Рис. 4.3. Диаграмма Бode системы с регулятором-наблюдателем

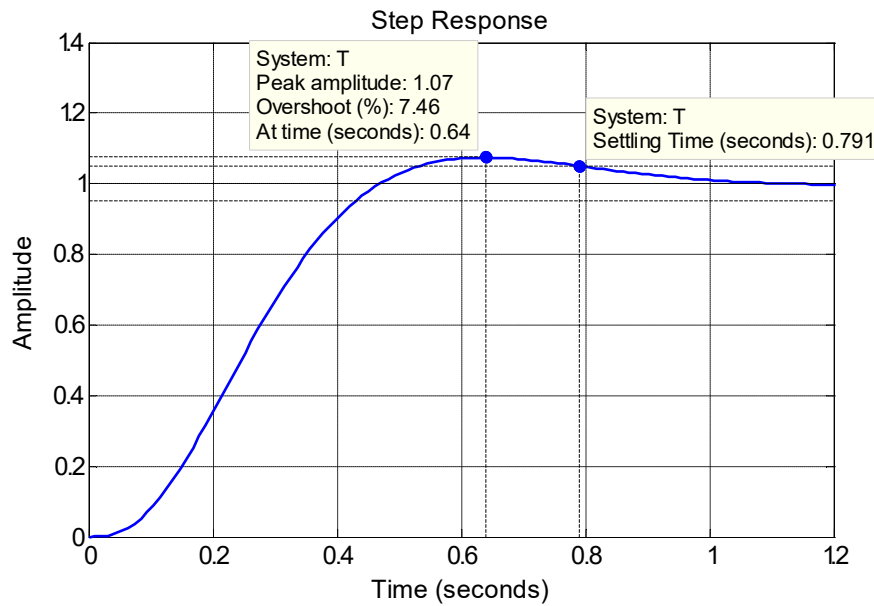


Рис. 4.4. Реакция системы на единичный скачок

В процессе оценивания переменных состояния возникает ошибка. Вектор ошибки записывается в виде:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

Можно показать, что уравнение состояния объекта и уравнение, описывающее изменение компонентов ошибки, можно записать в виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}e(t);$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}(t)$$

Если объединить переменные состояния объекта и компоненты вектора ошибки, то можно получить уравнения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}$$

Теперь можно найти реакцию системы на начальные условия и проследить, как изменяются переменные состояния и компоненты ошибки в переходном процессе, рис.4.5. Это процедуру сделаем в Matlab.

```
% Реакция на начальные условия
sys=ss([A-B*K B*K;zeros(2,2) A-Ke*C], ...
eye(4),eye(4),eye(4));
t=0:0.01:1.5;
z=initial(sys,[1;0;0.5;0],t);
x1=[1 0 0 0]*z';
x2=[0 1 0 0]*z';
x3=[0 0 1 0]*z';
x4=[0 0 0 1]*z';
```

```

subplot(2,2,1);plot(t,x1),grid
ylabel('x1')
title('Отклик на начальные условия')
subplot(2,2,2);plot(t,x2),grid
ylabel('x2')
title('Отклик на начальные условия')
subplot(2,2,3);plot(t,x3),grid
ylabel('x3')
subplot(2,2,4);plot(t,x4),grid
ylabel('x4')

```

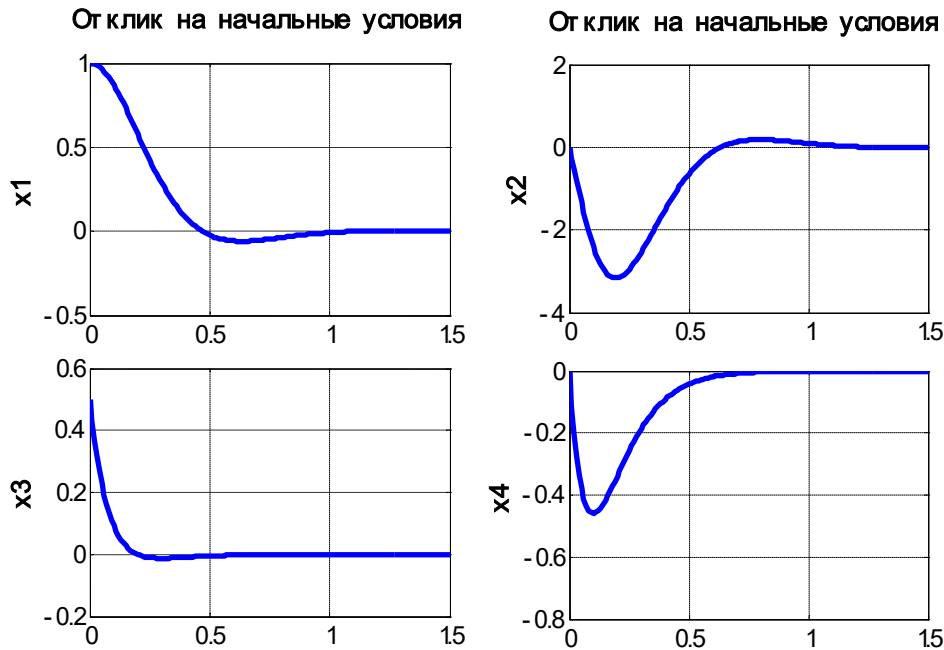


Рис. 4.5. Реакция системы на начальные условия

Во многих случаях некоторые из переменных состояния доступны для измерения и оценивать их нелогично. Поэтому целесообразно синтезировать наблюдатель, дающий оценку только тем переменным состояниям, которые не могут быть измерены. Подобное устройство называют *наблюдателем пониженного порядка*. Исключением может быть случай, когда измерение сопровождается большим шумом. Здесь полный наблюдатель может оказаться предпочтительным благодаря возможности фильтрации шума.

4.3. Задание

Для системы с модальным регулятором, разработанным в задании №3, определить ПФ наблюдателя полного порядка, который обладал бы критическим демпфированием (корни вещественные и равные, $\xi=1$) с постоянной времени вдвое меньшей, чем у модального регулятора, т.е. более быстроходный наблюдатель. Определить переходную характеристику системы с наблюдателем.

5. ПРАКТИКА 5. РАСЧЕТ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА ДИНАМИЧЕСКОЙ КОМПЕНСАЦИИ И УРАВНЕНИЙ СИНТЕЗА

В работе рассчитываются параметры регуляторов, построенных по принципу динамической компенсации (ДК) и с помощью уравнений синтеза (УС).

Теоретические сведения.

I. Метод ДК.

Использование принципа ДК предполагает подбор эталонной передаточной функции замкнутой системы $T^y(p)$, которая обеспечивает необходимые качества работы САУ в переходном и установившемся режимах. В системах с единичной обратной связью эталонная ПФ разомкнутой системы находится по формуле

$$W^y(p) = \frac{T^y(p)}{1 - T^y(p)}. \quad (5.1)$$

Теперь, полагая известной ПФ неизменяемой части $W_i(p)$ и эталонную ПФ замкнутой системы, нужно найти ПФ корректирующего устройства (регулятора) $W_{\dot{e}o}(p)$. Тогда имеет место зависимость

$$T^y(p) = \frac{W_{\dot{e}o}(p)W_i(p)}{1 + W_{\dot{e}o}(p)W_i(p)}.$$

Отсюда получаем выражение для ПФ регулятора:

$$W_{\dot{e}o}(p) = \frac{T^y(p)}{W_i(p)[1 - T^y(p)]} = \frac{W_i^{-1}(p)T^y(p)}{[1 - T^y(p)]} = W^y(p)W_i^{-1}(p). \quad (5.2)$$

Из формулы (4.2) следует, что ПФ корректирующего устройства состоит из двух частей. Первая часть – это эталонная ПФ разомкнутой системы; вторая же часть имеет ПФ, обратную ПФ объекта. За счет введения этого сомножителя компенсируются динамические свойства неизменяемой части. Поэтому этот способ синтеза называется *методом динамической компенсации*.

Пример 5.1.

Задан объект с передаточной функцией

$$W_i(p) = \frac{1}{p^3 + 1,5p^2 + 0,5p}.$$

Требуется определить передаточную функцию регулятора такую, чтобы обеспечить распределение полюсов замкнутой системы по Баттерворту с $\omega_0 = 1$.

Решение. Согласно методу динамической компенсации передаточная функция регулятора имеет вид:

$$W_{\dot{\epsilon}o}(p) = W^{\dot{y}}(p)W_i^{-1}(p)$$

где $W^{\dot{y}}(p)$ – эталонная передаточная функция разомкнутой системы, которая определяется через эталонную передаточную функцию $T^{\dot{y}}(p)$ замкнутой системы:

$$W^{\dot{y}}(p) = \frac{T^{\dot{y}}(p)}{1 - T^{\dot{y}}(p)}.$$

Передаточная функция $T^{\dot{y}}(p)$ имеет тот же порядок, что и объект, и обладает заданным распределением полюсов. Идеальный низкочастотный фильтр Баттерворта третьего порядка описывается передаточной функцией вида

$$T^{\dot{y}}(p) = \frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3}.$$

При $\omega_0 = 1$ получим:

$$T^{\dot{y}}(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

Эталонная передаточная функция разомкнутой системы:

$$W^{\dot{y}}(p) = \frac{T^{\dot{y}}(p)}{1 - T^{\dot{y}}(p)} = \frac{\frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}}{1 - \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p}.$$

Передаточная функция корректирующего устройства (регулятора):

$$W_{\dot{\epsilon}o}(p) = W^{\dot{y}}(p)W_i^{-1}(p) = \frac{p^3 + 1,5p^2 + 0,5p}{p^3 + 2p^2 + 2p} = \frac{p^2 + 1,5p + 0,5}{p^2 + 2p + 2}.$$

II. Метод УС.

Передаточная функция корректирующего устройства (регулятора), рассчитываемого с помощью уравнений синтеза, имеет такой же порядок, что и передаточная функция объекта, причем порядок числителя на еди-

ницу меньше порядка знаменателя. Например, для объекта второго порядка с ПФ

$$W_i(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

ПФ корректирующего устройства выбирается в виде:

$$W_{\dot{e}o}(p) = \frac{R(p)}{C(p)} = \frac{r_1 p + r_0}{p^2 + c_1 p + c_0}.$$

Тогда ПФ замкнутой системы запишется так:

$$T^y(p) = \frac{W_{\dot{e}o}(p)W_i(p)}{1 + W_{\dot{e}o}(p)W_i(p)} = \frac{R(p)B(p)}{C(p)A(p) + R(p)B(p)} = \frac{E(p)}{D(p)}. \quad (5.3)$$

Здесь

$$D(p) = C(p)A(p) + R(p)B(p). \quad (5.4)$$

Полиномы $B(p)$ и $A(p)$ известны, они определяют динамические свойства неизменяемой части; полином же $D(p)$ выбирается так, чтобы были реализованы необходимые динамические свойства замкнутой системы. Поэтому уравнение (5.4) называется уравнением синтеза, поскольку оно позволяет найти неизвестные коэффициенты $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ полиномов числителя и знаменателя ПФ корректирующего устройства. При практической реализации метода УС полином $D(p)$ можно выбрать по методу стандартных функций.

Полином $D(p)$ является характеристическим уравнением замкнутой системы, а расположение его корней $p_1, p_2, \dots, p_{2n}$ в левой полуплоскости комплексной плоскости определяет параметры переходного процесса:

- быстродействие (время переходного процесса);
- колебательность (число колебаний и их частоту);
- перерегулирование σ % и др.

Корни $D(p)$ определяют элементарные колебания, сумма которых представляет собой переходную характеристику. Однако амплитуда элементарных колебаний определяется не только полиномом числителя ПФ замкнутой системы $D(p)$, но и полиномом числителя $E(p)$. Поэтому после синтеза замкнутой системы необходимо обязательно анализировать ее динамические свойства.

Найдем характеристический полином для объекта второго порядка:

$$D(p) = C(p)A(p) + R(p)B(p) = (p^2 + c_1 p + c_0)(p^2 + a_1 p + a_0) +$$

$$\begin{aligned}
& + (r_1 p + r_0)(b_1 p + b_0) = p^4 + (a_1 + c_1)p^3 + (a_0 + c_0 + a_1 c_1 + b_1 r_1)p^2 + \\
& + (a_0 c_1 + a_1 c_0 + b_0 r_1 + b_1 r_0)p + a_0 c_0 + b_0 c_0 = \\
& = p^4 + d_3 p^3 + d_2 p^2 + d_1 p + d_0.
\end{aligned}$$

В этом случае определению подлежат четыре неизвестных коэффициента (r_0, r_1, c_0, c_1) .

В общем случае синтезированная система будет иметь статическую ошибку. Для устранения ошибки можно включить в прямую цепь интегратор. Тогда ПФ неизменяемой части будет иметь вид:

$$W_i(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{p(p^2 + a_1 p + a_0)} = \frac{b_1 p + b_0}{p^3 + a_1 p^2 + a_0 p}.$$

В результате этого степени полиномов числителя и знаменателя корректирующего устройства повысятся на единицу

$$W_{\dot{e}o}(p) = \frac{R(p)}{C(p)} = \frac{r_2 p^2 + r_1 p + r_0}{p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0},$$

а характеристический полином примет вид:

$$D(p) = p^6 + d_5 p^5 + d_4 p^4 + d_3 p^3 + d_2 p^2 + d_1 p + d_0.$$

Теперь при синтезе системы предстоит рассчитать шесть коэффициентов. Коэффициенты характеристического полинома в этом случае принимают следующие выражения:

$$\begin{aligned}
d_5 &= a_1 + c_2; \quad d_4 = a_0 + a_1 c_2 + c_1; \quad d_3 = a_0 c_2 + a_1 c_1 + c_0 + b_1 r_2; \\
d_2 &= a_0 c_1 + a_1 c_0 + b_0 r_2 + b_1 r_1; \quad d_1 = a_0 c_0 + b_0 r_1 + b_1 r_0; \quad d_0 = b_0 r_0.
\end{aligned}$$

Пример 5.2. Расчет регулятора с помощью уравнений синтеза

Задан объект с передаточной функцией

$$W_i(p) = \frac{1}{p^3 + 1,5 p^2 + 0,5 p} = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

Передаточная функция КУ, рассчитываемого с помощью уравнений синтеза, имеет такой же порядок, как и передаточная функция объекта, причем порядок числителя на единицу меньше порядка знаменателя:

$$W_{\dot{e}o}(p) = \frac{R(p)}{C(p)} = \frac{r_2 p^2 + r_1 p + r_0}{p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}.$$

Необходимо найти такие коэффициенты $r_0, r_1, r_2, c_0, c_1, c_2$, чтобы обеспечить заданное распределение корней характеристического полинома замкнутой системы.

Характеристический полином замкнутой системы:

$$D(p) = C(p)A(p) + R(p)B(p) = (p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0)(p^3 + 1,5 p^2 + 0,5 p) + (r_2 p^2 + r_1 p + r_0) \cdot 1 = p^6 + (1,5 + c_2)p^5 + (0,5 + 1,5c_2 + c_1)p^4 + (0,5c_2 + 1,5c_1 + c_0)p^3 + (0,5c_1 + 1,5c_0 + r_2)p^2 + (0,5c_0 + r_1)p + r_0.$$

Эталонный полином шестого порядка с распределением корней по Баттерворту имеет вид:

$$D_A(p) = p^6 + 3,86 \omega_0 p^5 + 7,46 \omega_0^2 p^4 + 9,14 \omega_0^3 p^3 + 7,46 \omega_0^4 p^2 + 3,86 \omega_0^5 p + \omega_0^6.$$

Сравнив полиномы $D(p)$ и $D_B(p)$, найдем коэффициенты регулятора при $\omega_0 = 1$:

$$c_2 = 3,86 \omega_0 - 1,5 = 2,36 ; c_1 = 7,46 \omega_0^2 - 1,5c_2 - 0,5 = 3,42 ;$$

$$c_0 = 9,14 \omega_0^3 - 1,5c_1 - 0,5c_2 = 2,83 ; r_2 = 7,46 \omega_0^4 - 0,5c_1 - 1,5c_0 = 1,51 ;$$

$$r_1 = 3,86 \omega_0^5 - 0,5c_0 = 2,45 ; r_0 = \omega_0^6 = 1 .$$

ПФ корректирующего устройства:

$$W_{\text{до}}(p) = \frac{r_2 p^2 + r_1 p + r_0}{p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0} = \frac{1,51 p^2 + 2,45 p + 1}{p^3 + 2,36 p^2 + 3,42 p + 2,83} = \frac{R(p)}{C(p)}.$$

ПФ замкнутой системы:

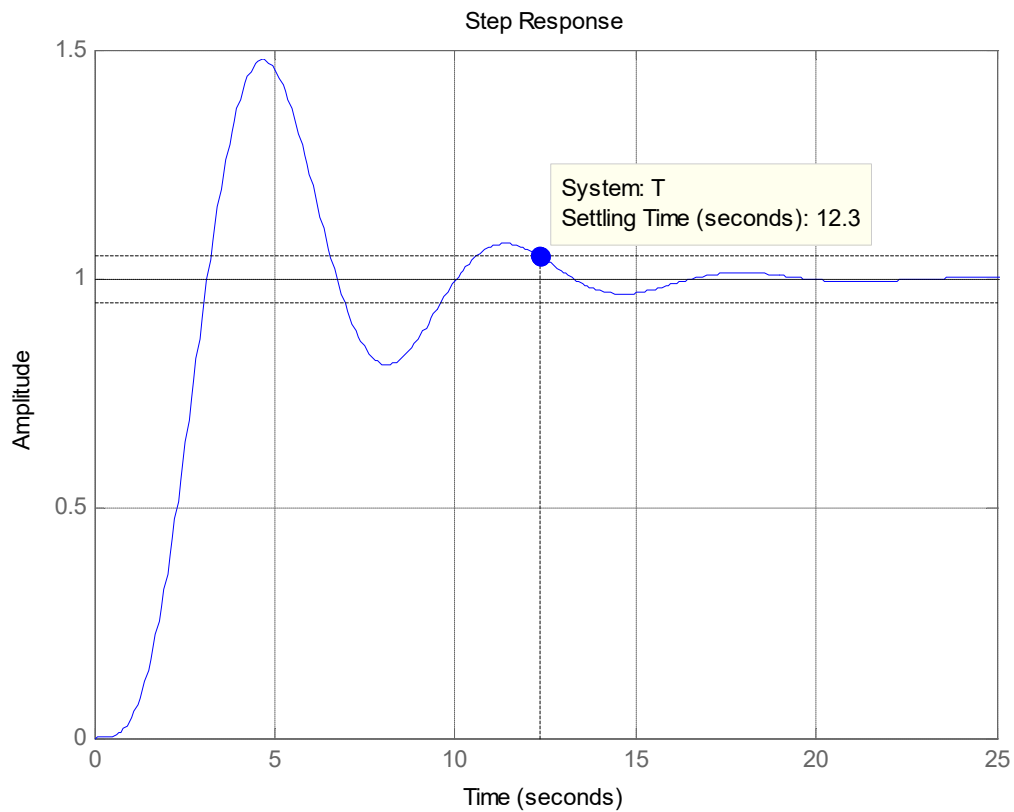
$$T(p) = \frac{R(p)B(p)}{D(p)} = \frac{E(p)}{D(p)} = \frac{1,51 p^2 + 2,45 p + 1}{p^6 + 3,86 p^5 + 7,46 p^4 + 9,14 p^3 + 7,46 p^2 + 3,86 p + 1} =$$

Найдет ПХ замкнутой системы

```
num=[1.51 2.45 1];
```

```
den=[1 3.86 7.46 9.14 7.46 3.86 1];
```

```
T=tf(num,den);step(T),grid
```



5.1. Задание

Требуется определить передаточную функцию регулятора такую, чтобы обеспечить распределение полюсов замкнутой системы по Баттерворту с $\omega_0 = 2$. Исходные данные приведены в задании №1. Воспользоваться методами динамической компенсации уравнений синтеза.

6. ПРАКТИКА 6. ПИД-РЕГУЛЯТОРЫ И МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ПИД-РЕГУЛЯТОРЫ

6.1. Классификация промышленных регуляторов.

Как видно из типичной структуры промышленной замкнутой СУ, приведенной на рис.6.1, даже простые системы содержат более четырех инженерных компонентов.

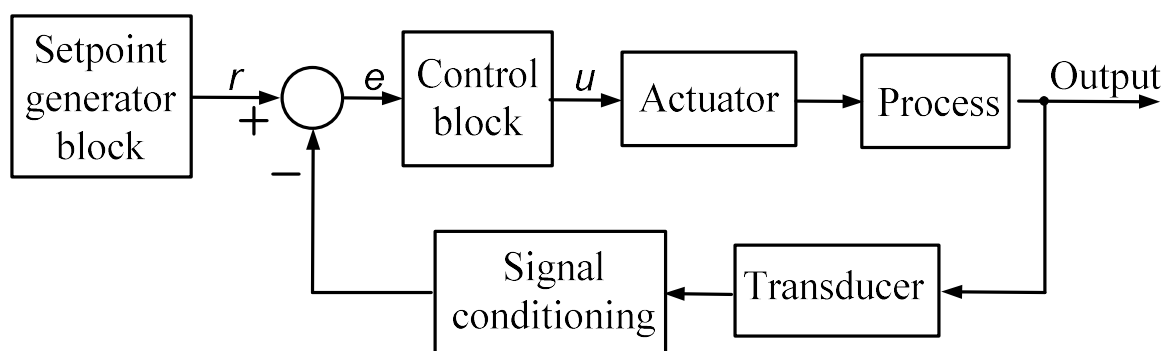


Рис. 6.1. Типичная структурная схема промышленной САУ

Основные компоненты могут быть сгруппированы по следующим операциям цикла.

Объект или процесс (*process*): реальная система, некоторые физические переменные которой подлежат управлению или контролю. Типичными примерами промышленных объектов являются котлы, печи, топки и дистилляционные башни.

Исполнительный механизм (*actuator*) – это блок для подачи на вход объекта или технологического процесса материала или энергии; может действовать как усилитель. Например, управляющий сигнал может быть небольшим движением штока клапана, контролирующего большой поток природного газа в топку промышленного котла.

Блок измерений. Известное изречение гласит, что без измерения нет управления. Обычно блок измерений включает в себя датчик (*transducer*) и сопутствующие компоненты обработки сигнала для его согласования (*signal conditioning*). Датчик должен содержать сенсор для обнаружения конкретного физического параметра (таких, как температура, скорость, уровень, давление и т.д.) и выводить этот параметр в виде другого физического параметра (такого, как напряжение). Вполне возможно, что измеренный выходной сигнал будет содержать шумы (вредные сигналы), и некоторым из этих шумов удастся пройти через блок формирования сигнала измерительного устройства в контуре управления.

Управление: блок управления или регулятор (*controller*) – это устройство, спроектированное для создания устойчивой системы с обратной

связью, а также для достижения некоторых заранее определенных динамических и статических показателей системы. На вход регулятора, как правило, поступает сигнал ошибки, полученный на основе разности между заданной уставкой (setpoint) или опорным сигналом (reference signal), создаваемым соответствующим блоком, и измеренным реальным выходом.

Использование стандартной блок-схемы позволяет сформулировать требуемые рабочие характеристики САУ.

1. Выбор регулятора для замкнутой системы для обеспечения ее устойчивости.

2. Обработка задающих воздействий (*reference or setpoint signal*).

3. Если в системе имеются возмущения, оказывающие влияние на выходную переменную, регулятор должен свести это влияние к минимуму.

4. Регулятор должен обладать свойством подавления шумов, связанных с процессом измерения.

5. Регулятор должен обладать определенной степенью робастности в условиях некоторой неопределенности характеристик объекта управления.

Указанные выше факторы, а именно: шум датчика, непредсказуемые возмущения, объект управления с неучтенной динамикой или параметрами, подверженными изменению, могут быть весьма значительными. Поэтому проблема выбора регулятора заключается в том, чтобы синтезируемая система сохраняла желаемое качество.

Большинство промышленных регуляторов в соответствии с их функциональным действием могут быть классифицированы следующим образом:

Двухпозиционные или on-off контроллеры.

Пропорциональные контроллеры.

Интегральные контроллеры.

Пропорциональные-плюс-интегральные контроллеры.

Пропорциональные-плюс-дифференциальные контроллеры.

Пропорциональные-плюс-интегральные-плюс-дифференциальные контроллеры.

Двухпозиционное или on-off управляющее действие. В двухпозиционной системе управления исполнительный элемент имеет только два фиксированных положения, которые, во многих случаях, соответствуют

состояниям «включено» или «выключено». Сигнал на выходе регулятора является постоянным и либо максимальным, либо минимальным в зависимости от того, какой знак имеет сигнал ошибки, т.е.

$$U(t) = U_1 \text{ для } e(t) > 0$$

или

$$U(t) = U_2 \text{ для } e(t) < 0.$$

Минимальное значение U_2 обычно равно нулю или $-U_1$.

Двухпозиционные регуляторы – это обычно электрические приборы с соленоидным клапаном. Пневматические пропорциональные регуляторы с очень высоким коэффициентом усиления действуют как двухпозиционные регуляторы и иногда называются пневматическими двухпозиционными регуляторами.

На рис.6.2 изображена блок-диаграмма двухпозиционного регулятора.

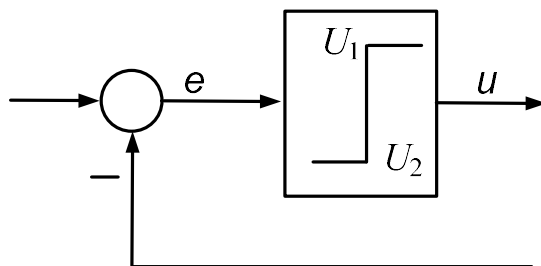


Рис. 6.2. Блок-диаграмма двухпозиционного регулятора

Анализ замкнутых систем управления (систем с обратной связью) показывает, что с помощью подбора общего коэффициента усиления регулятора можно обеспечить допустимые значения статических и динамических ошибок и получить хорошие переходные процессы. Однако часто бывает так, что достигнуть этого не удастся, так как большие значения коэффициента усиления могут не только ухудшить колебательные процессы, но и сделать систему неустойчивой, в чем мы убедились, изучая метод корневого годографа. В этом случае прибегают к изменению структуры САУ путем введения в ее состав специальных корректирующих устройств. Одним их эффективных и часто применяемых средств является введение производной в закон регулирования.

Итак, *регулятор – это динамическая система, целенаправленно вводимая в контур, чтобы придать замкнутой системе желаемые свойства. Входной величиной регулятора является сигнал ошибки или рассогласования, выходной – сигнал управления (рис.6.3).*



Рис. 6.3. Изображение регулятора на схемах САР

Зависимость между входной и выходной величинами регулятора называется *законом регулирования* (управления). Простейший закон регулирования – пропорциональный:

$$u(t) = K_{\delta} \varepsilon(t).$$

Введение производной в закон регулирования.

Для улучшения динамических свойств САР (для подавления колебаний и ускорения затухания переходных процессов) в закон регулирования вводят еще и производную от отклонения регулируемой величины. В этом случае регулирующее воздействие на объект пропорционально не только сигналу ошибки, но и производной от этой ошибки. В результате возникает пропорционально-дифференциальный (ПД) закон регулирования:

$$u(t) = K_{\delta} \left[\varepsilon(t) + K \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right] = K_{\delta} \varepsilon(t) + K_{\delta} K \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = K_{\delta} \varepsilon(t) + K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}.$$

Здесь K_p – коэффициент пропорциональности, K_d – коэффициент в канале дифференцирования.

Преобразование Лапласа полученного пропорционально-дифференциального закона регулирования позволяет получить передаточную функцию ПД-регулятора:

$$U(p) = K_{\delta} E(p) + K_d p E(p) = (K_{\delta} + K_d p) E(p);$$

$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_{\delta} + K_d p.$$

Наличие производной в законе регулирования форсирует действие регулятора на участке возрастания отклонения регулируемой величины. ПД-закон регулирования показывает, что регулятор реагирует не только на значение регулируемой величины в данный момент, но и на то, будет ли отклонение в последующие моменты времени убывать или возрасти и с какой быстротой. Поэтому говорят, что ПД-регулятор работает как бы *с опережением* (с *предварением*), улучшая качество процесса регулирования за счет учета тенденции последующего развития процесса.

Итак, если производная вводится в закон регулирования, то ее надо вводить обязательно вместе с самим отклонением.

Часто используется так называемая стандартная форма ПД-регулятора с передаточной функцией

$$C(p) = K_{\delta} \left(1 + \frac{K_d}{K_{\delta}} p \right) = K_{\delta} (1 + T_d p),$$

где T_d – постоянная времени дифференцирования.

Недостаток операции дифференцирования состоит в том, что идеальное дифференцирование имеет очень высокий коэффициент усиления для высокочастотных сигналов.

Пример 6.1. Использование лифтов в зданиях-небоскребах ограничено высотой 800 м, т.к. в противном случае тросы становятся слишком толстыми и тяжелыми. Решение состоит в переходе на линейный привод, аналогичный тому, который применяется в транспортных средствах с магнитной подвеской. Один из проектов предусматривает использование синхронного привода, обеспечивающего движение пассажирской кабины вдоль направляющей по оси шахты. Если пренебречь трением в таком приводе, то ПФ лифта и линейного привода можно записать в виде:

$$P_L(p) = \frac{1}{p^2}.$$

ПФ замкнутой системы с единичной ОС и пропорциональным регулятором K_p имеет мнимые корни, и система совершает незатухающие колебания.

Требуется спроектировать ПД регулятор, используя возможности программы Matlab.

Решение. Запишем следующую программу

```
clc
% ПФ лифта и линейного привода
Pl=tf(1,[1 0 0]);
%ПФ ПД регулятора
C=pidtune(Pl,'pd')
%ПФ разомкнутой системы с регулятором
W=C*Pl
%ПФ замкнутой системы с регулятором
T=feedback(W,1)
%Пх замкнутой системы с регулятором
figure(1)
step(T),grid
%Показатели качества САУ
S=stepinfo(T)
>>
```

Continuous-time PD controller in parallel form:

$K_p + K_d \cdot s$

With $K_p = 0.5$, $K_d = 0.866$

Transfer function:

$0.866 s + 0.5$

s^2

Transfer function:

$0.866 s + 0.5$

$s^2 + 0.866 s + 0.5$

S = SettlingTime: 9.4296

Overshoot: 24.3539

Peak: 1.2435

PeakTime: 3.2710

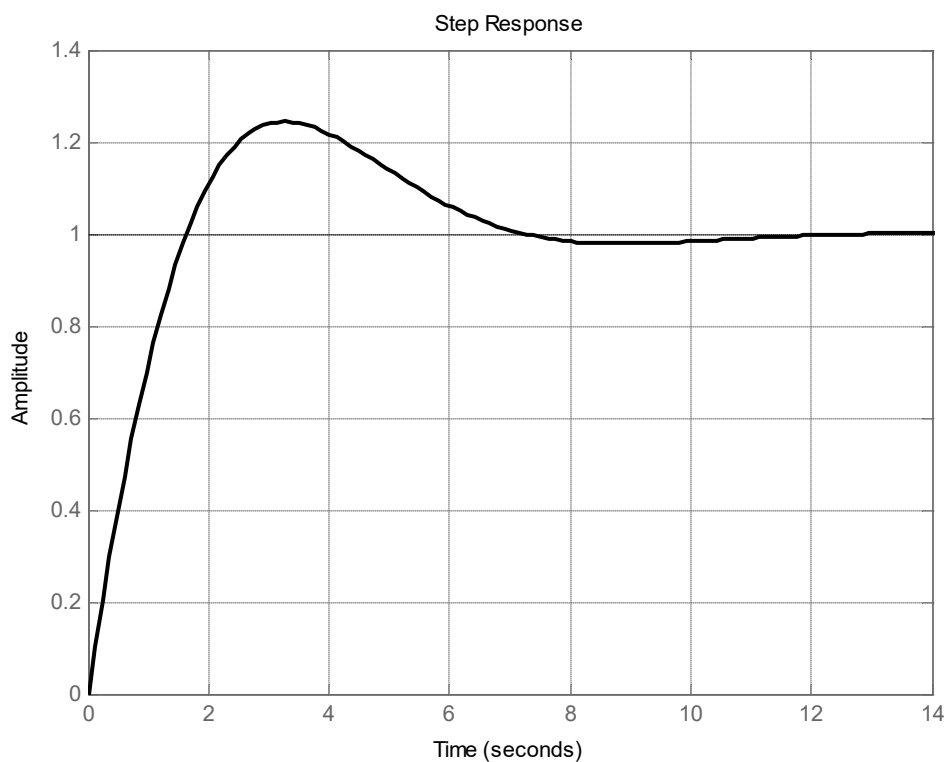


Рис. 6.4. ПХ системы с ПД регулятором

Введение интеграла в закон регулирования.

Введение интеграла в закон регулирования позволяет получить астатическую САУ или САР, т.е. систему, не обладающую по принципу своего действия статической ошибкой. Наличие нулевого полюса ПФ разомкнутой системы приводит к тому, что числитель и свободный член полинома знаменателя ПФ замкнутой системы одинаковы, а это означает отсутствие статической ошибки.

Пример 6.2. Модель гоночного автомобиля задается в виде ПФ:

$$W_A(p) = \frac{50}{(p+2)(p+5)} = \frac{50}{p^2 + 7p + 10}.$$

В системе управления с единичной обратной связью ПФ замкнутой системы равна

$$T(p) = \frac{W_A(p)}{1 + W_A(p)} = \frac{\frac{50}{p^2 + 7p + 10}}{1 + \frac{50}{p^2 + 7p + 10}} = \frac{50}{p^2 + 7p + 60}.$$

Порядок астатизма системы $N = 0$, установившаяся ошибка постоянна и определяется выражением:

$$e_g = \frac{1}{1 + \lim_{p \rightarrow 0} W_A(p)} = \frac{1}{1 + K_{\text{дàç}}} = \frac{1}{1 + \frac{50}{10}} = \frac{1}{6},$$

где $K_{\text{раз}}$ – коэффициент передачи разомкнутой системы.

Теперь введем интегрирующее звено с ПФ $W_I(p) = \frac{1}{p}$. Тогда ПФ разомкнутой и замкнутой систем примут следующий вид:

$$W_O(p) = \frac{50}{p^3 + 7p^2 + 10p}; \quad T(p) = \frac{W_O(p)}{1 + W_O(p)} = \frac{50}{p^3 + 7p^2 + 10p + 50}.$$

Применение теоремы о конечном значении оригинала при подаче на вход единичного скачка дает установившееся значение выходной величины, равное единице: статистическая ошибка системы равна нулю. Однако анализ ПХ показывает, что перерегулирование достаточно велико. Поставив корневой годограф, подберем такой коэффициент усиления пропорционального регулятора, чтобы $\sigma < 10\%$:

```
Wo=tf(50,[1 7 10 0]);
figure(1)
rlocus(Wo)
T1=feedback(1*Wo,1)
T2=feedback(0.18*Wo,1)
disp('Gain=1')
stepinfo(T1)
disp('Gain=0.18')
stepinfo(T2)
Gain=1
ans = SettlingTime: 20.8171
      Overshoot: 74.4886
```

```
Gain=0.18
ans = SettlingTime: 4.8226
      Overshoot: 9.4360
```

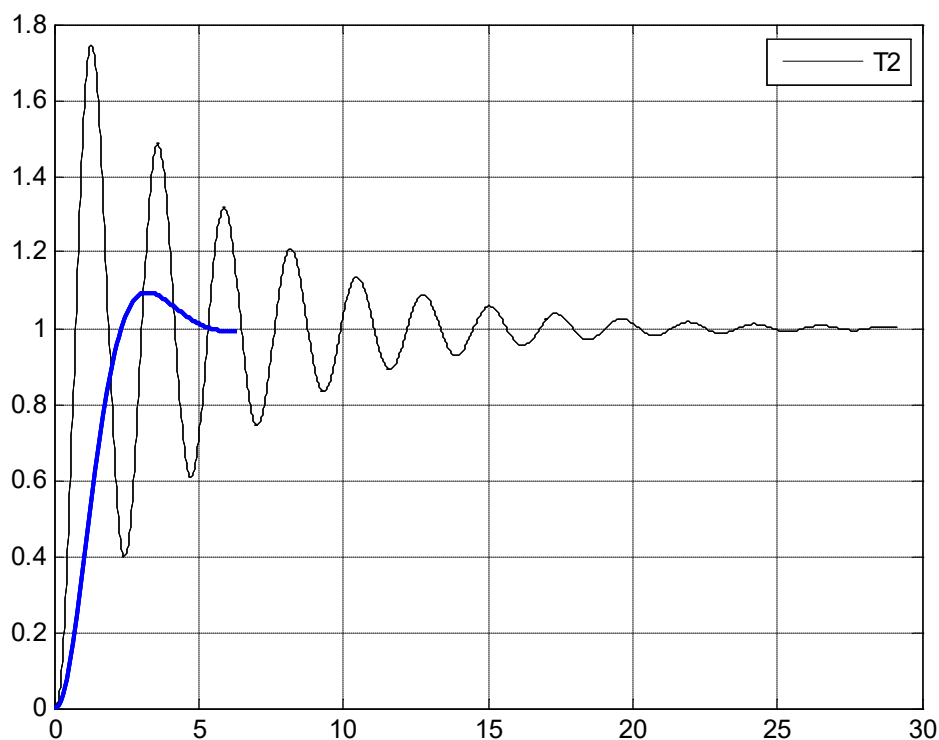


Рис. 6.5. ПХ системы с параллельным ПИД регулятором

В отличие от статического $e(t) = K_p \cdot e(t)$ при *астатическом* законе регулирования не сама выходная величина регулятора, а ее скорость пропорциональна отклонению регулируемой величины, т.е.

$$\frac{du(t)}{dt} = K_I \cdot e(t),$$

Поэтому астатический закон регулирования часто называют *скоростным*, статический – *позиционным*.

В общих обозначениях статический закон регулирования записывается в виде:

$$u(t) = K_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau.$$

Поэтому говорят, что в *астатической системе* происходит *регулирование по интегралу от отклонения регулируемой величины*, в то время как в статической системе – просто по отклонению регулируемой величины.

Введение интегратора в разомкнутый контур увеличивает порядок замкнутой системы, поэтому можно ожидать ухудшения динамических свойств полученной астатической системы.

Для улучшения динамических свойств системы, т.е. для уменьшения колебательности и убыстрения затухания переходных процессов к регулированию по интегралу от отклонения добавляется регулирование по отклонению от регулируемой величины:

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau.$$

В результате получается пропорционально-интегральный закон регулирования и ПИ- регулятор (*изодромное звено*).

Переход к уравнению для изображений

$$U(p) = K_p E(p) + K_I \cdot \frac{E(p)}{p} = \left(K_p + \frac{K_I}{p} \right) E(p)$$

позволяет записать передаточную функцию ПИ-регулятора:

$$C_{\text{ПЭ}}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p + \frac{K_I}{p}.$$

Отметим, что значение интеграла в любой момент времени t есть площадь под кривой изменения отклонения регулируемой величины. Поэтому интеграл накапливается медленно и сказывается главным образом в конце переходного процесса, в то время как в начале процесса главную роль играет сигнал, пропорциональный самому отклонению регулируемой величины. Т.о., в ПИ-регуляторе осуществляется объединение свойств статического регулятора (в начале переходного процесса) и астатического (в конце).

Рассмотренный способ получения астатической системы путем введения интеграла в закон регулирования обладает одним важным недостатком – уменьшение запасов устойчивости. Предлагается студентам обосновать наличие этого недостатка с помощью КУ найквиста. Определим запасы устойчивости по амплитуде (в децибелах) и фазе (в градусах) двух систем – без регулятора и с регулятором, используя команду `margin`:

```
W=tf(50,[1 7 10]);
Wo=tf(50,[1 7 10 0]);
[Gm,Pm] = margin(W)
[Gmo,Pmo] = margin(Wo)
>>Gm = Inf
    Pm = 57.8720
    Gmo = 1.4000
```

$$P_{mo} = 9.0065$$

Результат показывает, что запасы устойчивости значительно уменьшились после введения в систему интегратора. Для устранения этого недостатка нужно использовать ПИ-регулятор. Спроектируем этот регулятор средствами Matlab.

```
%ПФ автомобиля
Wcar=tf(50,[1 7 10]);
%ПФ ПИ регулятора
C_pi=pidtune(Wcar,'pi')
%ПФ разомкнутой системы с ПИ регулятором
Wrз=Wcar*C_pi;
%Запасы устойчивости
[Gm,Pm] = margin(Wrз)
%ПФ замкнутой системы с ПИ регулятором
T=feedback(Wrз,1);
%ПХ замкнутой системы
figure
step(T),grid
Si=stepinfo(T)
>> Gm = Inf
    Pm = 60
Si = SettlingTime: 1.2868
    Overshoot: 8.4048
    Peak: 1.0840
    PeakTime: 0.8797
```

На этом примере мы убеждаемся в том, что для улучшения динамических свойств системы к регулированию по интегралу от отклонения нужно добавлять регулирование по отклонению от регулируемой величины.

Теперь рассмотрим ПИД регулятор и некоторые его модификации. Этот вид регулятора наиболее часто применяется в замкнутых системах управления в промышленности.

Параллельный ПИД регулятор.

Семейство ПИД регуляторов состоит из различных комбинаций пропорциональной, интегральной и дифференциальной частей. Наличие всех составляющих позволяет удовлетворять различные специфические требования к системе управления. Формула для базисного параллельного ПИД регулятора имеет вид:

$$U(p) = \left(K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p \right) E(p) = K_p E(p) + K_i \frac{E(p)}{p} + K_d p E(p).$$

Такая форма регулятора имеет три независимых пути, как показано на рис.6.6.

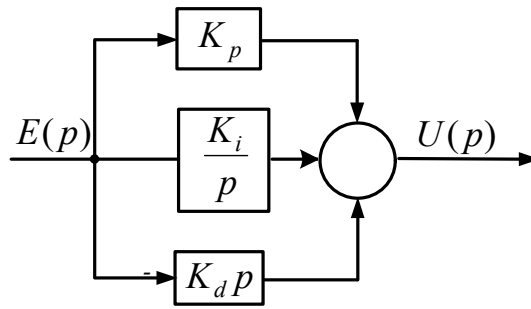


Рис. 6.6. Параллельная структура ПИД регулятора

Изменение любого коэффициента изменяет только величину вклада этого коэффициента в закон регулирования. Такая форма называется регулятором с независимыми настройками и является скорее учебной, чем та, что используется в промышленности.

Запишем также передаточную функцию и закон регулирования параллельного ПИД регулятора:

$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p$$

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}.$$

В реальных ПИД регуляторах вместо чистого дифференцирующего слагаемого $K_d p$ используется составляющая

$$\frac{K_d p}{T_f p + 1} = \frac{1}{T_f p + 1} \cdot K_d p = C_f(p) \cdot K_d p,$$

где $C_f(p)$ представляет собой ПФ фильтра, а его постоянная времени T_f может принимать значения, значительно меньшие единицы, и используемая для улучшения свойств регулятора при наличии возмущений и высокочастотных шумов измерения выходного сигнала (для подачи его на элемент сравнения).

В этом случае ПФ параллельного регулятора с фильтром запишется в виде:

$$C_{par}(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + \frac{K_d p}{T_f p + 1}.$$

На основании ПФ можно составить схему моделирования этого регулятора (рис.6.7):

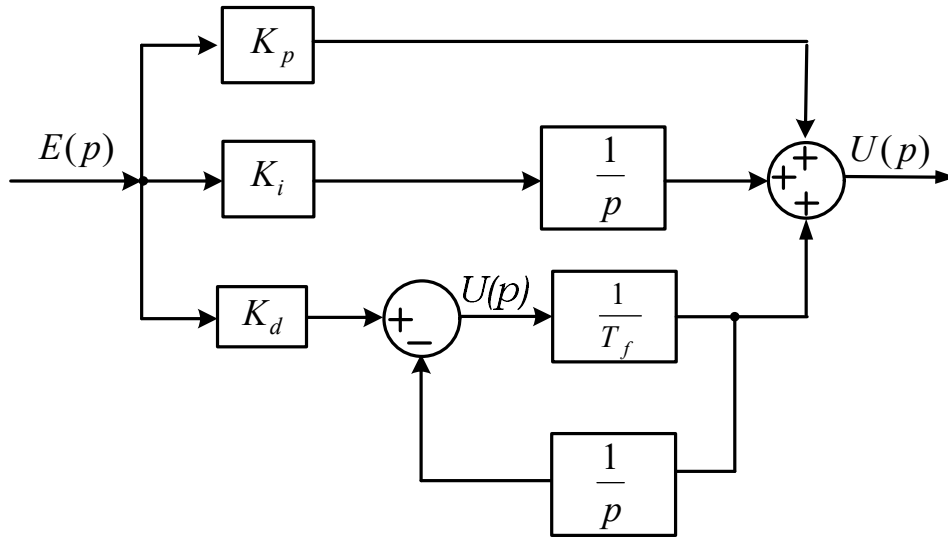


Рис. 6.7. Архитектура параллельного ПИД регулятора с фильтром
Проверим ПФ дифференцирующей части регулятора:

$$C_{df}(p) = K_d \left(\frac{\frac{1}{T_f}}{1 + \frac{1}{T_f} \cdot \frac{1}{p}} \right) = K_d \left(\frac{\frac{1}{T_f} T_f p}{T_f p + 1} \right) = K_d \left(\frac{p}{T_f p + 1} \right) = \frac{K_d p}{T_f p + 1}.$$

Стандартный ПИД регулятор.

В параллельной форме ПИД регулятора три коэффициента усиления используются в несвязанных ветвях регулятора. Однако в промышленности часто используется форма с зависимыми настройками, содержащая постоянные времени. Эти постоянные времени легко находятся с помощью коэффициентов параллельной формы. С этой целью вынесем за скобки коэффициент пропорциональной части регулятора:

$$U(p) = \left(K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p \right) E(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{p \frac{K_p}{K_i}} + \frac{K_d}{K_p} p \right) E(p).$$

Введем следующие обозначения:

$$T_i = \frac{K_p}{K_i} \text{ и } T_d = \frac{K_d}{K_p}.$$

В результате получим:

$$U(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{p T_i} + T_d p \right) E(p).$$

Блок-схему стандартного регулятора можно изобразить в виде, представленном на рис.6.8:

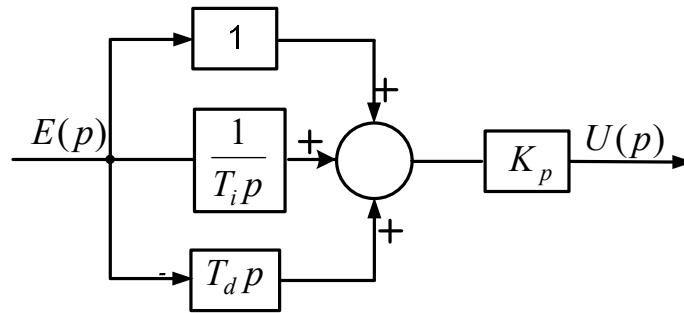


Рис. 6.8. Параллельная архитектура стандартного ПИД-регулятора

Постоянные времени T_i и T_d известны как время интегрирования (восстановления) и время дифференцирования соответственно.

Эта форма показывает, что изменение коэффициента K_p непосредственно воздействует на величину всех постоянных времени. Поэтому этот эффект важно учитывать при настройке регулятора в форме с постоянными времени.

Если мы захотим исключить из регулятора параллельной формы операцию интегрирования сигнала ошибки, то этого легко добиться устремляя K_i к нулю: $K_i \rightarrow 0$. Однако в стандартной форме для исключения этой операции нужно соответствующую постоянную времени сделать чрезмерно большой, т.е. рассмотреть операцию $T_i \rightarrow \infty$. А это может быть не очень полезно при аналитическом анализе или в процедуре настройки реального регулятора в процессе работы.

Запишем также передаточную функцию и закон регулирования ПИД регулятора в стандартной форме:

$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \left(1 + \frac{1}{pT_i} + T_d p \right);$$

$$u(t) = K_\delta \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right].$$

В реальных ПИД регуляторах вместо чистого дифференцирующего слагаемого $T_d p$ используется составляющая

$$\frac{T_d p}{\frac{T_d}{N} p + 1} = \frac{1}{\frac{T_d}{N} p + 1} \cdot T_d p = C_f(p) \cdot T_d p,$$

где N может принимать значение в несколько десятков, а $C_f(p)$ представляет собой ПФ фильтра, используемая для улучшения свойств регулятора при наличии возмущений и высокочастотных шумов измерения.

В этом случае ПФ стандартного регулятора с фильтром запишется в виде:

$$C_{stf}(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{\frac{T_d}{N} p + 1} \right).$$

На основании ПФ можно составить схему моделирования этого регулятора (рис.6.9):

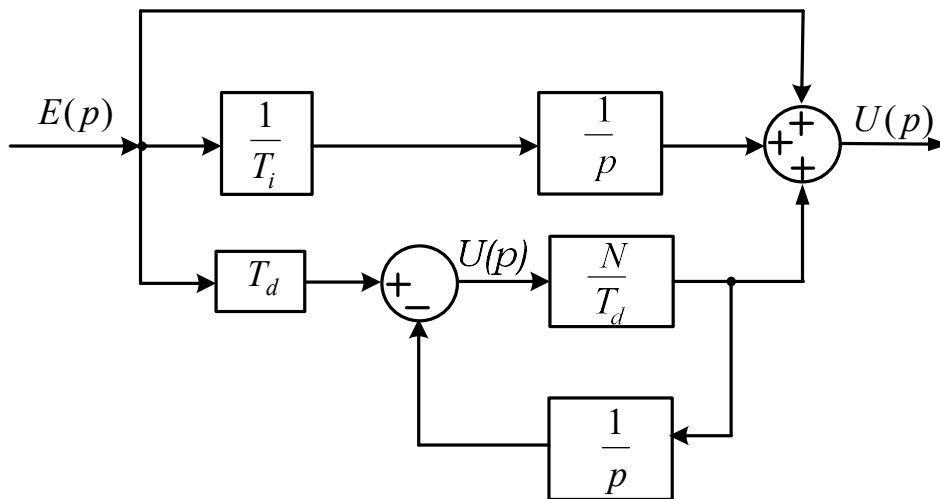


Рис. 6.9. Параллельная архитектура стандартного ПИД-регулятора с фильтром

Проверим ПФ дифференцирующей части регулятора:

$$C_{df}(p) = T_d \left(\frac{\frac{N}{T_d}}{1 + \frac{N}{T_d} \cdot \frac{1}{p}} \right) = T_d \left(\frac{\frac{N}{T_d} T_d p}{T_d p + N} \right) = T_d \left(\frac{Np}{T_d p + N} \right) = \frac{T_d p}{\frac{T_d}{N} p + 1}.$$

Сравнение ПФ регуляторов с фильтром позволяет записать соотношение между их настройками. При этом коэффициент K_r остается тем же.

Так как

$$C_{par}(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + \frac{K_d p}{T_f p + 1} = K_p \left(1 + \frac{1}{\frac{K_p}{K_i} p} + \frac{\frac{K_d}{K_p} p}{T_f p + 1} \right)$$

и

$$C_{sf}(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{\frac{T_d}{N} p + 1} \right),$$

то настройки стандартного регулятора определяются по формулам:

$$T_i = \frac{K_p}{K_i}; \quad T_d = \frac{K_d}{K_p}; \quad N = \frac{T_d}{T_f}.$$

Если нужно найти коэффициенты и постоянную времени фильтра параллельного регулятора, то имеют место формулы:

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}; \quad K_d = K_p T_d; \quad T_f = \frac{T_d}{N}.$$

Последовательный ПИД регулятор.

В ранних ПИД регуляторах использовались пневматические аппаратные средства, для которых использовалось математическое описание регулятора в виде двух последовательных ПФ. В поздних аналоговых регуляторах некоторые производители сохранили эту последовательную структуру. Блок-схема последовательной ПИД структуры приведена на рис.6.10, и она может быть использована для определения ее ПФ :

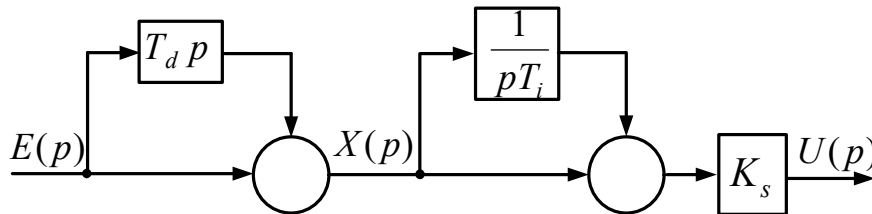


Рис. 6.10. Блок-диаграмма последовательного ПИД регулятора

ПФ регулятора определяется как произведение ПФ отдельных участков схемы: выражением

$$C_s(p) = K_s \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p) = K_s \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p + \frac{T_d}{T_i} \right)$$

или

$$C_s(p) = K_s \left(1 + \frac{T_d}{T_i} \right) + \frac{K_s}{T_i p} + K_s T_d p.$$

Сравнение с параллельной формой

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p$$

приводит к выражениям:

$$K_p = K_s \left(1 + \frac{T_d}{T_i} \right), \quad K_i = \frac{K_s}{T_i} \quad \text{и} \quad K_d = K_s T_d.$$

Наличие передаточной функции $C_s(p)$ позволяет записать закон регулирования последовательного ПИД регулятора:

$$u(t) = K_s \left(1 + \frac{T_d}{T_i} \right) \varepsilon(t) + \frac{K_s}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_s T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}.$$

Т.о., последовательный ПИД регулятор связан с параллельной архитектурой и имеет такую же форму закона управления. Некоторые специалисты утверждают, что последовательная форма лучше подходит для настройки ПИД регуляторов вручную.

Процедура настройки регулятора состоит из двух частей: *первая* – как выбрать структуру ПИД регулятора, т.е. какие коэффициенты должны быть использованы, и *вторая* – какие значения коэффициентов выбрать, т.е. как настроить выбранный регулятор. Для выполнения первой части имеется ряд рекомендаций. Вот некоторые из них. Пропорциональная составляющая **P**: увеличение $K_p > 0$ ускоряет отклик системы на единичный скачок и постоянное возмущение, уменьшает, но не устраняет статическую ошибку. Интегральная составляющая **I**: введение $K_i > 0$ дает большой набор переходных характеристик и устраняет статическую ошибку при постоянных входном воздействии и возмущении. Дифференциальная составляющая **D**: введение $K_d > 0$ дает большой набор переходных характеристик и может быть использована для настройки демпфирования, не оказывает влияния на статическую ошибку при постоянных входном воздействии и возмущении.

Вторая часть настройки регулятора заключается в определении численных значений коэффициентов той или иной формы записи его ПФ. Если математическая модель объекта известна, то для определения параметров регулятора, позволяющих получить нужные спецификации, имеется ряд методик. В этой работе мы используем возможности Matlab для определения настроек регулятора. Если же объект настолько сложен, что его матмодель не может быть легко определена, то аналитический или численный методы для проектирования регулятора не применимы. Тогда мы должны прибегнуть к экспериментальным методам настройки ПИД регулятора.

6.2. Синтез пид регулятора в matlab

Команда $C = \text{pidtune}(\text{sys}, \text{type})$ проектирует для объекта управления (неизменяемой части) sys параллельный ПИД-регулятор типа type , который находится в прямом пути передачи сигнала системы с единичной ООС.

Информация о регуляторах приведена в следующей таблице 6.1.

Таблица 6.1. Информация о непрерывных регуляторах

Строка в команде	Тип	Формула
'p'	Пропорциональный	K_p
'i'	Интегральный	$\frac{K_i}{p}$
'pi'	Пропорциональный и интегральный	$K_p + \frac{K_i}{p}$
'pd'	Пропорциональный и дифференциальный	$K_p + K_d p$
'pdf'	Пропорциональный и дифференциальный с фильтром первого порядка в дифференциальном слагаемом	$K_p + \frac{K_d p}{T_f p + 1}$
'pid'	Пропорциональный, интегральный и дифференциальный	$K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p$
'pidf'	Пропорциональный, интегральный и дифференциальный с фильтром первого порядка	$K_p + \frac{K_i}{p} + \frac{K_d p}{T_f p + 1}$

Команда $[C, \text{info}] = \text{pidtune}(\text{sys}, \text{type})$ возвращает данные структуры info , которая содержит дополнительную информацию об устойчивости замкнутой системы, частоте среза (crossover) и запасе по фазе.

Команда $C_stdf = \text{pidstd}(C_pdf)$ позволила получить передаточную функцию ПИДФ-регулятора в стандартной форме – с постоянными времени:

```
clc
% Бишоп C_7.5
% ПФ самолета
P1=tf(1,[1 1]);
```

```

P2=tf(1,[1 10 4]);
P=P1*P2
%ПФ параллельного ПИД регулятора
C=pidtune(P,'pid')
%ПФ разомкнутой системы с регулятором
W=C*P
%ПФ замкнутой системы с ПИД регулятором
T=feedback(W,1)
%ПХ замкнутой системы с ПИД регулятором
figure(1)
step(T),grid
%Показатели качества САР
% S=stepinfo(T)
%ПФ стандартного ПИД регулятора
C_st=pidstd(C)
%ПФ разомкнутой системы с регулятором
W1=C_st*P
%ПФ замкнутой системы с регулятором
T1=feedback(W1,1)
figure(2)
step(T,T1),grid
%ПФ ПИДФ регулятора
Cf=pidtune(P,'pidf')
%ПФ разомкнутой системы с регулятором
Wf=Cf*P
%ПФ замкнутой системы с ПИДФ регулятором
Tf=feedback(Wf,1)
%ПХ замкнутой системы с ПИДФ регулятором
figure(3)
step(T,Tf),grid
%ПФ параллельного ПИ регулятора
Cr=pidtune(P,'pi')
%ПФ разомкнутой системы с ПИ регулятором
Wr=Cr*P;
%ПФ замкнутой системы с ПИ регулятором
Tr=feedback(Wr,1);
%ПХ замкнутой системы с ПИ регулятором
figure(4)
step(T,Tr),grid
pidtool(P)
>>

```

Continuous-time PID controller in parallel form:

$$K_p + K_i * \frac{1}{s} + K_d * s$$

s

With $K_p = 7.46$, $K_i = 2.89$, $K_d = 1.02$

Continuous-time PID controller in standard form:

$$K_p * \left(1 + \frac{1}{T_i} * \frac{1}{s} + T_d * s\right)$$

With $K_p = 7.46$, $T_i = 2.58$, $T_d = 0.137$

Continuous-time PIDF controller in parallel form:

$$K_p + K_i * \frac{1}{s} + K_d * \frac{s}{T_f * s + 1}$$

With $K_p = 7.03$, $K_i = 3.06$, $K_d = 1.79$, $T_f = 0.757$

Continuous-time PI controller in parallel form:

$$K_p + K_i * \frac{1}{s}$$

With $K_p = 7.46$, $K_i = 2.5$

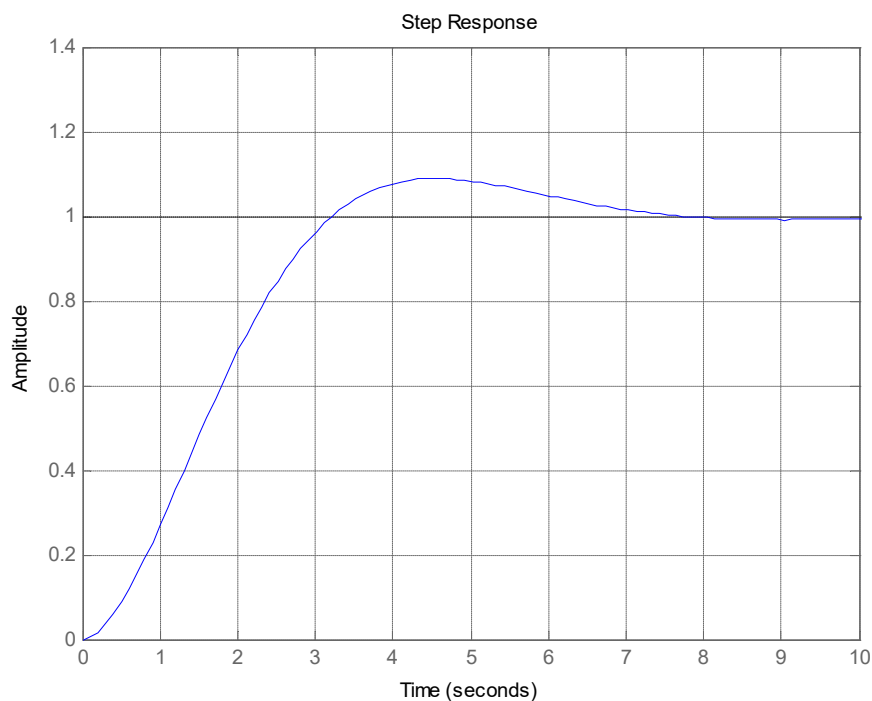


Рис. 6.11. ПХ системы с паралльным ПИД регулятором

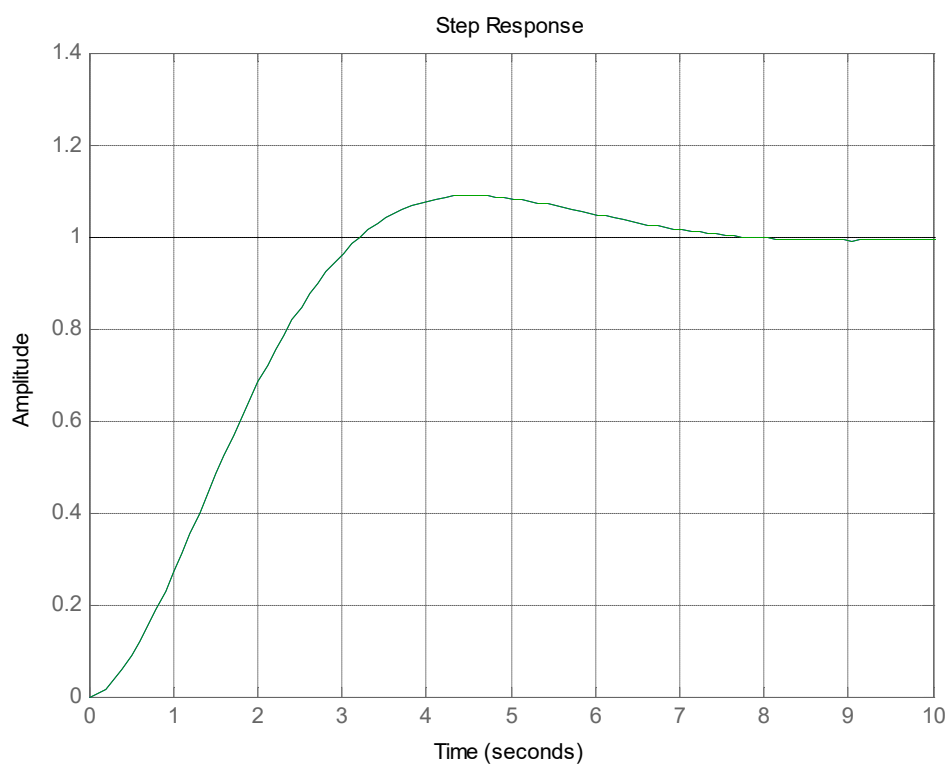


Рис. 6.12. ПХ системы с параллельным и стандартным ПИД регуляторами

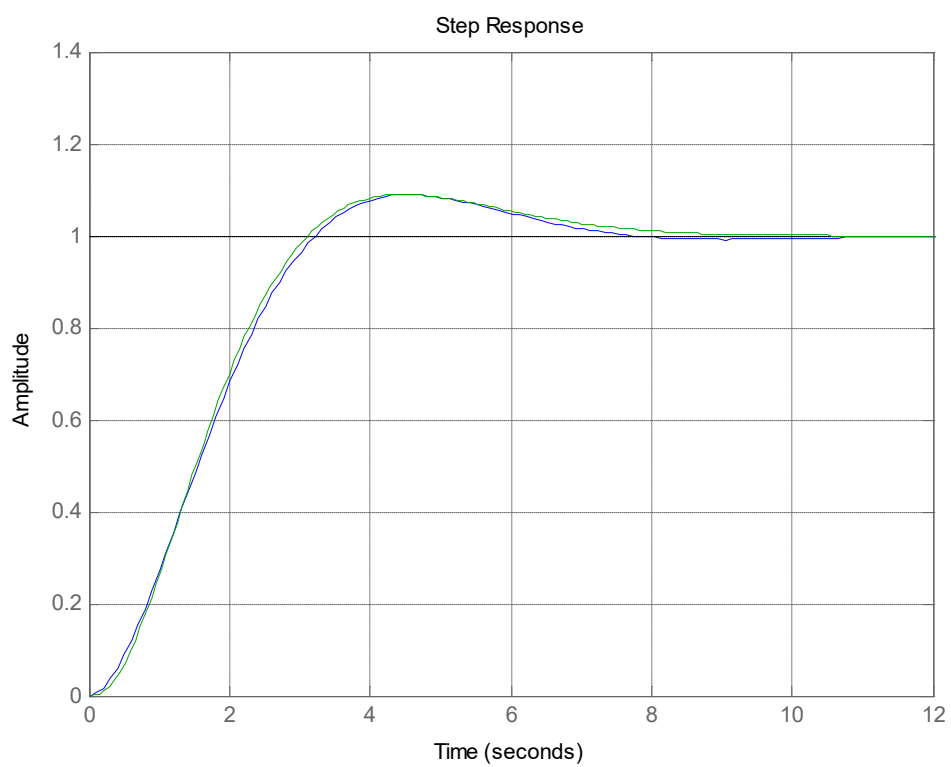


Рис. 6.13. ПХ системы с ПИД и ПИДФ регуляторами

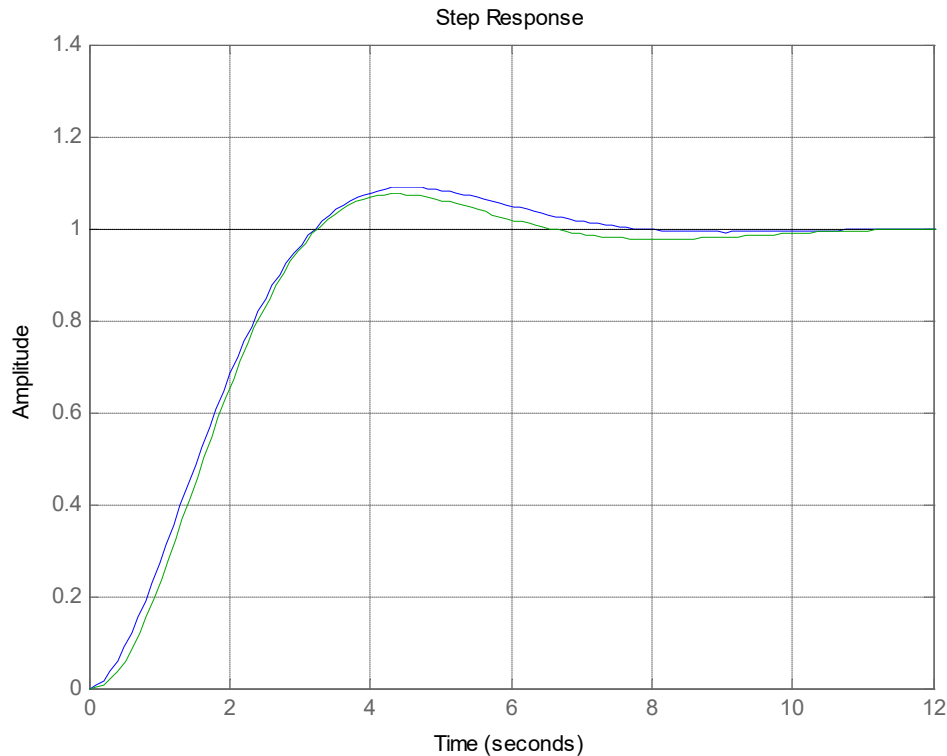


Рис. 6.14. ПХ системы с ПИД и ПИ регуляторами

6.3. Интерактивный графический инструмент для проектирования ПИД регулятора

Команда `pidtool(sys, type)` запускает ПИД-тюнер и проектирует регулятор типа `type` на пути прямой передачи сигнала для объекта `sys` в одноконтурной системе с единичной ООС (рис.6.15). Под `sys` понимается любая стационарная SISO система (такая как `ss`, `tf`, `zpk` или `frd`).

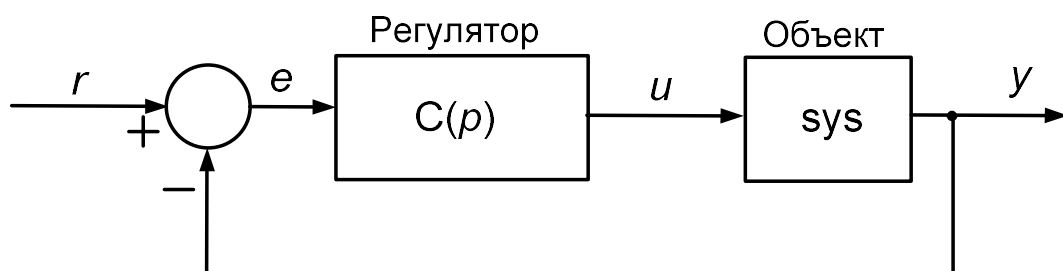


Рис. 6.15. Одноконтурная система с ПИД регулятором

Вы сами определяете тип регулятора (P, I, PI, PD, PDF, PID, PIDF) и его форму (параллельная или стандартная).

Можно анализировать свойства системы с регулятором, используя графики различных откликов из меню **Response** и интерактивно (вручную)

настраивать нужные вам показатели с помощью **Response time** или **Bandwidth** и **Phase Margin** движков (sliders).

ПИД-тюнер автоматически проектирует начальный ПИ регулятор. Клик по кнопке "Show parameters" позволяет увидеть коэффициенты регулятора и показатели функционирования системы с регулятором.

ПИД-тюнер по умолчанию обеспечивает запас по фазе в 60 градусов и автоматически настраивает коэффициенты регулятора так, чтобы сбалансировать производительность (время отклика) и надежность (запасы устойчивости). Повышение производительности, как правило, уменьшает надежность и наоборот.

ПИД-тюнер определяет отклики системы, предполагая следующую архитектуру (рис.6.16):

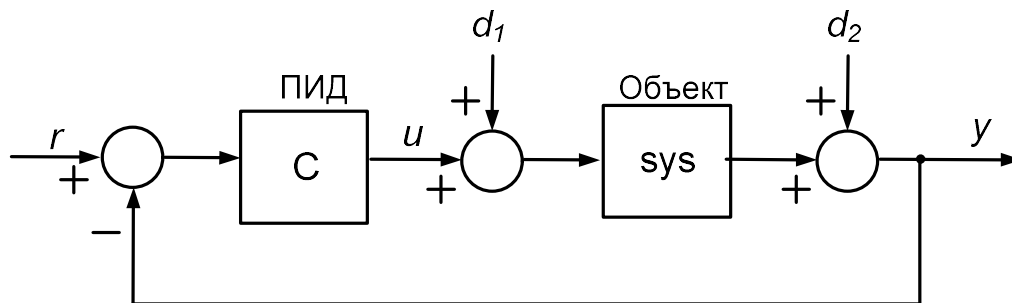


Рис. 6.16. Архитектура системы с возмущениями и ПИД регулятором

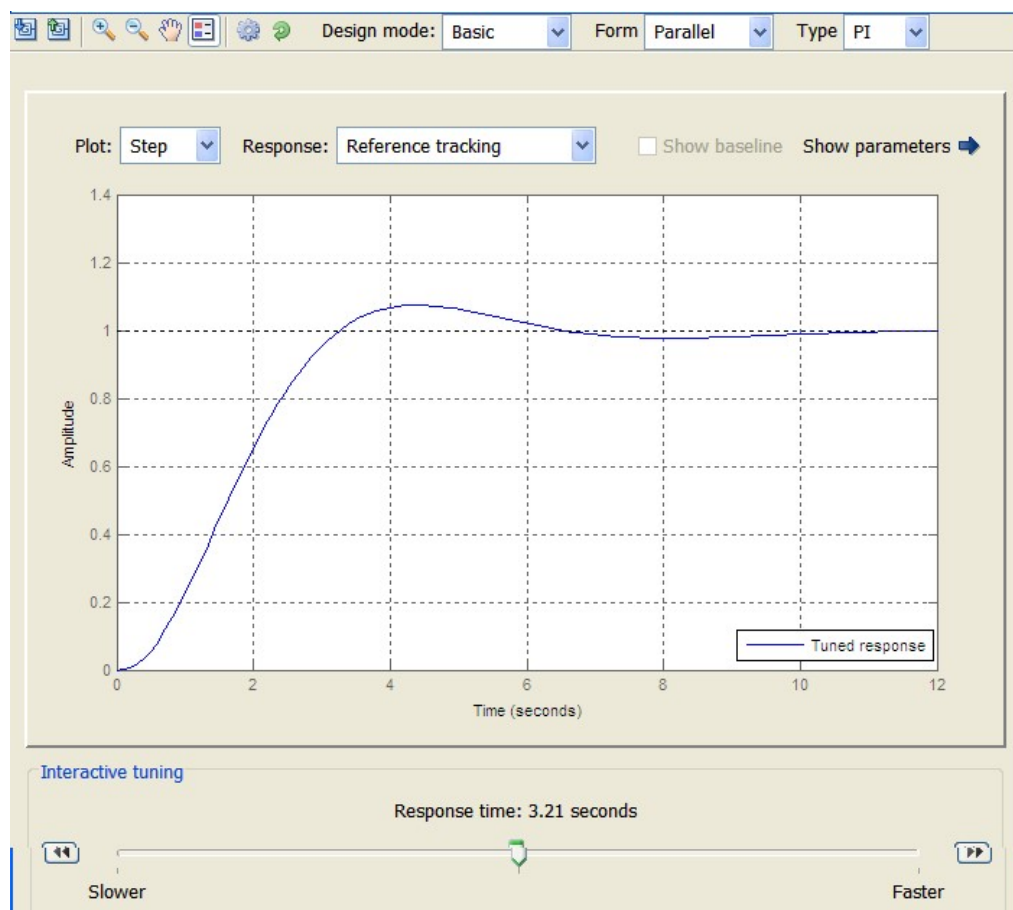
Следующая таблица представляет имеющиеся в распоряжении графики откликов.

Таблица 6.2. Таблица коэффициентов полиномов

Отклик	ПФ и передача сигнала	Описание
Отклик системы на задающее воздействие	$\frac{C * sys}{1 + C * sys}$ (от r к y)	Показывает отклик замкнутой системы на изменения в уставке. Используется при подготовке технических требований.
Отклик регулятора на задающее воздействие	$\frac{C}{1 + C * sys}$ (от r к u)	Показывает отклик регулятора в замкнутой системы на изменения в уставке. Используется, когда проект имеет практические ограничения, такие, например, как насыщение регулятора.
Отклик системы на возмущение на входе объекта	$\frac{sys}{1 + C * sys}$	Показывает отклик замкнутой системы на на-грузочное возмущение на входе объекта. Используется при подготовке технических требований на

Отклик	ПФ и передача сигнала	Описание
	(от d_1 к y)	проектирование.
Отклик системы на шумы измерений	$\frac{1}{1 + C * sys}$ (от d_2 к y)	Показывает отклик замкнутой системы на измерительные помехи.
Разомкнутый контур	$C * sys$	Показывает отклик разомкнутой системы с регулятором. Используется при синтезе в частотной области. Используется, когда технические требования включают критерии робастности, такие как запасы по амплитуде и фазе разомкнутого контура.
Объект	sys	Показывает отклик объекта. Используется для проверки динамики объекта. dynamics.

Меню **Plot** позволяет выбрать отклики во временной (Step) или частотной (Bode) областях.



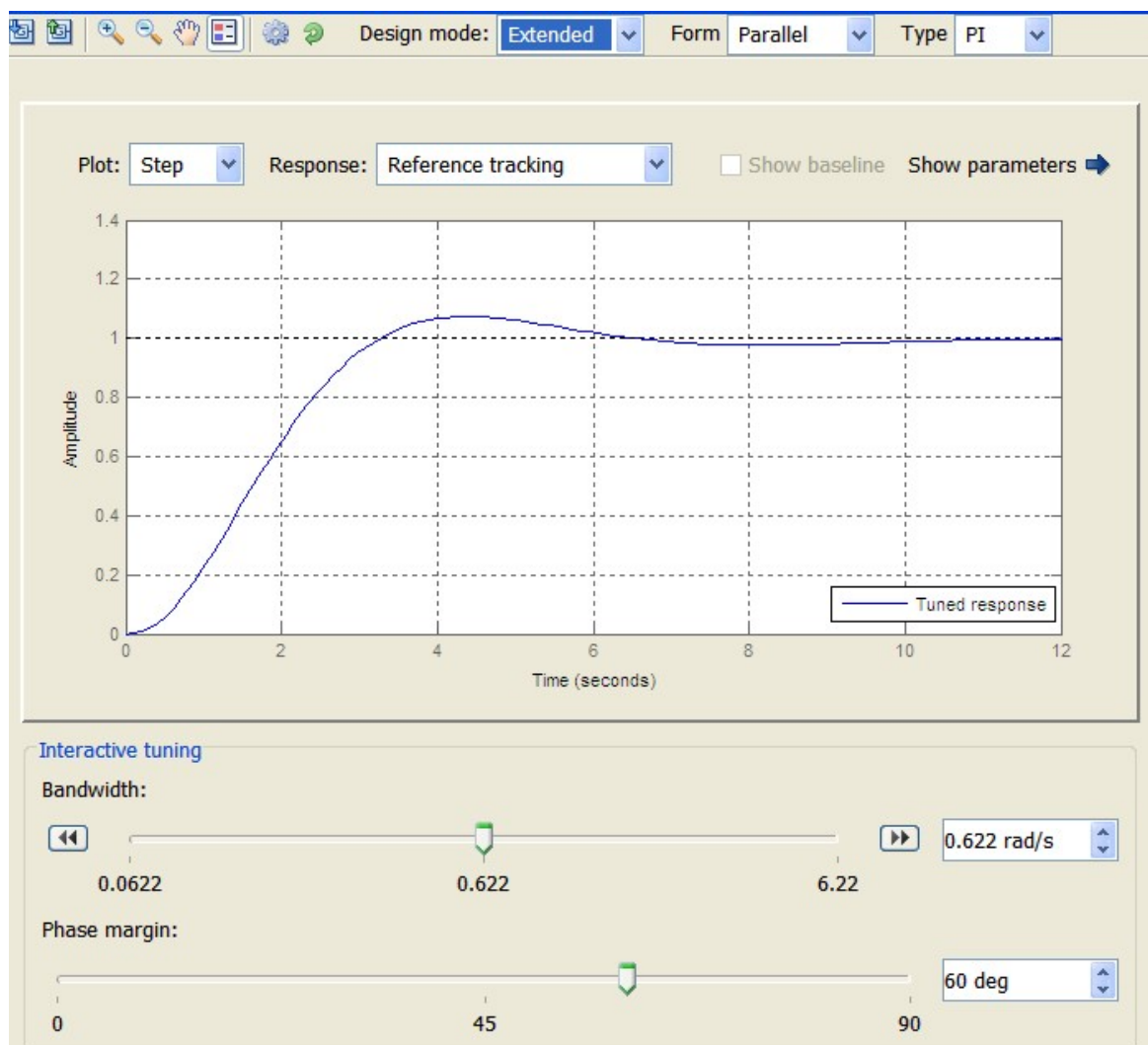
Hide parameters ←

Controller parameters

	Tuned
Kp	7.4647
Ki	2.4957
Kd	
Tf	

Performance and robustness

	Tuned
Rise time (seconds)	2.1
Settling time (seconds)	8.91
Overshoot (%)	7.41
Peak	1.07
Gain margin (rad/s)	23.4 @ 3.23
Phase margin (rad/s)	60 @ 0.622
Closed-loop stability	Stable



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никулин, Е.А. Основы теории управления. Частотные методы анализа и синтеза систем. / Учеб. пособие для вузов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 640 с..
2. [В Интернете] http://matlab.exponenta.ru/gui/book1/new7_1.php.
3. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчёта и справочный материал). – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с .
4. Рыбалёв А.Н., Усенко В.И., Русинов В.Л. Теория автоматического управления. Часть 1. Математические основы управления. Методическое пособие к выполнению практических и самостоятельных работ. Учебное пособие. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2011. – 202 с.
5. Усенко В.И., Русинов В.Л., Романова М.В. Математические модели в электротехнике и автоматике. Часть 1. Временные модели. Теоретические сведения с примерами решения задач. Учебное пособие. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2008. – 238 с.
6. Усенко В.И., Русинов В.Л., Романова М.В. Математические модели в электротехнике и автоматике. Часть 2. Передаточные функции и частотные характеристики линейных цепей и систем управления. Теоретические сведения с примерами решения задач. Учебное пособие. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2009. – 224 с..

Валентин Иванович Усенко,
доцент кафедры АПП и Э АмГУ;

Владислав Леонидович Русинов,
ст. преподаватель кафедры АПП и Э АмГУ.

Теория автоматического управления. Часть 3. Синтез непрерывных линейных САР. Учебное пособие.

Изд-во АмГУ. Подписано к печати 10.01.2016. Формат 60х84/16. Усл. печ. 6,21.
Тираж 50. Заказ 462.