

Министерство образования и науки Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Н. Рыбалёв, В.И. Усенко, В.Л. Русинов

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.
ЧАСТЬ 4. ИМПУЛЬСНЫЕ, ЦИФРОВЫЕ И
НЕЛИНЕЙНЫЕ САР

Учебное пособие

Благовещенск
Издательство АмГУ
2017

ББК 32.965я73
У 93

*Рекомендовано
учебно-методическим советом университета*

Рецензенты:

*Казакул А.А., ведущий инженер по расчетам и режимам АО «ДРСК»,
канд. техн. наук;*

*Мясоедов Ю.В., декан энергетического факультета АмГУ, канд. техн.
наук, профессор*

У 93 Рыбалев А.Н., Усенко В.И., Русинов В.Л.

Теория автоматического управления. Часть 4. Импульсные, цифровые и нелинейные САУ. Учебное пособие. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

Пособие к выполнению практических и самостоятельных работ предназначено для студентов 3-х курса направления подготовки «Автоматизация технологических процессов и производств» и полностью соответствует рабочей программе дисциплины «Теория автоматического управления».

ББК 32.965я73

© Амурский государственный университет, 2017

© Рыбалев А.Н., Усенко В.И., Русинов В.Л., 2017

СОДЕРЖАНИЕ

<i>ВВЕДЕНИЕ</i>	4
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ И ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ И СИСТЕМ.....	5
1.1. Дискретные системы управления.....	5
1.2. Разностные уравнения	7
1.3. Z-преобразование	12
1.4. Дискретные передаточные функции	17
1.5. Дискретные модели в пространстве состояний	25
1.6. Задание	30
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ НА ВХОДНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ	32
2.1. Численное решение разностного уравнения высокого порядка	32
2.2. Использование z-преобразования.....	34
2.3. Решение уравнений состояния.....	39
2.4. Задание	45
3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.....	46
3.1. Передаточная функция замкнутой дискретной системы управления ..	46
3.2. Дискретная передаточная функция цифрового регулятора.....	49
3.3. Дискретизация типовых законов регулирования.....	55
3.4. Задание	65
4. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ.....	66
4.1. Линейные системы второго порядка на фазовой плоскости	66
4.2. Нелинейные системы на фазовой плоскости. Предельные циклы	76
4.3. Пример исследования нелинейной САР на фазовой плоскости	80
4.4. Задание	85
5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ЛЯПУНОВА И КРИТЕРИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОПОВА.....	90
5.1. Методы Ляпунова для определения устойчивости нелинейных систем.....	90
5.2. Критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова	98
5.2. Задание	105
6. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ	107
6.1. Метод гармонического баланса: общие сведения	107
6.2. Гармоническая линеаризация нелинейных звеньев	107
6.3. Определение параметров автоколебаний	113
6.4. Задание	130
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	131

ВВЕДЕНИЕ

Четвертая часть пособия посвящена исследованиям импульсных, цифровых и нелинейных систем автоматического регулирования.

На первом занятии рассматривается классификация дискретных систем управления и основные формы математического описания импульсных и цифровых систем: разностные уравнения и z -преобразование. Вводится понятие дискретной передаточной функции, дается описание дискретных систем в пространстве состояний. Индивидуальное задание по теме состоит в дискретизации описания непрерывной части цифровой системы регулирования.

На втором занятии полученные дискретные модели используются для определения реакции непрерывной части на входное воздействие. Здесь решаются разностные уравнения высокого порядка и дискретные уравнения состояния, задействуется обратное z -преобразование.

Третье занятие посвящено исследованию замкнутой цифровой системы автоматического регулирования. Изучаются подходы к дискретизации математического описания типового регулятора. Определяется дискретная передаточная функция замкнутой системы, рассчитываются ее временные характеристики. При выполнении задания определяются настройки сначала непрерывного, а потом и цифрового регуляторов, поведение цифровой системы сравнивается с поведением непрерывного эталона, делается вывод о погрешности реализации.

На четвертом занятии проводится исследование системы второго порядка на фазовой плоскости. Рассматриваются виды фазовых характеристик линейных и нелинейных систем, приводится пример исследования нелинейной системы автоматического регулирования. Задание состоит в построении фазовых портретов линейной системы с особыми точками разного типа и определении наличия, устойчивости и параметров предельных циклов в нелинейной системе.

В пятой работе рассматриваются вопросы устойчивости нелинейных систем. Используются методы Ляпунова и критерий абсолютной устойчивости Попова. Задание включает определение устойчивости и области устойчивости нелинейной системы методами Ляпунова, применение критерия Попова для определения предельных параметров нелинейного элемента.

Шестая работа посвящена методу гармонического баланса для исследования автоколебательных режимов в нелинейных системах автоматического регулирования. На примерах детально показана гармоническая линеаризация типовых релейных характеристик. Рассмотрен графический способ определения параметров автоколебаний. Задание заключается в исследовании нелинейной системы с линейной частью третьего порядка и нелинейным элементом, заданным его статической характеристикой.

Теоретический материал пособия включает многочисленные примеры решения задач, в большинстве из которых привлекаются возможности программы Matlab. Индивидуальные задания также выполняются с помощью этой программы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ И ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ И СИСТЕМ

1.1. Дискретные системы управления

Как известно, по виду используемых сигналов системы автоматического регулирования разделяют на непрерывные и дискретные, рис.1.1.



Рис.1.1. Классификация систем автоматического регулирования.

В непрерывных системах все сигналы непрерывны. В настоящее время в строгом смысле таких систем практически не осталось, так как практически везде задействована цифровая обработка сигналов. Непрерывным или аналоговым является всегда объект управления, поскольку речь идет о регулировании непрерывно изменяющихся величин, кроме того к «непрерывной части» САУ можно отнести некоторые механизмы и измерители.

В дискретных системах производится процесс дискретизации или квантования. Этот процесс заключается в замене непрерывного сигнала его дискретными отчетами.

В релейных системах сигнал квантуется по уровню. Число уровней чаще всего два или три, но может быть и больше.

Электромагнитное реле может находиться в двух состояниях: «не сработало» и «сработало», им соответствуют два уровня напряжения и тока нагрузки в цепях их контактов. Это так называемое «двухпозиционное реле».

Система коммутации электропривода регулирующего и запорного клапана выдает три возможных сигнала управления: «включить привод на открытие клапана», «включить привод на закрытие клапана», «остановить привод». Это – «трехпозиционное реле».

Система управления главным приводом лифта (без частотного управления) обеспечивает пять вариантов поведения кабины: движение вверх и вниз на максимальной скорости, движение вверх и вниз на пониженной скорости и останов. Это – «пятипозиционное реле».

В импульсных системах производится квантование по времени, этот процесс называется импульсной модуляцией. В зависимости от того, какой параметр импульсов изменяется в функции входного непрерывного сигнала, различают амплитудно-импульсную, широтно-импульсную, фазоимпульсную, частотно-импульсную модуляции (АИМ, ШИМ, ФИМ и ЧИМ соответственно). Строго говоря, ШИМ, ФИМ и ЧИМ занимают также и квантованием по уровню, так как высота импульсов при этих видах модуляции не изменяется (по крайней мере, не изменяется модуль высоты).

В теории управления разработаны специальные методы анализа и синтеза импульсных систем.

В цифровых системах осуществляется квантование как по уровню, так и по времени.

Квантование по уровню связано с «цифровой формой» представления значения сигнала. Пусть, например, вычислением управляющего сигнала занимается 8-ми разрядный микропроцессор. Тогда число возможных уровней цифрового сигнала составляет $2^8 = 256$. Современные программируемые логические контроллеры и промышленные компьютеры способны обрабатывать 16-ти и 32-разрядные целочисленные слова и даже дробные числа в представлениях с фиксированной и плавающей точкой, а число уровней дискретизации определяется разрядностью аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей (АЦП и ЦАП). Самые распространенные АЦП – 12-ти разрядные. Менее распространенные – 14, 16. ЦАП обычно имеют разрядность 10-12, реже – 14. Таким образом, число уровней довольно велико и в этом плане цифровой сигнал практически не отличим от аналогового. Поэтому при анализе и синтезе САУ квантованием по уровню практически всегда можно пренебречь.

Квантование по времени связано с циклическим характером работы цифровой управляющей аппаратуры. Упрощенно цикл работы ПЛК включает «считывание» входов, выполнение управляющей программы и «обновление» выходов. В большинстве случаев время цикла не фиксировано и зависит от «длины» программы. Есть, конечно, сторожевой таймер, Watchdog timer, перезагружающий контроллер, если выполнение программы «слишком затянулось», но он – всего лишь средство защиты от логических ошибок в программе. В «нормальных условиях» время цикла может быть совсем небольшим, порядка одной или нескольких миллисекунд. Однако это совсем не значит, что частота дискретизации достигает 1кГц. Самое «слабое звено» ПЛК и модулей ввода с точки зрения быстродействия – это АЦП. Конечно, существуют «скоростные» преобразователи, но далеко не все ПЛК оснащены ими (это было бы излишне дорого). Время опроса аналогового универсального входа некоторых современных ПЛК может составлять несколько десятых долей секунды. Допустим, программа пересчитывается 1000 раз в секунду, а время опроса (обновления) аналогового входа составляет 0,5 сек. Это означает, что в 998 случаев из 1000 программа обрабатывает «старые» данные, т.е., по сути, работает «вхолостую»! (На самом деле, как мы увидим позже, это не совсем так.) Таким образом, реальная частота дискретизации определяется самым медленным устройством, т.е. АЦП, и может быть даже в современных системах весьма небольшой. При этом если

речь идет о регулировании быстроизменяющихся параметров, поведение цифровой системы будет существенно отличаться от ее аналогового «эквивалента», причем в худшую сторону. В таких условиях систему рассматривают как импульсную с АИМ.

В целом можно сказать, что классификация САР по виду используемых сигналов напрямую не связана с составом технических средств системы. Принадлежность САР к тому или другому классу говорит о логике ее работы, используемых алгоритмах регулирования и методах теории управления, задействованных при анализе и синтезе.

Так, например, в промышленности широко применяются системы регулирования с ШИМ. Можно рассмотреть систему регулирования температуры с нагревательным элементом. Допустим, закон регулирования в данный момент требует подачи на нагревательный элемент 50% мощности. А «технически» система построена так, что мощность нагревательного элемента изменять нельзя, его можно только включить или выключить. Если сигнал нельзя «разделить» по уровню, почему бы не «разделить» его по времени? Может быть, объект управления даже и не заметит такой подмены, ведь температура меняется медленно? Так и поступают: нагревательный элемент включают периодически, например, один раз в 30 сек, при этом первые 15 сек он включен, а вторые выключен. Разумеется, если потребуются увеличить мощность до 66,6%, время включения увеличится до 20 сек, а время отключения уменьшится до 10 сек. По такому же принципу построена система управления мощностью обыкновенной микроволновой печи. Все такие системы по логике своей работы являются непрерывными (или хотя бы «квазинепрерывными»), хотя в них есть и «реле» и «импульсы».

Широко применяемые в несложных системах автоматизации микропроцессорные регуляторы и контроллеры часто реализуют релейные законы регулирования (т.е., по сути, что-то включают при одном значении ошибки регулирования и выключают при другом). Поэтому соответствующие системы регулирования являются релейными, а не цифровыми.

Расчет регуляторов, впоследствии реализуемых программно, может производиться методами «непрерывной теории», и если квантование по времени практически не сказывается на качестве процесса регулирования, полученные системы вполне можно считать непрерывными. В противном случае требуется применение специального математического аппарата. Для систем, работающих в дискретном времени, таким аппаратом являются разностные уравнения и z-преобразование.

1.2. Разностные уравнения

На рис.1.2 представлены математические модели линейных стационарных аналоговых и дискретных систем управления. Аналогом дифференциальных уравнений (ДУ) в дискретных системах являются разностные уравнения (РУ).

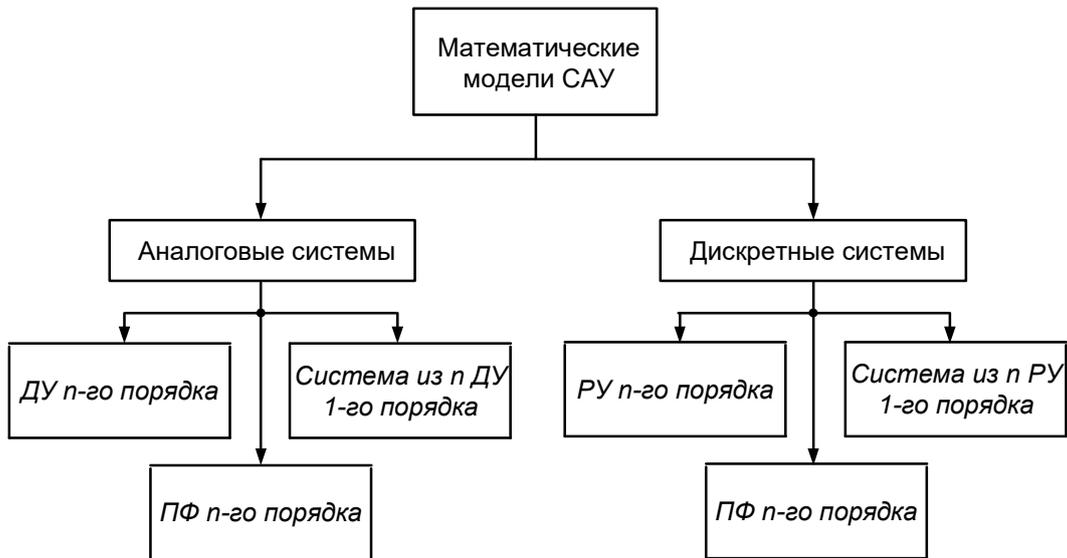


Рис.1.2. Математические модели линейных САУ.

Решениями дифференциальных уравнений, как известно, являются непрерывные функции. Решением разностных уравнения являются *решетчатые функции*.

Решетчатой называют функцию $f(kT)$, заданную дискретными значениями через равноотстоящие интервалы времени, т.е. в моменты времени $0, T, 2T, \dots$. В промежутках между этими моментами функция не определена. РФ можно образовать из любой числовой таблицы или из непрерывной функции, придавая ее аргументу кратные T значения. Если принять период дискретизации $T = 1$ (например, путем изменения масштаба времени), то РФ можно обозначить как $f(T)$. Одной и той же РФ может соответствовать несколько непрерывных функций (рис.1.3):

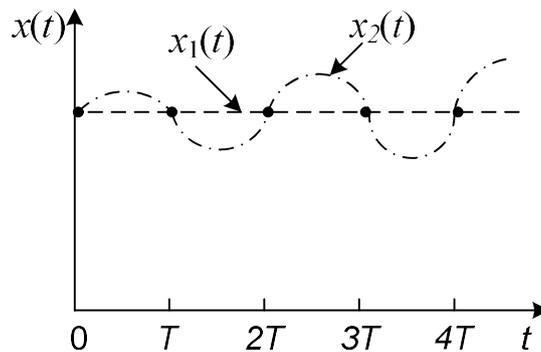


Рис.1.3. Две различные функции времени с одинаковыми выборками.

На рисунке показаны кривые двух различных функций. Этим двум кривым соответствует одинаковая решетчатая функция.

В дифференциальных уравнениях фигурируют *производные* сигналов по времени (скорости, ускорения и т.д.). В разностных уравнениях роль производных выполняют *разности*.

Аналогом первой производной непрерывной функции для любой последовательности $f[k]$ является конечная разность 1-го порядка или *первая разность*

$$\Delta f[k] = f[k+1] - f[k].$$

Она определяется в момент времени $t = kT$ как разность между будущим значением последовательности при $t = (k+1)T$ и текущим значением при $t = kT$.

Аналогом второй производной непрерывной функции для последовательности является конечная разность 2-го порядка или *вторая разность*:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f[k] &= \Delta[\Delta f[k]] = \Delta f[k+1] - \Delta f[k] = f[k+2] - f[k+1] - f[k+1] + f[k] = \\ &= f[k+2] - 2f[k+1] + f[k]. \end{aligned}$$

Аналогом третьей производной непрерывной функции для последовательности является конечная разность 3-го порядка или *третья разность*:

$$\Delta^3 f[k] = \Delta[\Delta^2 f[k]] = f[k+3] - 3f[k+2] + 3f[k+1] - f[k].$$

Рассмотрим два примера.

1) Степенная функция $f[k] = k^2$.

Первая и вторая разности:

$$\Delta f[k] = f[k+1] - f[k] = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1;$$

$$\Delta^2 f[k] = f[k+2] - 2f[k+1] + f[k].$$

Таблица 1.1

Первая и вторая разности для функции $f[k] = k^2$

k	0	1	2	3
$\Delta f[k]$	1	3	5	7
$\Delta^2 f[k]$	2	2	2	2

2) Показательная функция $f[k] = e^{2k}$.

$$\Delta f[k] = f[k+1] - f[k] = e^{2(k+1)} - e^{2k} = e^{2k}(e^2 - 1);$$

$$\Delta^2 f[k] = f[k+2] - 2f[k+1] + f[k] = e^{2k}(e^2 - 1).$$

Таблица 1.2

Первая и вторая разности для функции $f[k] = e^{2k}$

k	0	1	2	3
$\Delta f[k]$	6,4	47	349	2580
$\Delta^2 f[k]$	40,8	302	2230	16500

Уравнением n -го порядка в конечных разностях, или разностным уравнением n -го порядка называют уравнение, в которое входят неизвестная функция $y[k]$ и ее разности до n -го порядка включительно:

$$b_n \Delta^n y[k] + b_{n-1} \Delta^{n-1} y[k] + \dots + b_0 y[k] = f[k],$$

где b_n, b_{n-1}, \dots – постоянные коэффициенты; $f[k]$ – известная функция (описывает входное воздействие).

Существует и вторая форма уравнений в конечных разностях. Ее получают из первой, заменяя все разности их выражениями. В результате получим:

$$a_n y[k+n] + a_{n-1} y[k+n-1] + \dots + a_0 y[k] = f[k].$$

Рассмотрим переход от одной формы к другой на примере следующего уравнения:

$$\Delta^2 y[k] + 4\Delta y[k] + 6y[k] = 0.$$

Если заменить вторую и первую разности их выражениями

$$\Delta^2 y[k] = y[k+2] - 2y[k+1] + y[k]$$

и

$$\Delta y[k] = y[k+1] - y[k],$$

получим

$$y[k+2] - 2y[k+1] + y[k] + 4\{y[k+1] - y[k]\} + 6y[k] = 0,$$

или

$$y[k+2] + 2y[k+1] + 3y[k] = 0.$$

Таким образом, $a_2 = 1$, $a_1 = 2$, $a_0 = 3$.

Вторая форма записи уравнения в конечных разностях дает возможность определять последующие значения отклика системы $y[k+n]$ через предыдущие значения ($y[k+n-1]$, $y[k+n-2]$, вплоть до $y[0]$) и значения известной функции $f[k]$. Другими словами, уравнение, записанное во второй форме, представляет собой рекуррентную (от лат. *recurrens* – возвращающийся) формулу для последовательного определения откликов системы через отклики в предыдущие моменты времени.

Альтернативная эквивалентная форма разностного уравнения может быть получена путем замены k на $k-n$:

$$a_n y[k] + a_{n-1} y[k-1] + \dots + a_0 y[k-n] = f[k].$$

В этом случае под первой разностью часто понимают разность между значениями выборок в конце и начале интервала дискретизации, отнесенную к шагу:

$$\Delta f[kT] = \frac{f[kT] - f[(k-1)T]}{T}.$$

При $T = 1$ получим:

$$\Delta f[k] = f[k] - f[k-1].$$

Рассмотрим рекуррентный способ решения разностного уравнения

$$y[k] - y[k-1] = 2f[k]$$

с начальным условием $y(-1) = 0$ и $f(k) = 1$ для всех k . Полагая $k = 0$ и подставляя это значение в уравнение, получим:

$$y[0] - y[-1] = 2f[0],$$

$$y[0] = 2.$$

Далее принимаем $k = 1$:

$$y[1] - y[0] = 2f[1],$$

$$y[1] = 2 + 2 = 4.$$

Принимая $k = 2, 3$ и 4 , получим:

$$y[2] - y[1] = 2f[2], \quad y[2] = 4 + 2 = 6;$$

$$y[3] - y[2] = 2f[3], \quad y[3] = 6 + 2 = 8;$$

$$y[4] - y[3] = 2f[4], \quad y[4] = 8 + 2 = 10.$$

Линейное разностное уравнение порядка n , связывающее входной сигнал u , действующий на систему, с выходным сигналом y , имеет вид:

$$y[k] + a_{n-1}y[k-1] + \dots + a_0y[k-n] = b_m u[k] + b_{m-1}u[k-1] + \dots + b_0u[k-m].$$

Величину выходного сигнала при любом k можно вычислить с помощью рекуррентной формулы

$$y[k] = -a_{n-1}y[k-1] - \dots - a_0y[k-n] + b_m u[k] + b_{m-1}u[k-1] + \dots + b_0u[k-m],$$

если известны текущее значение входа $u(k)$ и m предшествующих значений $u(k-1), \dots, u(k-m)$, а также соответствующие значения выхода $y(k-1), \dots, y(k-m)$.

В простейшем случае разностное уравнение может быть непосредственно получено по дифференциальному путем замены производных разностями, как это показано в следующем примере.

Пусть имеется ДУ первого порядка:

$$a_1 \frac{dx(t)}{dt} = u(t).$$

Заменяя производную *левой* разностью при периоде дискретизации (квантования) T , получим разностное уравнение

$$a_1 \frac{x(k) - x(k-1)}{T} = u(t)$$

или

$$x(k) - x(k-1) = \frac{T}{a_1} u(k).$$

Если же для дискретизации применяется *правая* разность, то получим другую форму РУ:

$$a_1 \frac{x(k+1) - x(k)}{T} = u(t).$$

или

$$x(k+1) - x(k) = \frac{T}{a_1} u(k).$$

Следует отметить, что описанный способ не является универсальным. Он дает удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда период дискретизации T мал по сравнению с постоянной времени a_1 , а входной сигнал является непрерывным. На практике чаще встречается ситуация, когда входной сигнал изменяется «ступенчато», как, например, сигнал на выходе ЦАП.

1.3. Z-преобразование

Подобно тому как преобразование Лапласа трансформирует линейные дифференциальные уравнения в алгебраические относительно оператора p , z -преобразование трансформирует линейные разностные уравнения в алгебраические относительно z .

Z -преобразование может применяться к непрерывному сигналу $x(t)$, дискретному сигналу $x(kT)$ и числовой последовательности $x(k)$.

Прямое z -преобразование временной функции $x(t)$, где $t \geq 0$, или последовательности величин $x(kT)$, где k принимает нулевое или целое положительное значения и T – период квантования, определяется следующим уравнением:

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}.$$

Для последовательности чисел $x(k)$ z преобразование определяется как

$$X(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}.$$

Обе формы записи носят название одностороннего z -преобразования, так как предполагается, что $x(t) = 0$ для $t < 0$ или $x(k) = 0$ для $k < 0$. Отметим, что z – комплексная переменная.

Расширенная запись правой части первого уравнения приводит к выражению

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots + x(kT)z^{-k} + \dots$$

Это уравнение подразумевает, что z -преобразование любой непрерывной функции времени $x(t)$ может быть записано в виде ряда по степеням оператора z^{-1} . Сомножитель z^{-k} в этом ряде показывает момент времени, для которого определяется выборка сигнала.

Найдем z -преобразование некоторых элементарных функций.

Единичная ступенчатая функция

$$x(t) = \begin{cases} 1(t), & 0 \leq t; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Значения этой функции равны единице в начальный и все последующие моменты времени, поэтому

$$X(z) = Z[1(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Функция $1(k)$, записанная в виде

$$1(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

часто называется единичной ступенчатой последовательностью.

Наклонная функция с единичным наклоном

$$x(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$x(kT) = kT, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

На рис.1.4 представлен вид этой функции.

$$\begin{aligned} X(z) &= Z[t] = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) = \\ &= T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z - 1)^2}. \end{aligned}$$

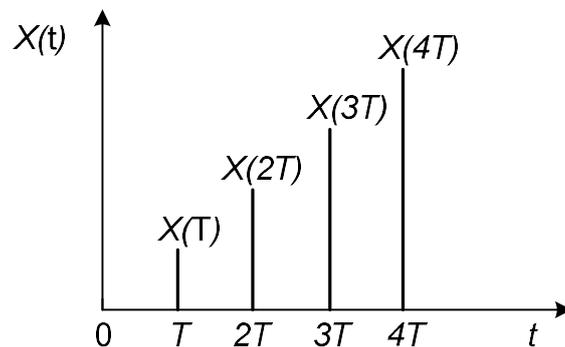


Рис.1.4. Квантованный единичный наклонный сигнал.

Полиномиальная функция

$$x(k) = \begin{cases} a^k, & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

где $a = \text{const}$.

$$X(z) = Z[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots =$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}.$$

Экспоненциальная функция

$$x(k) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Учитывая, что

$$x(kT) = e^{-akT}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

получим

$$X(z) = Z[e^{-at}] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} =$$

$$= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

Основные свойства и теоремы z-преобразования

Теоремы z-преобразования облегчают применение z-преобразования к исследованию дискретных систем.

Умножение на константу. Если $X(z)$ есть z-преобразование $x(t)$, то

$$Z[ax(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} ax(kT)z^{-k} = a \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = aX(z),$$

где $a = \text{const}$.

Линейность z-преобразования. Если $f(k)$ и $g(k)$ имеют z-преобразования $F(z)$ и $G(z)$ соответственно и α и β являются скалярами, то функция $x(k)$, сформированная линейной комбинацией

$$x(k) = \alpha f(k) + \beta g(k),$$

имеет z-преобразование:

$$X(z) = \alpha F(z) + \beta G(z).$$

Теорема сдвига. Если $x(t) = 0$ для $t < 0$ и $x(t)$ имеет z-преобразование $X(z)$, то имеет место следующие соотношения:

$$Z[x(t - nT)] = z^{-n} X(z)$$

и

$$Z[x(t + nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right],$$

где n – нуль или целое положительное число.

Для числовой последовательности последнее соотношение может быть записано в виде:

$$Z[x(k+n)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)z^{-k} \right].$$

Согласно этому уравнению можно записать:

$$Z[x(k+1)] = z[X(z) - x(0)] = zX(z) - zx(0);$$

$$Z[x(k+2)] = z^2[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}] = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1);$$

⋮

$$Z[x(k+n)] = z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1} x(1) - z^{n-2} x(2) - \dots - zx(n-1).$$

Заметим, что умножение $X(z)$ на z приводит к опережению сигнала $x(kT)$ на один шаг (1 период квантования), а умножение $X(z)$ на z^{-1} – к отставанию сигнала $x(kT)$ на один шаг (1 период квантования).

Пример 1.1. Найти z -преобразования единичной ступенчатой функции с задержкой на один и три периода квантования, как показано на рис.1.5.

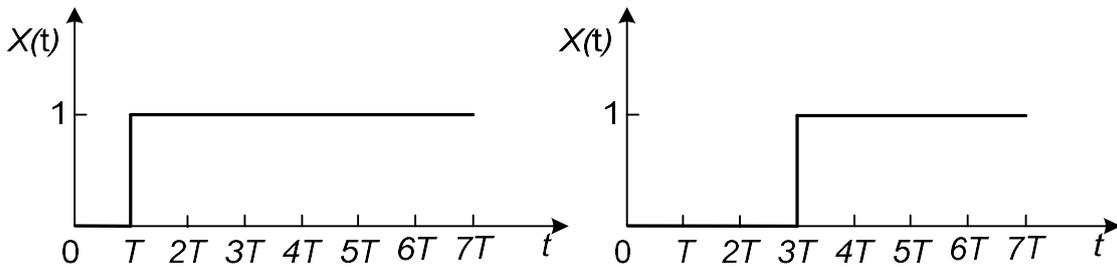


Рис.1.5. Единичная ступенчатая функция с задержкой в один и три периода квантования.

Используя теорему сдвига, получим

$$Z[1(t-T)] = z^{-1}X[1(t)] = z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z-1},$$

$$Z[1(t-3T)] = z^{-3}X[1(t)] = z^{-3} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-3}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z^3-z^2}.$$

Теорема о начальном значении. Если $x(t)$ имеет z -преобразование $X(z)$ и если $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ существует, то начальное значение $x(0)$ для $x(t)$ или $x(k)$ задается как

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z),$$

что непосредственно следует из выражения

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(k)z^{-k} + \dots$$

Поведение сигнала в окрестности $t = 0$ или $k = 0$ может быть определено как поведение функции $X(z)$ при $z \rightarrow \infty$.

Теорема о начальном значении удобна для проверки вычислений z -преобразований на возможность ошибки. Так как значение $x(0)$ обычно известно, то проверка начального условия с помощью $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ позволяет легко обнаружить ошибку.

Пример.1.2. Определить начальное значение $x(0)$, если z -преобразование функции $x(t)$ задано в виде

$$X(z) = \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})}.$$

Используя теорему о начальном значении, получим

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} = 0.$$

Учитывая, что $X(z)$ есть z -преобразование функции

$$x(t) = 1 - e^{-t},$$

получаем $x(0) = 0$, что совпадает с результатом, полученным ранее.

Теорема о конечном значении. Предположим, что функция $x(k)$ имеет z -преобразование $X(z)$ и все полюса $X(z)$ лежат внутри единичного круга с возможным единственным полюсом при $z = 1$. Тогда конечное значение $x(k)$ определяется по формуле:

$$x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1})X(z) \right].$$

Пример 1.3. Определить конечное значение $x(\infty)$, если

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-at}z^{-1}}, \quad a > 0.$$

Применяя теорему о конечном значении к $X(z)$, получим:

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1})X(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-at}z^{-1}} \right) \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-at}z^{-1}} \right] = 1. \end{aligned}$$

Учитывая, что $X(z)$ есть z -преобразование функции

$$x(t) = 1 - e^{-t},$$

получаем $x(\infty) = 1$, что совпадает с ранее полученным результатом.

Существуют таблицы z-преобразований элементарных функций. Ниже показан фрагмент такой таблицы.

Таблица 1.3

Z-преобразование некоторых элементарных функций

	$X(p)$	$x(t)$	$X(z)$
1	$\frac{1}{p}$	$1(t)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
2	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
3	$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
4	$\frac{2}{p^3}$	t^2	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
5	$\frac{a}{p(p+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
6	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
7	$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
8	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$

Помимо z-преобразований в таблице приведены также изображения непрерывных функций по Лапласу. Они потребуются нам в дальнейшем.

Используя свойство линейности z-преобразования, можно найти z-преобразование сложной функции. Для этого нужно разложить ее на сумму простых, найти z-преобразования каждой простой функции и сложить полученные z-преобразования. «Проверим» это на примере пятой строки таблицы.

$$x(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

$$\begin{aligned} X(z) &= Z[1 - e^{-t}] = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} = \frac{1 - e^{-T}z^{-1} - 1 + z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} = \\ &= \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z-1)(z - e^{-T})}. \end{aligned}$$

1.4. Дискретные передаточные функции

Передаточная функция непрерывной системы $W(p)$, как известно, может интерпретирована двояко:

1) как операторная форма записи дифференциального уравнения, связывающего выходной сигнал системы с входным;

2) как отношение изображения по Лапласу выходного сигнала к изображению входного при нулевых начальных условиях.

Совершенно аналогично *дискретная* передаточная функция $W(z)$ есть

1) операторная форма записи *разностного* уравнения, связывающего выходной сигнал системы с входным;

2) отношение *z-преобразования* выходного сигнала к *z-преобразованию* входного при нулевых начальных условиях.

Первое определение устанавливает однозначную связь между $W(z)$ и разностным уравнением: по разностному уравнению непосредственно записывается $W(z)$ и наоборот. В некотором смысле $W(z)$ и разностное уравнение – это *одно и то же*.

Пусть имеется разностное уравнение порядка n , связывающее входной сигнал u с выходным сигналом y :

$$y[k] + a_{n-1}y[k-1] + \dots + a_0y[k-n] = b_mu[k] + b_{m-1}u[k-1] + \dots + b_0u[k-m].$$

Введя оператор задержки сигнал на один такт z^{-1} , такой что

$$\begin{aligned}y[k]z^{-1} &= y[k-1]; \\ y[k]z^{-2} &= y[k-2]\end{aligned}$$

и т.д., получим

$$y[k] + a_{n-1}z^{-1}y[k] + \dots + a_0z^{-n}y[k] = b_mu[k] + b_{m-1}z^{-1}u[k] + \dots + b_0z^{-m}u[k],$$

$$y[k](1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}) = u[k](b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m}),$$

откуда

$$\frac{y[k]}{u[k]} = \frac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}} = W(z).$$

Второе определение *дискретной* передаточной функции $W(z)$ приводит нас к следующему соотношению

$$W(z) = \frac{y(z)}{u(z)}.$$

Здесь уже речь идет об операциях с z -изображениями сигналов. Зная $u(z)$ и передаточную функцию системы $W(z)$ можно найти $y(z)$:

$$y(z) = W(z)u(z).$$

По существу это выражение демонстрирует операторный метод решения разностного уравнения. Следует отметить, что разностные уравнения легко решаются непосредственно, поэтому актуальность данного метода не столь высока, как актуальность операторного метода решения дифференциальных уравне-

ний. Однако сам вывод дискретной передаточной функции невозможен без использования z -преобразования.

Задача определения дискретных передаточных функций элементов импульсной или цифровой системы автоматического регулирования не является тривиальной, несмотря на то, что общий подход к ее решению разработан. Проблема состоит в том, что в системе одновременно действуют как «дискретная часть», которая достаточно легко описывается разностными уравнениями (это по большей части, цифровой алгоритм регулирования), так и «непрерывная часть», описываемая дифференциальными уравнениями (объект управления и другие элементы). Поскольку математическое описание системы должно быть *единым*, необходимо получить дискретное описание непрерывной части системы или, другими словами, *дискретизировать* описание непрерывной части.

Дискретная модель непрерывной системы определяется тремя факторами:

- свойствами системы, т.е. исходным ее описанием;
- шагом квантования по времени;
- формой входных импульсов. Одна и та же система будет реагировать по-разному на одинаковые по высоте, но разные по форме импульсы.

Основная идея общего подхода к дискретизации непрерывных передаточных функций состоит в искусственной замене реального *импульсного элемента*, формирующего входной сигнал для непрерывной части системы (в общем случае – импульсы любой формы) на последовательное соединение *идеального импульсного элемента*, вырабатывающего *идеальные импульсы*, реакцию на которые находить мы умеем, и *формирующего элемента*, придающего идеальным импульсам «реальную форму». Формирующий элемент относится к непрерывной части системы и описывается «обыкновенной» передаточной функцией, рис.1.6.

Идеальный импульсный элемент или *идеальный квантователь* можно рассматривать как ключ, который замыкается в начале каждого периода квантования на бесконечно малое время. В результате на выходе ключа появляется эшелон импульсов, начинающихся при $t = 0$ и следующий с периодом квантования, равным T .

Импульсы имеют бесконечные амплитуды, а их площади равны квантуемому непрерывному сигналу в соответствующие моменты времени (рис.1.7).

Импульс, формируемый в некоторый момент $t = kT$ можно описать как произведение входного сигнала в момент времени $t = kT$ на дельта-функцию (функцию Дирака), сдвинутую по времени на величину kT :

$$x(kT)\delta(t - kT).$$

При этом, очевидно, что функция $\delta(t - kT)$ равна нулю во все моменты времени, отличные от kT , поэтому выходные импульсы существуют только в эти дискретные моменты времени.

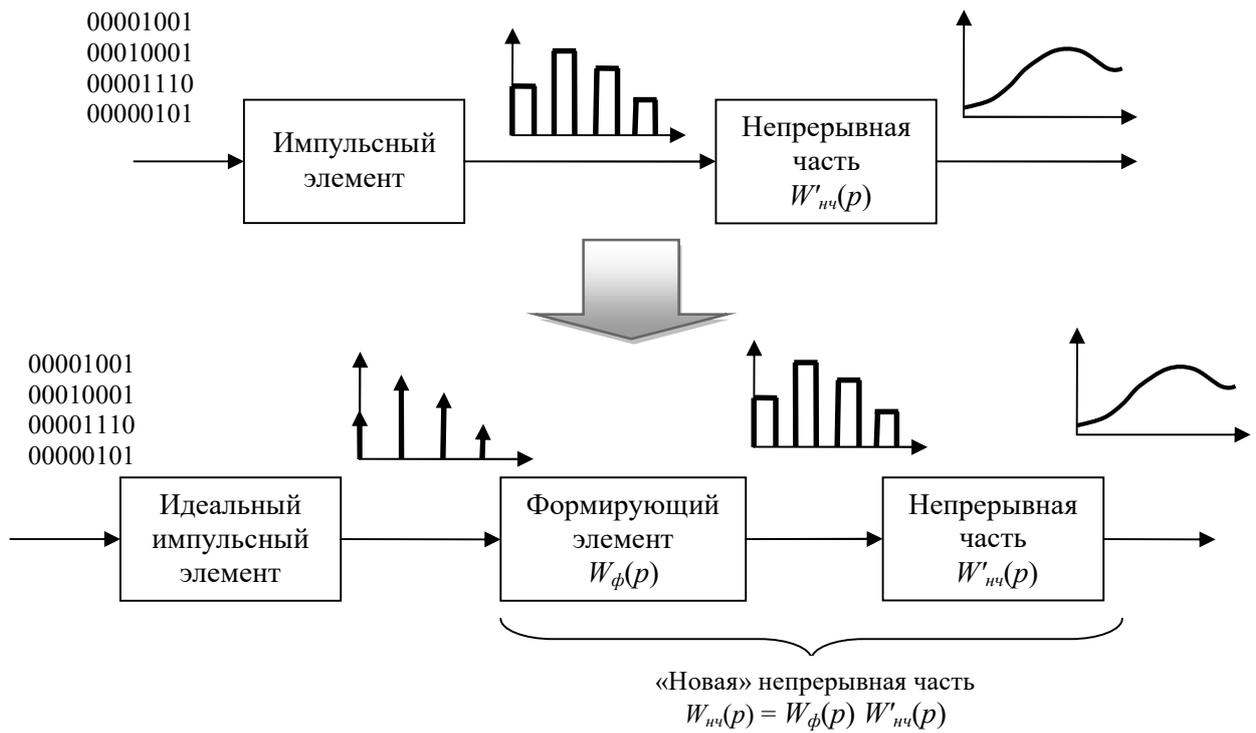


Рис.1.6. Эквивалентное преобразование импульсного элемента.

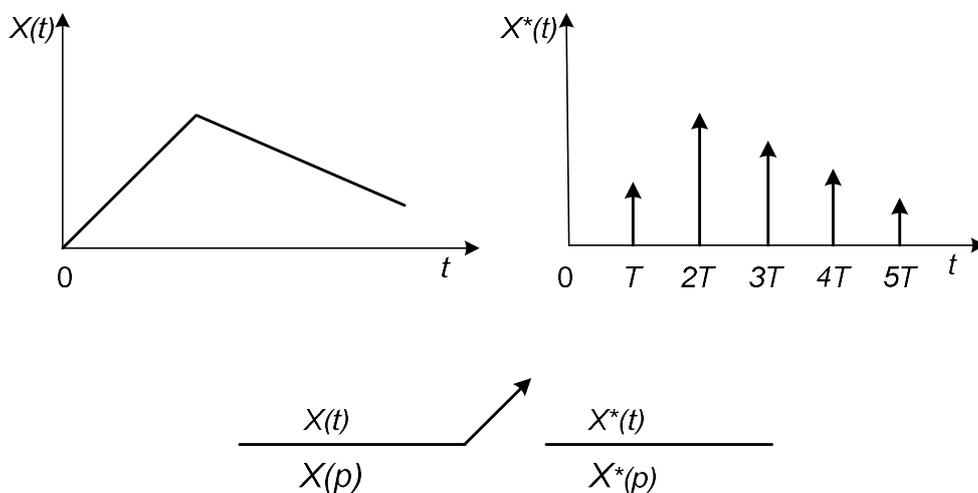


Рис.1.7. Идеальный квантователь.

Обозначив выходной сигнал идеального квантователя как $x^*(t)$, представим эшелон импульсов бесконечной суммой:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

или

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \dots + x(kT)\delta(t-kT) + \dots$$

Приведенные выражения обычно сложны для понимания. Действительно, почему выходной сигнал квантователя равен бесконечной сумме импульсов, тогда как ранее утверждалось, что на выходе – либо ноль, либо, если мы уж так точно попали в начало периода, – *один* импульс бесконечной амплитуды? Дело в том, что нас интересует не столько точное описание идеальных импульсов, сколько определение реакции непрерывной части на эти импульсы. В некоторый момент времени t непрерывная часть не только будет «отрабатывать» последний пришедший импульс, но и, в силу своей инерционности, продолжит «обработку» всех предыдущих импульсов, ранее поданных на нее. Поэтому эти импульсы также нас интересуют и должны присутствовать в описании сигнала. С другой стороны, импульсы, которые поступят позже, естественно, никакого влияния на систему *сейчас* не оказывают, поэтому, строго говоря, сумма – не бесконечна. Более корректным было бы такое описание выходного сигнала идеального квантователя:

для момента времени t , лежащего в диапазоне $nT < t < (n+1)T$, выходной сигнал идеального квантователя равен

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^n x(kT)\delta(t - kT).$$

Обозначим эшелон единичных импульсов как $\delta_T(t)$ или

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT).$$

С учетом этого выход квантователя можно представить как произведение непрерывного сигнала на входе $x(t)$ и эшелона единичных импульсов $\delta_T(t)$. Следовательно, квантователь можно рассматривать как модулятор с модулирующим сигналом $x(t)$ и эшелоним единичных импульсов в качестве несущего сигнала (рис.1.8).

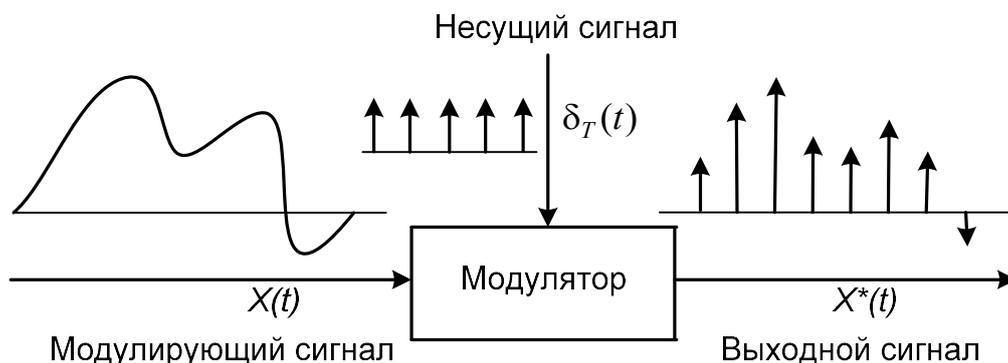


Рис.1.8. Импульсный квантователь как модулятор.

Рассмотрим прохождение $x^*(t)$ через непрерывную часть системы. Этот сигнал представляет собой модулированную последовательность дельта-функций. Если непрерывная часть линейна, то ее реакция будет представлять собой модулированную последовательность весовых функций. Таким образом,

для момента времени t , лежащего в диапазоне $nT < t < (n+1)T$, выходной сигнал непрерывной части будет равен

$$y(t) = \sum_{k=0}^n x(kT)\omega(t - kT),$$

где $\omega(t - kT)$ – весовая функция, сдвинутая по времени на kT .

В момент времени $t = nT$

$$y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)\omega(nT - kT).$$

Найдем z -преобразование сигнала $y(t)$:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n x(kT)\omega(nT - kT)z^{-n}.$$

Введем новую переменную $m = n - k \geq 0$, $m = 1, 2, 3, \dots$ Тогда

$$y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\omega(mT)z^{-m-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \omega(mT)z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = W(z)x(z),$$

где

$$W(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega(mT)z^{-m}$$

– дискретная передаточная функция непрерывной части системы.

Таким образом, дискретная передаточная функция непрерывной части системы равна z -преобразованию ее весовой функции.

Теперь стало окончательно понятно, для чего нам понадобились идеальные импульсы в качестве сигнала, подаваемого на непрерывную часть: реакция на них легко может быть найдена через весовую функцию системы.

Однако при этом следует иметь в виду, что в реальных системах никаких идеальных импульсов нет, поэтому непрерывная часть обязательно должна «дополняться» формирующим элементом. Формирующий элемент преобразует модулированный идеальный импульс в реальный импульс определенной формы. Поскольку изображение по Лапласу единичного идеального импульса равно единице, передаточная функция формирующего элемента определяется как изображение по Лапласу для единичного реального импульса.

Рассмотрим практически важный случай, когда для преобразования дискретного сигнала в непрерывный используется цифроаналоговый преобразователь (ЦАП). Его представляют в виде фиксатора данных, называемого экстраполятором нулевого порядка (zero-order holder). На выходе такого преобразователя сигнал сохраняется постоянным в течение периода квантования и ступенчато изменяется в момент поступления очередного импульса (рис.1.9).

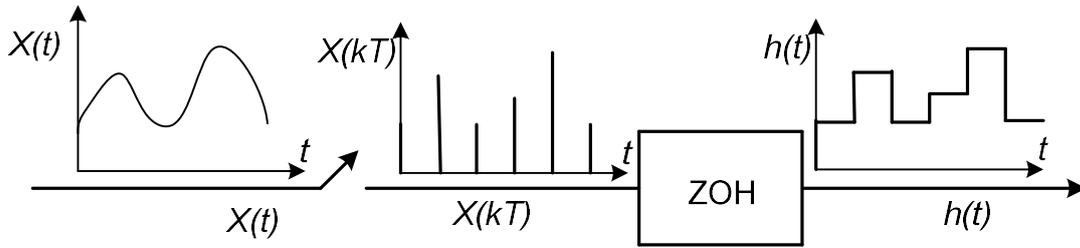


Рис.1.9. Квантователь и преобразователь нулевого порядка.

На рис.1.10 приведена реакция преобразователя нулевого порядка на единичный импульсный сигнал, позволяющая определить его передаточную функцию:

$$G_h(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT} = \frac{1 - e^{-pT}}{p}.$$

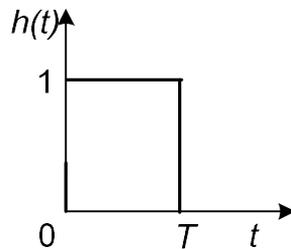


Рис.1.10. Реакция преобразователя нулевого порядка на единичный импульсный сигнал.

Таким образом, перед дискретизацией передаточной функции непрерывной части цифровой системы, необходимо домножить ее на $(1 - e^{-Tp}) / p$.

$$W_{нч}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} W'_{нч}(p).$$

При проведении самой дискретизации удобнее воспользоваться следующим выражением:

$$Z(W_{нч}(p)) = (1 - z^{-1}) Z\left(\frac{W'_{нч}(p)}{p}\right).$$

Здесь числитель дроби вынесен «за рамки» z -преобразования, а точнее заранее преобразован.

Дискретизация «непрерывных» передаточных функций обычно не требует нахождения весовых функций и проведения z -преобразований над ними. Исходная передаточная функция разлагается на сумму элементарных, для каждой из которых по таблице находится z -преобразование, которые потом складываются.

Пример 1.4. Получить дискретную передаточную функцию непрерывной части системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p(p+1)},$$

если на ее входе действует преобразователь нулевого порядка с периодом дискретизации, равным 1.

Решение. Воспользуемся полученной выше формулой:

$$W(z) = Z[W(p)] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{p^2(p+1)}\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right].$$

Используя таблицу, запишем z -преобразование каждого слагаемого полученного выражения, потом сложим их:

$$\begin{aligned} W(z) &= (1 - z^{-1}) \left[\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} \right] = \\ &= \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0,368z^{-1}} = \\ &= \frac{(-1 + 2z^{-1})(1 - 0,368z^{-1}) + (1 - z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368z^{-1})} = \frac{0,264z^{-2} + 0,368z^{-1}}{0,368z^{-2} - 1,368z^{-1} + 1} = \\ &= \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - 1,368z + 0,368}. \end{aligned}$$

В Matlab имеется функция `c2d` (Continue To Discrete), осуществляющая дискретизацию. В простейшем варианте ее вызова ей нужно передать передаточную функцию непрерывной системы, период дискретизации и метод преобразования. Метод преобразования определяется в зависимости от того, импульсы какой формы действуют на непрерывную систему. Так, например, если это идеальные импульсы, метод задается строкой `'imp'`, если импульсы формируются преобразователем нулевого порядка, метод задается строкой `'zoh'`. Отметим, что в последнем случае передаточную функцию не следует домножать на $(1 - e^{-Tp})/p$, это будет сделано «автоматически». Проверим работу функции на вышеприведенном примере.

Вариант 1: метод `'imp'`, $W_{nc}(z) = Z\left(\frac{W'_{nc}(p)}{p}\right) - Z\left(\frac{W'_{nc}(p)}{p}e^{-pT}\right)$:

```
W1 = tf(1, [1, 1, 0, 0])
Transfer function:
      1
-----
s^3 + s^2
W2 = W1; W2.InputDelay = 1
```

```

Transfer function:
          1
exp(-1*s) * -----
          s^3 + s^2

Wd1 = minreal(c2d(W1,1,'imp') - c2d(W2,1,'imp'))
Transfer function:
    0.3679 z + 0.2642
-----
z^2 - 1.368 z + 0.3679
Sampling time: 1

```

Вариант 2: метод 'imp', $W_{nc}(z) = (1 - z^{-1})Z\left(\frac{W'_{nc}(p)}{p}\right)$:

```

zd = tf(1,[1 0],1)
Transfer function:
1
-
z

Wd2 = minreal((1-zd)*c2d(W1,1,'imp'))
Transfer function:
    0.3679 z + 0.2642
-----
z^2 - 1.368 z + 0.3679
Sampling time: 1

```

Вариант 3: метод 'zoh':

```

W = tf(1,[1,1,0]);
Transfer function:
    1
-----
s^2 + s

Wd3 = c2d(W,1,'zoh')
Transfer function:
    0.3679 z + 0.2642
-----
z^2 - 1.368 z + 0.3679
Sampling time: 1

```

1.5. Дискретные модели в пространстве состояний

Стационарная дискретная система (система, параметры которой не зависят от времени) может быть представлена следующими уравнениями состояния и выхода:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k),$$

где

$\mathbf{x}(k)$ – n-мерный вектор состояния;
 $\mathbf{y}(k)$ – m- мерный вектор выходов;

$u(k)$ – r - мерный вектор входов;

A – матрица состояния размерами $n \times n$;

B – матрица входов размерами $n \times r$;

C – матрица выходов размерами $n \times m$;

D – $m \times r$ матрица прямой передачи с входа на выход (матрица обхода) размерами $m \times r$.

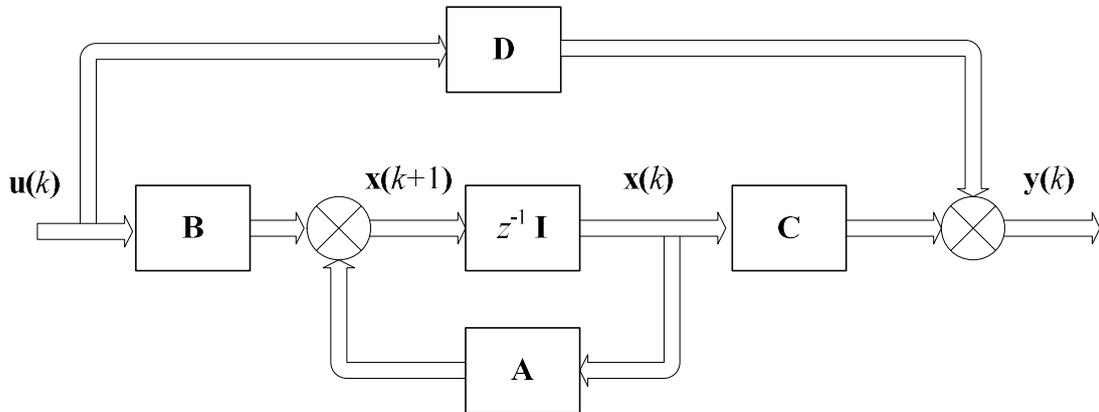


Рис.1.11. Блок-диаграмма линейной стационарной дискретной СУ.

Канонические формы уравнений состояния дискретной системы

Имеется много способов получения модели дискретной системы в пространстве состояний. Рассмотрим дискретную систему, описываемую разностным уравнением

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) = \\ = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n), \end{aligned}$$

где $u(k)$ и $y(k)$ – вход и выход системы при k -й выборке.

Запишем дискретную передаточную функцию системы:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Существуют четыре основных формы модели дискретной системы:

каноническая форма управляемости;

каноническая форма наблюдаемости;

диагональная каноническая форма;

жорданова каноническая форма.

Рассмотрим первые две формы.

Каноническая форма управляемости может быть получена методом прямого программирования.

Рассмотрим ПФ дискретной системы второго порядка, умножив ее числитель и знаменатель на искусственно введенную функцию $E(z)$:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \frac{E(z)}{E(z)}.$$

Запишем выражение для входной величины в виде:

$$U(z) = (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) E(z) = E(z) + a_1 z^{-1} E(z) + a_2 z^{-2} E(z).$$

Следовательно,

$$E(z) = U(z) - a_1 z^{-1} E(z) - a_2 z^{-2} E(z).$$

По этому уравнению строится основная часть схемы моделирования (рис.1.12). Оператор z^{-1} выполняет задержку на один период дискретизации.

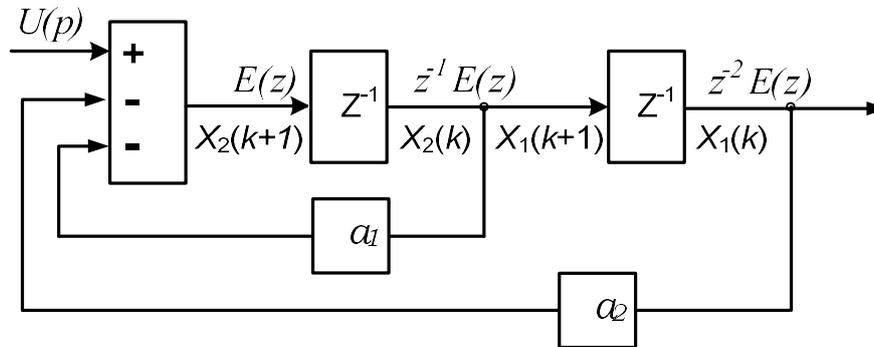


Рис.1.12. Схема моделирования: уравнение состояний.

Запишем выражение для выходной величины:

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) E(z) = b_0 E(z) + b_1 z^{-1} E(z) + b_2 z^{-2} E(z).$$

Дополнив схему, приведенную на рис.1.12 необходимыми элементами, получим полную схему моделирования дискретной системы, рис.1.13.

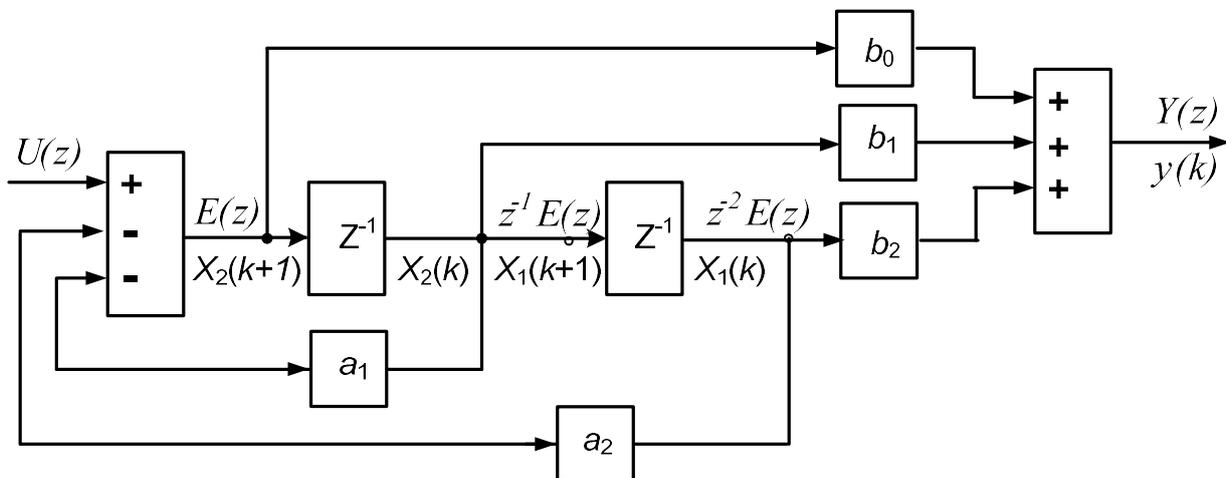


Рис.1.13. Полная схема моделирования.

С помощью схемы моделирования составим уравнения состояния и уравнение выхода:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k); \\ x_2(k+1) = -a_2 x_1(k) - a_1 x_2(k) + u(k). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(k) &= b_2 x_1(k) + b_1 x_2(k) + b_0 x_2(k+1) = \\ &= b_2 x_1(k) + b_1 x_2(k) + b_0 [-a_2 x_1(k) - a_1 x_2(k) + u(k)] = \\ &= (b_2 - a_2 b_0) x_1(k) + (b_1 - a_1 b_0) x_2(k) + b_0 u(k). \end{aligned}$$

Запишем уравнения в развернутой матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = [b_2 - a_2 b_0 \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k).$$

Сформируем матрицы модели в пространстве состояний:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = [b_2 - a_2 b_0 \quad b_1 - a_1 b_0]; \quad \mathbf{D} = b_0.$$

Сформулируем общие правила записи матриц модели в канонической форме управляемости, справедливые для всех случаев, когда порядок числителя исходной передаточной матрицы меньше порядка знаменателя. Продемонстрируем правила на примере системы с передаточной функцией

$$G(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}.$$

1) в последней строке матрицы \mathbf{A} находятся коэффициенты полинома знаменателя, записанного по степеням оператора z , начиная со свободного члена, взятые со знаком минус. Остальные элементы матрицы \mathbf{A} равны нулю, кроме элементов, расположенных над главной диагональю – они равны единице:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix};$$

2) матрица \mathbf{B} представляет собой столбец, последний элемент которого равен единице, остальные элементы – нулевые:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

3) элементы матрицы \mathbf{C} – коэффициенты полинома числителя, начиная со свободного члена, взятые со знаком плюс:

$$\mathbf{C} = [b_3 \quad b_2 \quad b_1];$$

4) матрица \mathbf{D} равна нулю

$$\mathbf{D} = 0.$$

Запишем, используя полученные матрицы, уравнения состояния и выхода:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k); \\ x_2(k+1) = x_3(k); \\ x_3(k+1) = -a_3x_1(k) - a_2x_2(k) - a_1x_3(k) + u(k); \\ y(k) = b_3x_1(k) + b_2x_2(k) + b_1x_3(k). \end{cases}$$

Каноническая форма наблюдаемости

Пусть, по-прежнему

$$G(z) = \frac{b_1z^2 + b_2z + b_3}{z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3}}.$$

Правила формирования матриц в канонической форме наблюдаемости:

1) матрица состояний \mathbf{A} в канонической форме наблюдаемости – это транспонированная матрица состояний \mathbf{A} в канонической форме управляемости:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix};$$

2) матрица \mathbf{B} представляет собой столбец, элементы которого – коэффициенты полинома числителя, начиная со свободного члена, взятые со знаком плюс:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix};$$

3) матрица \mathbf{C} представляет собой строку, последний элемент которого равен единице, остальные элементы – нулевые:

$$\mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1];$$

4) матрица \mathbf{D} равна нулю.

$$\mathbf{D} = 0.$$

Запишем, используя полученные матрицы, уравнения состояния и выхода:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -a_3x_3(k) + b_3u(k); \\ x_2(k+1) = x_1(k) - a_2x_3(k) + b_2u(k); \\ x_3(k+1) = x_2(k) - a_1x_3(k) + b_1u(k); \\ y(k) = x_3(k). \end{cases}$$

1.6. Задание

Объект управления описывается передаточной функцией

$$G_o(p) = \frac{k}{p(p+a_1)(p+a_2)}.$$

Управляющий сигнал формируется цифроаналоговым преобразователем с периодом дискретизации T .

Числовые значения a_0 , a_1 , k и T берутся из таблицы 1.4.

Таблица 1.4

Исходные данные для выполнения задания

№ варианта	k	a_1	a_2	T
1	2	4	36	0,1
2	4	1,6	30	0,05
3	1,1	2,0	55	0,2
4	1,5	2,8	75	0,08
5	1,3	3,4	90	0,4
6	1,6	7,0	55	0,01
7	1,2	6,0	80	0,3
8	4,5	1,2	22	0,06
9	7,5	1,8	50	0,5
10	2,1	7,0	76	1
11	5,2	1,4	26	0,15
12	8,0	1,0	45	0,25
13	1,5	2,6	70	0,07
14	1,2	3,0	80	0,04
15	3,9	8,0	32	0,45
16	6,0	1,6	40	0,65
17	9,0	2,2	60	0,75
18	3,2	9,0	96	0,07
19	7,5	1,4	30	0,16
20	3,5	8,0	75	0,12
21	5,2	1,2	26	0,48
22	1,3	2,4	65	0,52
23	2,8	10	83	0,11

Требуется:

1) найти дискретную передаточную функцию непрерывной части системы (включая ЦАП) с помощью таблицы z -преобразований элементарных функций. Результат проверить в Matlab (см. п. 1.4);

2) по дискретной передаточной функции записать разностное уравнение, связывающее вход и выход системы;

3) построить модели непрерывной части системы в пространстве состояний в канонических формах управляемости и наблюдаемости (блок-схемы), записать матрицы и уравнения состояний и выхода (см. п. 1.5).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ НА ВХОДНОЙ ВОЗДЕЙСТВИЕ

2.1. Численное решение разностного уравнения высокого порядка

Необходимый теоретический материал приведен в п. 1.2. Поэтому ограничимся здесь примером.

Пример 2.1. Непрерывная часть системы описывается передаточной функцией

$$W'_{nc}(p) = \frac{2}{(p+1)(2p+1)}.$$

Управляющий сигнал формируется цифроаналоговым преобразователем с периодом дискретизации $T = 1$ с.

Требуется определить реакцию непрерывной части на входной (цифровой) сигнал $u = e^{-t}$.

После необходимых преобразований (которые здесь мы опустим) получена дискретная передаточная функция непрерывной части

$$W_{nc}(z) = \frac{0,3096z^{-1} + 0,1878z^{-2}}{1 - 0,9744z^{-1} + 0,2231z^{-2}} = \frac{0,3096z + 0,1878}{z^2 - 0,9744z + 0,2231}.$$

Разностное уравнение:

$$y(k) - 0,9744y(k-1) + 0,2231y(k-2) = 0,3096u(k-1) + 0,1878u(k-2).$$

Выразим текущее значение выходной величины:

$$y(k) = 0,9744y(k-1) - 0,2231y(k-2) + 0,3096u(k-1) + 0,1878u(k-2).$$

```
Wo=tf(2,[2 3 1])
Cd=c2d(Wo,1,'zoh')
```

```
Transfer function:
      2
```

```
-----
2 s^2 + 3 s + 1
```

```
Transfer function:
```

```
  0.3096 z + 0.1878
```

```
-----
z^2 - 0.9744 z + 0.2231
```

```
Sampling time (seconds): 1
```

Построим переходную характеристику дискретной системы тремя способами:

1) по передаточной функции с помощью функции `lsim`:

```
Wz = tf([.3096 .1878],[1 -.9744 .2231],1);
```

```
t1 = 0:15;
```

```
u1 = exp(-t1);
```

```

y1 = lsim(Wz,u1,t1);
2) непосредственно решая разностное уравнение
t2 = -2:15;
u2 = [0 0, u1];
y2 = zeros(size(u2));
for i=3:18
    y2(i) = .3096*u2(i-1) + .1878*u2(i-2) + ...
           .9744*y2(i-1) - .2231*y2(i-2);
end
figure(1)
plot(t1,u1,t1,y1,t2,y2,'o'), grid

```

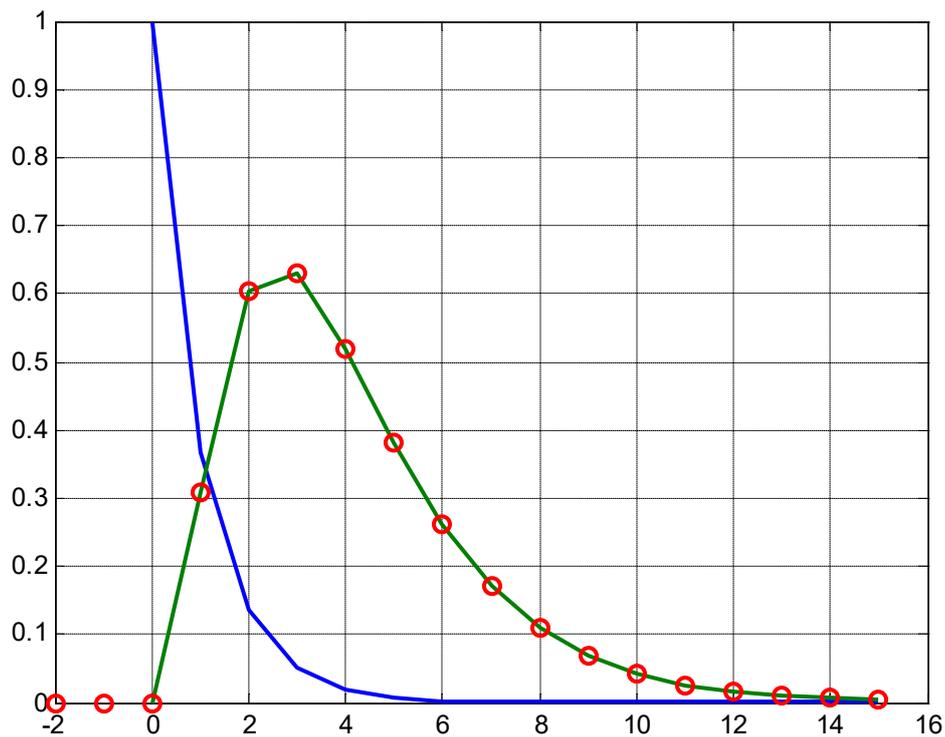


Рис.2.1. Результаты решения разностного уравнения (способы1,2).

```

3) с помощью функции filter:
num = [0 .3096 .1878];
den = [1 -.9744 .2231];
y3 = filter(num,den,u2);
figure(2)
plot(t1,u1,t2,y3), grid

```

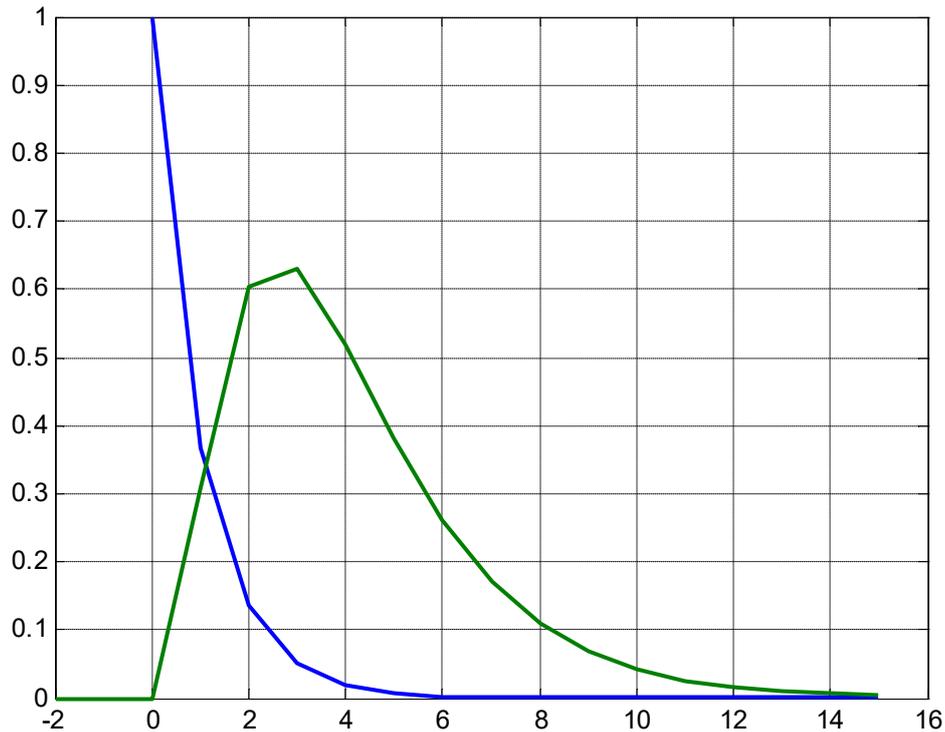


Рис.2.2. Результаты решения разностного уравнения (способ 3).

Функция `filter`, вызванная в виде `Y = FILTER(B, A, X)` решает разностное уравнение, заданное векторами A , B при входном воздействии, заданном последовательностью X :

$$a(1)y(n) = b(1)x(n) + b(2)x(n-1) + \dots + b(n_b+1)x(n-n_b) - a(2)y(n-1) - \dots - a(n_a+1)y(n-n_a).$$

Поскольку в нашем разностном уравнении отсутствуют слагаемые $u(k)$ и $u(k-1)$, вектор коэффициентов числителя начинается нулем.

2.2. Использование z-преобразования

Зная z -изображение входного сигнала $U(z)$ и передаточную функцию системы $W(z)$, можно найти z -изображение выходного сигнала $Y(z)$:

$$Y(z) = W(z)U(z).$$

Для определения $y(t)$ требуется осуществить обратное z -преобразование. Для этого естественно воспользоваться таблицами z -преобразования элементарных функций. Разложив $Y(z)$ на сумму элементарных функций, находим оригиналы каждой из них. Складывая оригиналы элементарных функций, получаем $y(t)$.

В большинстве случаев $Y(z)$ является дробно-рациональной функцией и раскладывается на сумму простых дробей.

Для того, чтобы разложить $Y(z)$ на простые дроби, нужно определить полюса и записать $Y(z)$ в виде:

$$Y(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}.$$

В случае, когда нет кратных полюсов, т.е. все корни простые, и имеется хотя бы один нуль в начале координат (т.е. $b_m = 0$), необходимо обе части $Y(z)$ разделить на z и затем разложить $Y(z)/z$ на простые дроби:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} + \dots + \frac{a_n}{z - p_n}.$$

Коэффициент a_i может быть определен путем умножения обеих частей последнего уравнения на $z - p_i$ и принятия $z = p_i$. Это обратит в нуль все слагаемые в правой части за исключением i -го, в котором множитель $z - p_i$ сократится со знаменателем. Т.о., формула для a_i принимает вид:

$$a_i = \left[(z - p_i) \frac{Y(z)}{z} \right]_{z=p_i}.$$

Если $Y(z)/z$ содержит кратный корень, например двойной при $z = p_i$ и больше никаких полюсов, то $Y(z)/z$ будет записано в виде

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{c_1}{(z - p_1)^2} + \frac{c_2}{z - p_1}.$$

Коэффициенты разложения определяются так:

$$c_1 = \left[(z - p_i)^2 \frac{Y(z)}{z} \right]_{z=p_i}; \quad c_2 = \left\{ \frac{d}{dz} \left[(z - p_i)^2 \frac{Y(z)}{z} \right] \right\}_{z=p_i}.$$

Пример 2.2. Рассмотрим функцию

$$Y(z) = \frac{2z^3 + z}{(z - 2)^2(z - 1)}.$$

Запишем это выражение в виде:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z^2 + 1}{(z - 2)^2(z - 1)}.$$

Разложим на сумму дробей:

$$\frac{2z^2 + 1}{(z - 2)^2(z - 1)} = \frac{c_1}{(z - 2)^2} + \frac{c_2}{z - 2} + \frac{c_3}{z - 1}.$$

Умножим обе части на $(z-2)^2$ и подставим $z=2$:

$$c_1 = \left. \frac{2z^2+1}{z-1} \right|_{z=2} = \frac{2 \cdot 2^2 + 1}{2-1} = 9.$$

Умножим обе части на $z-1$ и подставим $z=1$:

$$c_3 = \left. \frac{2z^2+1}{(z-2)^2} \right|_{z=1} = \frac{2 \cdot 1^2 + 1}{(1-2)^2} = 3.$$

Найдем производную соответствующего выражения и недостающий коэффициент:

$$\frac{d}{dz} \left[(z-2)^2 \frac{Y(z)}{z} \right] = \frac{d}{dz} \left[\frac{2z^2+1}{z-1} \right] = \frac{4z - (2z^2+1)}{(z-1)^2};$$

$$c_2 = \left\{ \left. \frac{d}{dz} \left[(z-2)^2 \frac{Y(z)}{z} \right] \right\}_{z=2} = \left[\frac{4z - (2z^2+1)}{(z-1)^2} \right]_{z=2} = \frac{4 \cdot 2 - (2 \cdot 2^2 + 1)}{(2-1)^2} = -1.$$

Окончательно запишем:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{9}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + \frac{3}{z-1};$$

$$Y(z) = \frac{9z}{(z-2)^2} - \frac{z}{z-2} + \frac{3z}{z-1} = \frac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} - \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{3}{1-z^{-1}}.$$

Обратное z -преобразование отдельных слагаемых выбираем из таблицы:

$$Z^{-1} \left[\frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} \right] = k(2k^{-1});$$

$$Z^{-1} \left[\frac{1}{1-2z^{-1}} \right] = 2^k;$$

$$Z^{-1} \left[\frac{1}{1-z^{-1}} \right] = 1^k = 1.$$

Следовательно:

$$x(k) = 9k(2k^{-1}) - 2^k + 3, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Пример 2.3. Запишем функцию

$$Y(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2}.$$

в виде суммы дробей:

$$\frac{z+2}{(z-2)z^2} = \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z}.$$

Умножим обе части на $z-2$ и подставим $z=2$:

$$c_1 = \left. \frac{z+2}{z^2} \right|_{z=2} = \frac{2+2}{2^2} = 1.$$

Умножим обе части на z^2 и подставим $z=0$:

$$c_2 = \left. \frac{z+2}{z-2} \right|_{z=0} = \frac{0+2}{0-2} = -1.$$

Найдем производную соответствующего выражения и недостающий коэффициент:

$$\frac{d}{dz} [z^2 Y(z)] = \frac{d}{dz} \left[\frac{z+2}{z-2} \right] = \frac{1 \cdot (z-2) - (z+2) \cdot 1}{(z-2)^2} = \frac{-4}{(z-2)^2};$$

$$c_3 = \left\{ \frac{d}{dz} [z^2 Y(z)] \right\}_{z=0} = \left[\frac{-4}{(z-2)^2} \right]_{z=0} = -1.$$

Окончательно запишем:

$$Y(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} = \frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}} - z^{-2} - z^{-1}.$$

В Matlab разложить отношение полиномов на простые множители можно с помощью функции `residue`. Для рассматриваемого примера вызов функции будет следующим:

```
b=[1 2];  
a=[1 -2 0 0];  
[r,p,k]=residue(b,a)
```

Обратное z -преобразование отдельных слагаемых выбираем из таблиц:

$$Z^{-1} \left[\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}} \right] = \begin{cases} 2^{k-1} & k=1, 2, 3, \dots \\ 0 & k \leq 0; \end{cases}$$

$$Z^{-1} [z^{-2}] = \begin{cases} 1, & k=2; \\ 0, & k \neq 2; \end{cases}$$

$$Z^{-1}[z^{-1}] = \begin{cases} 1, & k=1; \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k=0, 1; \\ 1, & k=2; \\ 2^{k-1}, & k=3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

Проверим этот результат методом прямого деления:

$$Y(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2} = \frac{z+2}{z^3-2z^2} = \frac{z^{-2}+2z^{-3}}{1-2z^{-1}}.$$

В результате получим разложение:

$$\begin{aligned} Y(z) &= z^{-2} + 4z^{-3} + 8z^{-4} + 16z^{-5} + 32z^{-6} + \dots \\ &= z^{-2} + (2^{3-1})z^{-3} + (2^{4-1})z^{-4} + (2^{5-1})z^{-5} + (2^{6-1})z^{-6} + \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y(k) = \begin{cases} 0, & k=0, 1; \\ 1, & k=2; \\ 2^{k-1}, & k=3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

Существуют и другие методы определения оригинала z -изображения, в частности *метод прямого деления*.

Сутью метода прямого деления является разложение $Y(z)$ в ряд по степеням z . Непосредственно из определения z -преобразования следует, что

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = y(0) + y(T)z^{-1} + y(2T)z^{-2} + \dots + y(kT)z^{-k} \dots,$$

или

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + y(k)z^{-k} \dots$$

Если $Y(z)$ дано в виде отношения двух полиномов, то разложение в бесконечный степенной ряд по z^{-1} может быть выполнено путем деления числителя на знаменатель, причем и числитель и знаменатель должны быть записаны по степеням z^{-1} . Если результирующий ряд сходится, то коэффициенты при слагаемых z^{-k} есть значения $y(kT)$ временной последовательности или значения $y(k)$ числовой последовательности.

Пример 2.4. Найти $y(k)$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4$ для функции

$$Y(z) = \frac{5z + 2}{(z - 2)(z - 0,4)} = \frac{5z + 2}{z^2 - 2,4z + 0,8}$$

Вначале перепишем выражение в виде:

$$Y(z) = \frac{5z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 2,4z^{-1} + 0,8z^{-2}}$$

Теперь делим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 5z^{-1} + 2z^{-2} + 0z^{-3} + 0z^{-4} + 0z^{-5} & 1 - 2,4z^{-1} + 0,8z^{-2} \\ \hline 5z^{-1} - 12z^{-2} + 4z^{-3} & \\ \hline 14z^{-2} - 4z^{-3} & \\ \hline 14z^{-2} - 33,6z^{-3} + 11,2z^{-4} & \\ \hline 29,6z^{-3} - 11,2z^{-4} & \\ \hline 29,6z^{-3} - 71,04z^{-4} + 23,68z^{-5} & \\ \hline 59,84z^{-4} - 23,68z^{-5} & \\ \hline 59,84z^{-4} - 143,62z^{-5} + 47,8z^{-6} & \\ \hline 119,94z^{-5} + \dots & \end{array}$$

Таким образом, получили

$$Y(z) = 5z^{-1} + 14z^{-2} + 29,6z^{-3} + 59,84z^{-4} + 119,94z^{-5} + \dots$$

Сравнивая этот ряд с выражением $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$, получаем следующие значения

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 5; \quad y(2) = 14; \quad y(3) = 29,6; \quad y(4) = 59,84; \quad y(5) = 119,94.$$

Из примера следует, что метод прямого деления может быть использован вручную, если требуются только несколько первых членов дискретной последовательности.

2.3. Решение уравнений состояния

Рассмотрим решение уравнений состояния и выхода дискретной системы

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k);$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k).$$

рекурсивным методом и с помощью z -преобразования.

Рекурсивный метод

Решение уравнение состояния для любого положительного целого k может быть получено непосредственно:

$k = 0$:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0).$$

$k = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \\ &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1). \end{aligned}$$

$k = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \\ &= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2). \end{aligned}$$

Распространяя эту процедуру на произвольное k , получим

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(j), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Из формулы следует, что реакция системы в произвольный момент состоит из двух частей, причем одна представляет собой вклад начального состояния $\mathbf{x}(0)$, а другая – вклад входного воздействия $\mathbf{u}(j)$, где $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Выход $y(k)$ задается следующим образом:

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(j) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k).$$

Пример 2.5. Рассмотрим дискретную систему с передаточной функцией

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}.$$

Составим схему моделирования (рис.2.3).

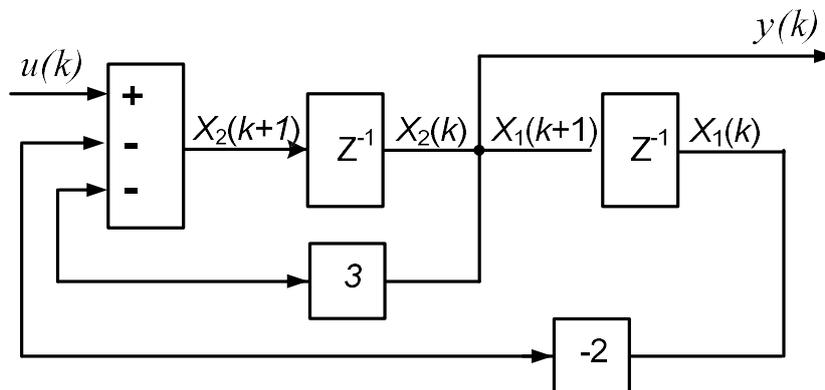


Рис. 2.3. Структурная схема модели.

Запишем уравнения состояния и уравнение выхода:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k);$$

$$y(k) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Выпишем матрицы модели:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 1]; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Далее решим уравнения состояния итерационным методом, полагая, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ и $u(k) = 1$ для всех k .

$k = 0$:

$$y(0) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0;$$

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$k = 1$:

$$y(1) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1;$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$k = 2$:

$$y(2) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 4;$$

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

$k = 3$:

$$y(3) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix} = 11;$$

$$\begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

$k = 4$:

$$y(4) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 11 \\ 26 \end{bmatrix} = 26;$$

$$\begin{bmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 26 \\ 57 \end{bmatrix}.$$

$k = 5$:

$$y(5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 57 \end{bmatrix} = 57;$$

$$\begin{bmatrix} x_1(6) \\ x_2(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 57 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 57 \\ 120 \end{bmatrix};$$

$$y(6) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(6) \\ x_2(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 57 \\ 120 \end{bmatrix} = 120.$$

Метод z-преобразования

Рассмотрим решение уравнений состояния

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

методом z-преобразования.

Производя прямое z-преобразование уравнения состояния с учетом теоремы сдвига а именно: $Z[x(k+1)] = z[X(z) - x(0)] = zX(z) - zx(0)$, получим

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z),$$

где $\mathbf{X}(z) = Z[\mathbf{x}(k)]$ и $\mathbf{U}(z) = Z[\mathbf{u}(k)]$.

Далее используем единичную матрицу \mathbf{I} при приведении подобных членов:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z).$$

Следовательно, решение уравнения состояния имеет вид:

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z).$$

Выполняя обратное z-преобразование обеих частей этого уравнения, получим:

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1} \left[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \right] \mathbf{x}(0) + Z^{-1} \left[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \right].$$

Сравнивая это уравнение с рекурсивным уравнением, заключаем, что

$$\mathbf{A}^k = Z^{-1} \left[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \right]$$

и

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(j) = Z^{-1} \left[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \right],$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

Нужно отметить, что решение методом z -преобразования включает процедуру инвертирования матрицы $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$, которая может быть выполнена аналитически или с помощью компьютерной программы. Решение также требует выполнения обратного z -преобразования выражений $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$ и $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(z)$.

Пример 2.6. Решим уравнения состояния из предыдущего примера с помощью z -преобразования. С этой целью воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(z) = \\ &= \frac{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^+}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{x}(0) + \frac{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^+}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{B}U(z).\end{aligned}$$

Находим матрицу $[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]$, а затем ей союзную $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^+$:

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z-3 \end{bmatrix}; \quad \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^2 - 3z + 2;$$

$$\Delta_{11} = z - 3; \quad \Delta_{12} = -2; \quad \Delta_{21} = 1; \quad \Delta_{22} = z;$$

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ и изображение ступенчатой функции равно $U(z) = \frac{z}{z-1}$, получим:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(z) &= \frac{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^+}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{B}U(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \begin{bmatrix} z-3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z}{(z^2 - 3z + 2)(z-1)} \\ \frac{z^2}{(z^2 - 3z + 2)(z-1)} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Выходная величина:

$$Y(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}U(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{z}{(z^2 - 3z + 2)(z - 1)} \\ \frac{z^2}{(z^2 - 3z + 2)(z - 1)} \end{bmatrix} = \frac{z^2}{(z^2 - 3z + 2)(z - 1)} =$$

$$= \frac{z^2}{(z - 1)^2(z - 2)} = \frac{-z}{(z - 1)^2} + \frac{-2z}{z - 1} + \frac{2z}{z - 2} = \frac{-z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{-2}{1 - z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}}.$$

Далее по таблицам находим:

$$y(k) = -k - 2 + 2(2)^k.$$

Найдем числовую последовательность:

$$y(0) = -0 - 2 + 2(2)^0 = 0; \quad y(1) = -1 - 2 + 2(2)^1 = 1;$$

$$y(2) = -2 - 2 + 2(2)^2 = 4; \quad y(3) = -3 - 2 + 2(2)^3 = 11;$$

$$y(4) = -4 - 2 + 2(2)^4 = 26; \quad y(5) = -5 - 2 + 2(2)^5 = 57;$$

$$y(6) = -6 - 2 + 2(2)^6 = 120; \quad y(7) = -7 - 2 + 2(2)^7 = 247.$$

Получена та же числовая последовательность, что и в предыдущем примере.

Построим график полученной последовательности в MATLAB:

```
k1=0:6;
y1=[0 1 4 11 26 57 120];
plot(k1,y1,'.','-',k1,y1,'-')
```

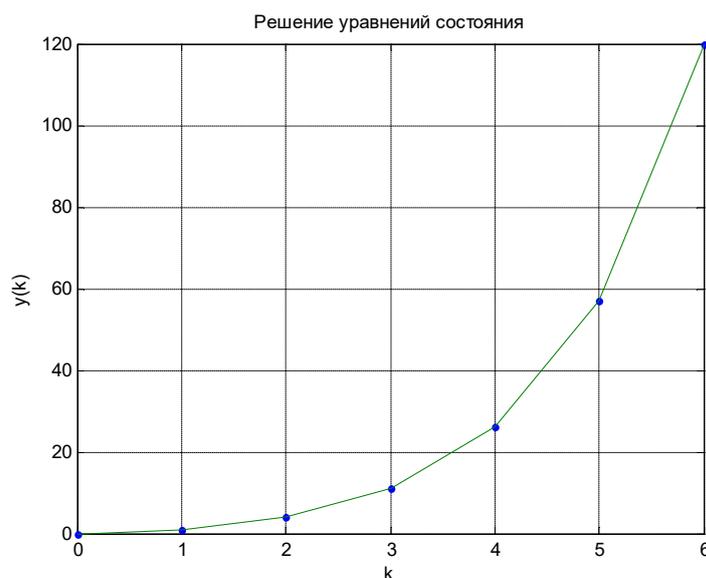


Рис 2.4. Результаты решения уравнений состояния.

2.4. Задание

При выполнении задания к предыдущей работе (п.1.6) найдены:

- дискретная передаточная функция непрерывной части системы (включая ЦАП);
- разностное уравнение, связывающее вход и выход системы;
- модели непрерывной части системы в пространстве состояний в канонических формах управляемости и наблюдаемости.

На вход непрерывной части системы подается сигнал $u(t) = e^{-t}$.

Требуется определить реакцию непрерывной части системы на входной сигнал различными способами:

- 1) путем решения разностного уравнения (см. п.2.2);
- 2) с использованием z -преобразования как разложением изображения $Y(z)$ на простые дроби, так и методом прямого деления (см. п. 2.2);
- 3) решением уравнений состояния как рекурсивным методом так и с помощью z -преобразования (можно задействовать любую модель: в канонической форме управляемости или в канонической форме наблюдаемости) (см. п. 2.3).

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

3.1. Передаточная функция замкнутой дискретной системы управления

Структура замкнутой цифровой системы автоматического регулирования показана на рис. 3.1.

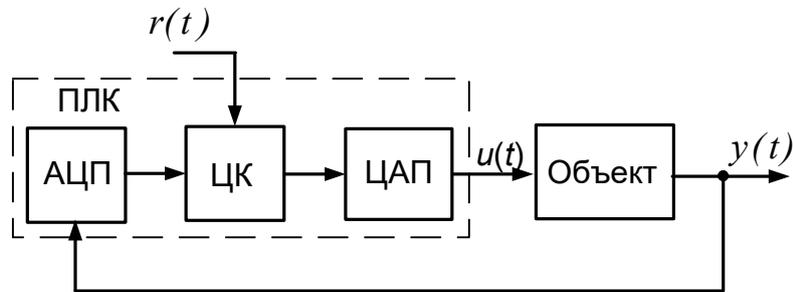


Рис.3.1. Структура цифровой системы автоматического регулирования.

В большинстве случаев управление объектом осуществляет программируемый логический контроллер (ПЛК). В составе ПЛК имеются:

- аналого-цифровой преобразователь (АЦП), преобразующий аналоговый сигнал обратной связи, формируемый измерительным преобразователем выходной (регулируемой) величины объекта, в цифровой код. Стоит отметить, что в последнее время многие измерительные преобразователи самостоятельно решают эту задачу и передают ПЛК уже готовый цифровой код по сетевому интерфейсу, однако сути дела это не меняет: мы просто условно отнесли АЦП измерительного преобразователя в ПЛК;

- цифровой контроллер, выполняющий алгоритм управления и вычисляющий управляющее воздействие. Сигнал задания $r(t)$ поступает в контроллер чаще всего уже в цифровом виде, либо рассчитывается непосредственно программой контроллера;

- цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), преобразующий выходной цифровой код в аналоговый сигнал управления объектом.

Под *объектом* здесь понимается совокупность технических средств, в которую помимо собственно объекта управления включаются также необходимая преобразовательная и усилительная аппаратура, а также измерительный преобразователь регулируемой величины. Сигнал $u(t)$ является входным сигналом для этой совокупности средств и в большинстве случаев подается на некоторый силовой преобразователь (например, преобразователь частоты). Многие современные преобразователи могут управляться по цифровому интерфейсу, тогда, как и в ранее рассмотренном случае с входным каналом, ЦАП силового преобразователя переносится в ПЛК условно.

Основную сложность при составлении модели цифровой системы регулирования представляет то обстоятельство, что разные устройства ее дискретной части могут работать с разными «скоростями», или «тактовыми частота-

ми». В целом ПЛК, как известно, работает циклически и его цикл включает следующие стадии:

- 1) измерение входных величин и отображение их в «образе процесса» (специальной области памяти) в виде значений входных переменных;
- 2) выполнение управляющей программы и формирование значений выходных переменных в «образе процесса»;
- 3) формирование выходных воздействий по значениям выходных переменных;
- 4) выполнение сервисных и диагностических функций, обмен по сети и т.д.

По большей части задачи 1, 3 и 4 стадии выполняются операционной системой контроллера.

Время цикла ПЛК чаще всего не фиксировано и зависит от сложности управляющей программы и от реальной ситуации, которая имеет место в текущий момент времени. ПЛК, как правило, обсуживает сразу несколько процессов управления, и в одни моменты времени требуется выполнение одного объема кода, в другие – другого. В целом можно сказать, что оценить время цикла с достаточной точностью практически невозможно.

Наиболее медленной частью ПЛК всегда является АЦП. Если ЦАП, как правило, работает «синхронно» с общим циклом ПЛК, т.е. успевает обновлять выходной сигнал на каждом цикле, то частота преобразования АЦП может быть существенно меньше частоты пересчета программы. В результате в большей части циклов программа использует «устаревшие» данные. Это далеко не всегда означает, что выходные сигналы не будут изменяться, пока не изменятся сигналы на входах, т.е. программа работает «вхолостую». В большинстве законов регулирования задействовано интегрирование, поэтому выходной сигнал регулятора будет изменяться даже при постоянном сигнале на входе.

Учитывая изложенное выше, напрашивается вывод, что построить адекватную математическую модель цифровой системы автоматического регулирования трудно, если возможно вообще. Выйти из положения можно, либо используя имитационное моделирование, либо путем построения упрощенных моделей на основе каких-то допущений.

Рассмотрим второй подход.

На практике очень часто встает вопрос о работоспособности и качестве работы цифровых систем регулирования, синтезированных методами теории непрерывных систем. Чаще всего функциональные блоки программы регулирования настраиваются как обычные аналоговые регуляторы, т.е. для них совершенно естественным образом задаются коэффициенты передачи, постоянные времени и т.д., рассчитанные известными методами без учета дискретного характера протекания процесса. Считается, что квантование по уровню совершенно не сказывается на качестве регулирования из-за большого количества уровней в цифровом сигнале, а квантование по времени приводит к некоторому ухудшению качества, причем это ухудшение будет тем меньше, чем больше частота дискретизации.

Очевидно, что оценить предельные отклонения поведения цифровой системы регулирования от поведения непрерывного эталона можно, заложив в модель самое «неблагоприятное» допущение, а именно то, что *управляющая программа пересчитывается и выход ЦАП обновляется с частотой обновления цифрового кода АЦП.*

Именно это допущение и положено в основу дальнейшего изложения.

Эквивалентная блок-схема замкнутой дискретной системы управления приведена на рис.3.2а. Здесь АЦП выполняет роль квантователя, ЦАП – экстраполятора нулевого порядка, который формирует непрерывный кусочно-постоянный управляющий сигнал $u(t)$, подаваемый на объект управления.

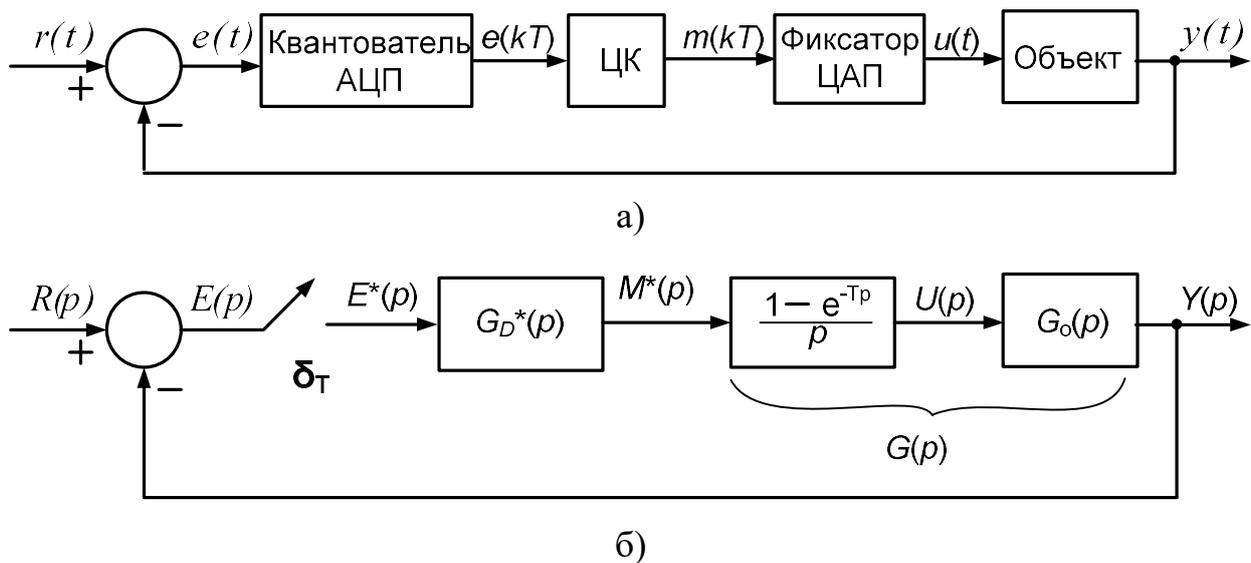


Рис.3.2. Блок-схема дискретной системы управления (а) и структурная схема модели системы (б).

На рис. 3.2б показана схема модели системы.

Передаточная функция (идеальная) цифрового контроллера обозначена как $G_D^*(p)$. В реальной системе цифровой контроллер будет решать разностное уравнение, в котором соотношение между входом и выходом задано с помощью дискретной передаточной функции $G_D(z)$.

В модели для упрощения квантуется не выходной сигнал измерительного преобразователя $y(t)$, а сигнал ошибки $e(t) = r(t) - y(t)$, что никак не сказывается на итоговом поведении.

Цифровой сигнал $e(kT)$ подается на цифровой контроллер, который обрабатывает дискретную последовательность $e(kT)$ по определенному алгоритму для получения сигнала $m(kT)$.

Объединяя ПФ экстраполятора нулевого порядка и объекта, получим:

$$G(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} G_o(p).$$

Передаточная функция замкнутой цифровой системы определяется так же, как и системы непрерывной:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}.$$

Заданные свойства замкнутой системы могут быть обеспечены соответствующим выбором $G_D(z)$. В общем случае $G_D(z)$ может иметь любую структуру.

3.2. Дискретная передаточная функция цифрового регулятора

Для получения дискретной ПФ регулятора нужно дискретизировать его уравнение. В основном дискретизация описания регулятора производится аналогично дискретизации описания непрерывной части системы. Действительно, АЦП для регулятора играет ту же роль, что ЦАП – для непрерывной части: он удерживает сигнал на неизменном уровне в течении периода квантования, т.е. является преобразователем нулевого порядка. Однако есть одно существенное отличие. Объект реагирует на выходной сигнал ЦАП только так, как он умеет реагировать, и изменить его реакцию мы никак не можем. С регулятором дело обстоит иначе. Хотя АЦП и выдает ступенчато изменяющийся сигнал, но проектировщикам системы хорошо известно, что на самом деле входной сигнал изменяется плавно. И это знание можно использовать, чтобы приблизить реакцию цифрового регулятора на ступенчатый сигнал к реакции непрерывного регулятора на плавно изменяющийся сигнал. Для этого нужно соответствующим образом дискретизировать непрерывный закон управления: вместо преобразователя нулевого порядка задействовать более сложные преобразователи. Рассмотрим преобразователь первого порядка (ФОН – first order holder) и интерполатор на основе билинейного преобразования Тастина.

Преобразователь первого порядка «соединяет» дискретные отчеты прямыми отрезками, рис. 3.3, т.е. «предполагает», что на интервале дискретизации сигнал изменяется с постоянной скоростью.

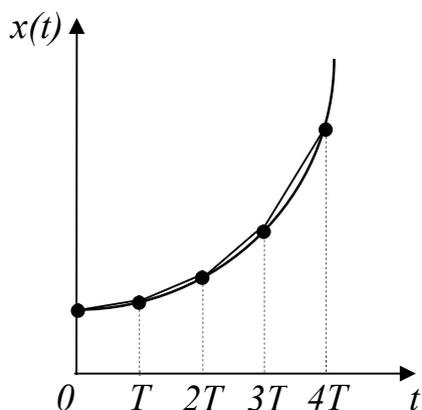


Рис.3.3. Работа преобразователя первого порядка.

Импульсы, формируемые таким преобразователем, имеют треугольную форму, а их амплитуды равны значениям сигнала в дискретные моменты вре-

мени. Передаточную функцию преобразователя найдем как изображение по Лапласу для единичного треугольного импульса (рис.3.4).

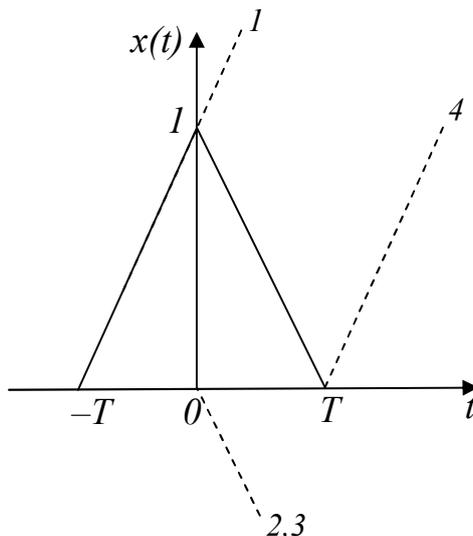


Рис.3.4. Единичный импульс преобразователя первого порядка и его формирование.

Как показано на рис. 3.4, единичный импульс может быть сформирован сложением четырех функций:

$$1) x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -T; \\ \frac{(t+T)}{T} & \text{при } t \geq -T. \end{cases}$$

Изображение по Лапласу: $x_1(p) = \frac{1}{Tp^2} e^{pT}$.

$$2,3) x_2(t) = x_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ -\frac{t}{T} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Изображение по Лапласу: $x_2(p) = x_3(p) = -\frac{1}{Tp^2}$.

$$4) x_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < T; \\ \frac{(t-T)}{T} & \text{при } t \geq T. \end{cases}$$

Изображение по Лапласу: $x_4(p) = \frac{1}{Tp^2} e^{-pT}$.

Таким образом,

$$x(p) = x_1(p) + x_2(p) + x_3(p) + x_4(p) = \frac{1}{Tp^2} ((e^{pT} + e^{-pT}) - 2).$$

Если выходные импульсы преобразователя подаются на некоторую «непрерывную часть» системы с передаточной функцией $W(p)$, то дискретная передаточная функция непрерывной части определится как

$$\begin{aligned}
 W(z) &= Z\left(\frac{1}{Tp^2}\left((e^{pT} + e^{-pT}) - 2\right)W(p)\right) = \\
 &= (z + z^{-1})Z\left(\frac{W(p)}{Tp^2}\right) - 2Z\left(\frac{W(p)}{Tp^2}\right) = \\
 &= \frac{z^2 + 1}{z}Z\left(\frac{W(p)}{Tp^2}\right) - 2Z\left(\frac{W(p)}{Tp^2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Продемонстрируем применение полученной формулы в Matlab. Пусть передаточная функция непрерывного регулятора

$$W(p) = \frac{2p + 1}{p + 1}.$$

```
W = tf([2 1],[1 1]);
```

Определим дискретную передаточную функцию регулятора с преобразователем первого порядка при частоте дискретизации 2 Гц по формуле (3.1).

Вспомогательная передаточная функция $1/Tp^2$:

```
q = tf(1, [0.5 0 0])
```

```
Transfer function:
```

```
1
-----
0.5 s^2
```

Вспомогательная передаточная функция $(z^2+1)/z$:

```
zz = tf([1 0 1],[1 0],.5)
```

```
Transfer function:
```

```
z^2 + 1
-----
z
```

```
Sampling time (seconds): 0.5
```

Дискретная передаточная функция регулятора:

```
Wz3 = minreal(zz*c2d(W*q,.5,'imp') - 2*c2d(W*q,.5,'imp'))
```

```
Transfer function:
```

```
1.787 z - 1.393
-----
z - 0.6065
```

```
Sampling time (seconds): 0.5
```

Эту же передаточную функцию можно получить непосредственно, путем указания метода интерполяции 'foh':

```
Wz1 = c2d(W,.5,'foh')
```

```
Transfer function:
```

```

1.787 z - 1.393
-----
z - 0.6065
Sampling time (seconds): 0.5

```

Преобразование Гастина формально представляет собой один из простейших способов численного интегрирования функций, заданных дискретными отсчетами, рис. 3.5.

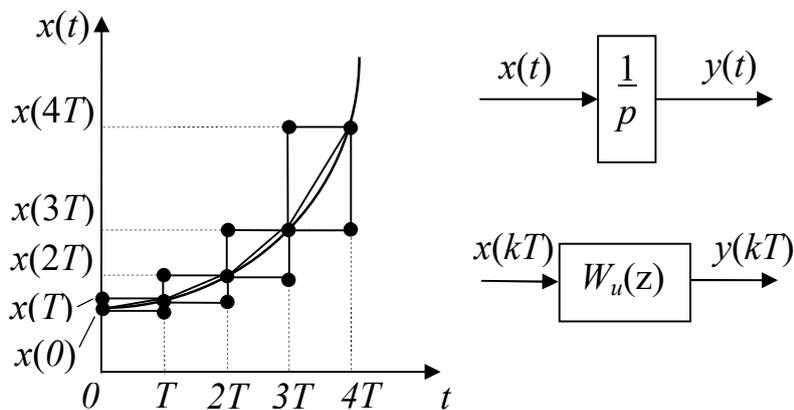


Рис.3.5. К нахождению дискретной передаточной функции интегратора.

Разностное уравнение и дискретная передаточная функция интегратора могут быть получены исходя из того, что «новое» значение на выходе интегратора можно определить как сумму «старого» значения и приращения площади под кривой, которое, в свою очередь, может быть найдено по-разному:

1) как произведение «старого» значения на входе на период дискретизации, тогда

$$y(kT) = y((k-1)T) + x((k-1)T)T,$$

откуда

$$y(kT) - y((k-1)T) = x((k-1)T)T,$$

$$y(kT)(1 - z^{-1}) = x(kT)z^{-1}T,$$

$$\frac{y(kT)}{x(kT)} = W(z) = \frac{z^{-1}T}{1 - z^{-1}} = \frac{T}{z - 1}.$$

Такой метод называется *прямым методом Эйлера*. Именно так работает дискретный интегратор, если сигнал на его входе сформирован преобразователем нулевого порядка.

Дифференцирование формально описывается оператором, обратным оператору интегрирования:

$$p \Rightarrow \frac{z-1}{T};$$

2) как произведение «нового» значения на входе на период дискретизации, тогда

$$y(kT) = y((k-1)T) + x(kT)T,$$

откуда

$$y(kT) - y((k-1)T) = x(kT)T,$$

$$y(kT)(1 - z^{-1}) = x(kT)T,$$

$$\frac{y(kT)}{x(kT)} = W(z) = \frac{T}{1 - z^{-1}} = \frac{zT}{z - 1}.$$

Такой метод называется *обратным методом Эйлера*.

Дискретное представление дифференцирования:

$$p \Rightarrow \frac{z-1}{zT};$$

3) методом трапеций. Приращение площади равно произведению среднего значения сигнала на входе $[x(kT) + x((k-1)T)]/2$ на период дискретизации, тогда

$$y(kT) = y((k-1)T) + [x(kT) + x((k-1)T)] \frac{T}{2},$$

откуда

$$y(kT) - y((k-1)T) = [x(kT) + x((k-1)T)] \frac{T}{2},$$

$$y(kT)(1 - z^{-1}) = x(kT)(1 + z^{-1}) \frac{T}{2},$$

$$\frac{y(kT)}{x(kT)} = W(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T}{2} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Данное выражение дискретной передаточной функции интегратора положено в основу преобразования Тастина, которое для произвольной передаточной функции $W(p)$ состоит в прямой замене оператора:

$$\frac{1}{p} \Rightarrow \frac{T}{2} \frac{z + 1}{z - 1}. \quad (3.2)$$

Отметим, что такая же дискретная модель интегратора будет получена и в случае использования преобразователя первого порядка, однако в общем случае (для произвольной $W(p)$) методы не эквивалентны, хотя и дают близкие результаты.

Оператор дифференцирования:

$$p \Rightarrow \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (3.3)$$

На рис. 3.6 показаны отклики аналогового регулятора с передаточной функцией $W(p) = \frac{2p+1}{p+1}$ и дискретных с преобразователями нулевого и первого порядков, а также преобразователем Тастина на синусоидальный входной сигнал.

Графики были построены с помощью следующей программы:

```

W = tf([2 1 ], [1 1]);
W0 = c2d(W, 0.5, 'zoh')

Transfer function:
2 z - 1.607
-----
z - 0.6065

Sampling time (seconds): 0.5

W1 = c2d(W, 0.5, 'foh')

Transfer function:
1.787 z - 1.393
-----
z - 0.6065

Sampling time (seconds): 0.5

W2 = c2d(W, 0.5, 'tustin')

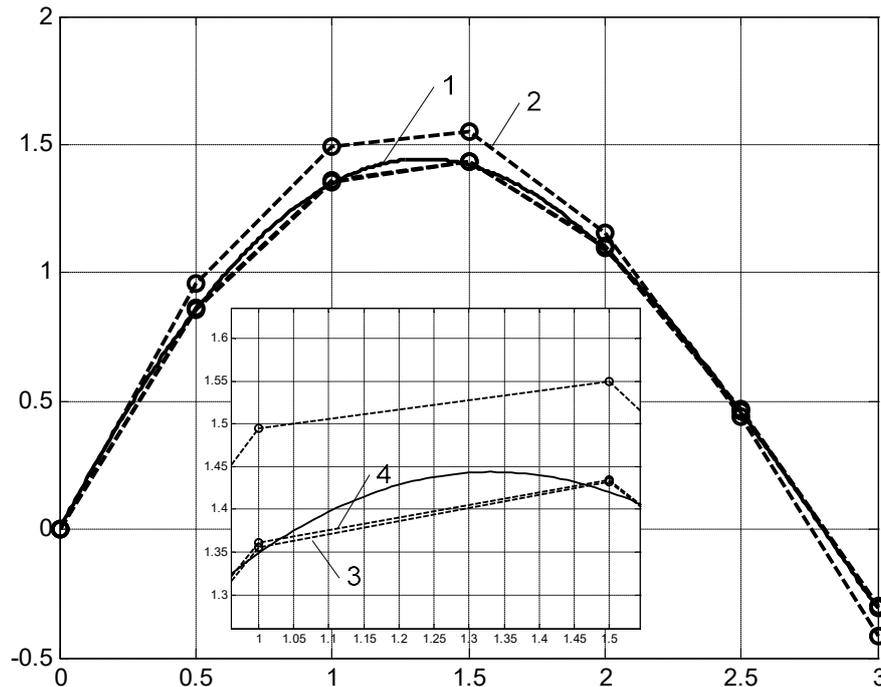
Transfer function:
1.8 z - 1.4
-----
z - 0.6

Sampling time (seconds): 0.5

t = 0:.01:3;
td = 0:.5:3;
u = sin(t);
ud = sin(td);
y = lsim(W, u, t);
y0 = lsim(W0, ud, td);
y1 = lsim(W1, ud, td);
y2 = lsim(W2, ud, td);
plot(t, y, 'k', td, y0, 'or--', td, y1, 'om--', td, y2, 'ob--'), grid

```

В целом можно утверждать, что использование преобразователя первого порядка и преобразования Тастина дает существенно лучшее приближение реакции дискретного регулятора к идеальной по сравнению с преобразователем первого порядка и формулами Эйлера.



- 1 – аналоговый регулятор;
- 2 – дискретный регулятор с преобразователем нулевого порядка;
- 3 – дискретный регулятор с преобразователем первого порядка;
- 4 – дискретный регулятор с преобразователем Тастина.

Рис.3.6. Реакция регуляторов на синусоидальный сигнал.

3.3. Дискретизация типовых законов регулирования

Аналоговые ПИД-регуляторы успешно используются во многих промышленных системах на протяжении последних пятидесяти лет. Базовый принцип работы регулятора заключается в формировании управляющего воздействия в виде суммы трех составляющих, пропорциональных ошибке регулирования, интегралу от ошибки и производной от ошибки. Работа ПИД-регулятора описывается следующим интегро-дифференциальным уравнением:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right].$$

В этом уравнении K_p – коэффициент пропорциональной составляющей регулятора, T_i и T_d – постоянные времени интегральной и дифференциальной составляющих соответственно.

В дальнейшем будем использовать другую форму записи ПИД-закона («с независимыми настройками»):

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}. \tag{3.4}$$

Передаточная функция такого регулятора:

$$W_{pez}(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p. \quad (3.5)$$

Как известно, передаточная функция идеального ПИД-регулятора физически нереализуема в непрерывном варианте, так как порядок ее числителя больше порядка знаменателя из-за наличия операции дифференцирования. Однако в дискретном виде реализовать ПИД-регулятор можно.

Дискретное представление уравнения (3.2) будет определяться методом дискретизации операций интегрирования и дифференцирования. При использовании *прямого метода Эйлера* получим

$$u(kT) = K_p e(kT) + K_i T \sum_{j=0}^{k-1} e(jT) + \frac{K_d}{T} (e((k+1)T) - e(kT)). \quad (3.6)$$

Дискретная передаточная функции ПИД-регулятора:

$$G_D(z) = \frac{u(kT)}{e(kT)} = K_p + \frac{K_i T}{z-1} + \frac{K_d}{T} (z-1);$$

В случае использования *обратного метода* выражения примут вид:

$$u(kT) = K_p e(kT) + K_i T \sum_{j=1}^k e(jT) + \frac{K_d}{T} (e(kT) - e((k-1)T)), \quad (3.7)$$

$$G_D(z) = K_p + \frac{K_i T z}{z-1} + \frac{K_d}{T} \frac{z-1}{z}.$$

Преобразование Тастина дает достаточно сложное разностное уравнение, которое невозможно представить вычислительной схемой, основанной на операции суммирования, аналогичной (3.6) или (3.7). Регулятор имеет передаточную функцию, формально получаемую из (3.5) подстановками (3.2) и (3.3):

$$G_D(z) = K_p + \frac{K_i T}{2} \frac{z+1}{z-1} + \frac{2K_d}{T} \frac{z-1}{z+1}.$$

Однако данную формулу на практике не используют, так как в случае ее применения имеет место структурная неустойчивость системы регулирования.

Для ПИ-регулятора с передаточной функцией

$$G_D(z) = K_p + \frac{K_i T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

уравнение выхода регулятора принимает вид

$$u(kT) = K_p e(kT) + \frac{K_i T}{2} \sum_{j=1}^k [e(jT) + e((j-1)T)].$$

Исходя из соображений, связанных с физической реализацией, представляется, что наилучшим способом дискретизации операции интегрирования является преобразование Тастина (для интегратора оно эквивалентно применению преобразователя первого порядка), а для дискретизация дифференцирова-

ния лучше всего подходит обратный метод Эйлера. Тогда уравнение выхода и дискретная передаточная функция регулятора будут следующими:

$$u(kT) = K_p e(kT) + \frac{K_i T}{2} \sum_{j=1}^k [e(jT) + e((j-1)T)] + \frac{K_d}{T} (e(kT) - e((k-1)T)),$$

$$G_D(z) = K_p + \frac{K_i T}{2} \frac{z+1}{z-1} + \frac{K_d}{T} \frac{z-1}{z}.$$

В Matlab непрерывные и дискретные ПИД-регуляторы могут быть заданы как в виде обычных передаточных функций (объектов класса `tf`), так и в виде объектов специального класса `pid`. Помимо идеальных П, PI и ПИД-регуляторов, переменными этого класса могут быть заданы ПИД-регуляторы с фильтром первого порядка для производной:

$$G(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + \frac{K_d p}{T_\phi p + 1} = K_p + \frac{K_i}{p} + \frac{K_d}{T_\phi + \frac{1}{p}}.$$

Такой регулятор является физически реализуемым и в непрерывном виде.

Формирование передаточной функции дискретного ПИД-регулятора производится автоматически по заданным настройкам аналогового регулятора, причем можно независимо задавать методы дискретизации для интегральной и дифференциальной составляющих. Далее рассмотрен пример, демонстрирующий некоторые возможности Matlab по моделированию ПИД-регуляторов.

Пример 3.1. Расчет замкнутой системы регулирования с ПИД-регулятором.

Объект управления описывается передаточной функцией

$$G_o(p) = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Настройки ПИД-регулятора: $K_p = 1$, $K_i = 0,2$ и $K_d = 0,2$.

Требуется определить дискретную передаточную функцию и построить переходную характеристику системы регулирования при шаге квантования $T = 1$.

Найдем дискретную передаточную функцию объекта из условия, что на объект действует сигнал, сформированный преобразователем первого порядка с передаточной функцией

$$G_h(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}.$$

Передаточная функция непрерывной части системы:

$$G(p) = G_o(p)G_h(p) = \frac{1}{p(p+1)} \cdot \frac{1 - e^{-pT}}{p} = (1 - e^{-pT}) \cdot \frac{1}{p^2(p+1)}.$$

Найдем z -преобразование этой функции при $T = 1$ с:

$$\begin{aligned}
G(z) &= (1 - e^{-z}) \cdot Z \left[\frac{1}{p^2(p+1)} \right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \right] = \\
&= (1 - z^{-1}) \cdot \left[\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-1}z^{-1}} \right] = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} - 1 + \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0,368z^{-1}} = \\
&= \frac{z^{-1}(1 - 0,368z^{-1}) - (1 - z^{-1})(1 - 0,368z^{-1}) + (1 - z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368z^{-1})} = \frac{0,368z^{-1} + 0,2642z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368z^{-1})} = \\
&= \frac{z^{-1}(1 - 0,368z^{-1}) - (1 - z^{-1})(1 - 0,368z^{-1}) + (1 - z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368z^{-1})} = \frac{0,368z^{-1} + 0,2642z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368z^{-1})} = \\
&= \frac{0,368z^{-1} + 0,2642z^{-2}}{1 - 1,368z^{-1} + 0,368z^{-2}} = \frac{0,368z + 0,2642}{z^2 - 1,368z + 0,368}.
\end{aligned}$$

Проверим результат в Matlab:

```

s=tf('s')
Go=1/(s*(s+1))
Goz=c2d(Go,1)

Transfer function:
0.3679 z + 0.2642
-----
z^2 - 1.368 z + 0.3679

```

Sampling time (seconds): 1

Найдём дискретную передаточную функцию ПИД-регулятора путем дискретизации исходной передаточной функции обратным методом Эйлера:

$$\begin{aligned}
G_D(z) &= K_p + \frac{K_i}{1 - z^{-1}} + K_d(1 - z^{-1}) = \\
&= \frac{K_p + K_i + K_d - (K_p + 2K_d)z^{-1} + K_dz^{-2}}{1 - z^{-1}} = \\
&= \frac{1 + 0,2 + 0,2 - (1 + 2 \cdot 0,2)z^{-1} + 0,2z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1,4 - 1,4z^{-1} + 0,2z^{-2}}{1 - z^{-1}}.
\end{aligned}$$

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$\begin{aligned}
W(z) &= G_D(z)G(z) = \frac{1,4 - 1,4z^{-1} + 0,2z^{-2}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{0,368z^{-1} + 0,2642z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368z^{-1})} = \\
&= \frac{0,515z^{-1} - 0,145z^{-2} - 0,296z^{-3} + 0,053z^{-4}}{1 - 2,368z^{-1} + 1,736z^{-2} - 0,368z^{-3}}.
\end{aligned}$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W(z) = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} = \frac{0,515z^{-1} - 0,145z^{-2} - 0,296z^{-3} + 0,053z^{-4}}{1 - 1,853z^{-1} + 1,591z^{-2} - 0,664z^{-3} + 0,053z^{-4}}.$$

То же самое в Matlab:

```
Gd = pid(1, .2, .2, 0, 1, 'IFormula', 'BackwardEuler',
'DFormula', 'BackwardEuler');
tf(Gd)
```

```
Transfer function:
1.4 z^2 - 1.4 z + 0.2
-----
z^2 - z
```

```
Wz = minreal(feedback(Gd*Goz, 1))
```

```
Transfer function:
0.515 z^3 - 0.1451 z^2 - 0.2964 z + 0.05285
-----
z^4 - 1.853 z^3 + 1.591 z^2 - 0.6642 z + 0.05285
```

Далее найдем переходную характеристику замкнутой системы в Matlab с помощью функции `filter` (путем решения разностного уравнения) и с помощью функции `step`:

```
num=[0 0.515 -0.145 -0.296 0.053];
den=[1 -1.853 1.591 -0.664 0.053];
u=ones(1, 41);
t=0:40;
y1=filter(num, den, u);
y2 = step(Wz, t);
plot(t, y1, 'o--b', t, y2, 'o--r'), grid
```

Полученные графики показаны на рис. 3.7. Как и следовало ожидать, результаты расчета полностью совпали.

Проведем расчет заново, применив «автонастройку» аналогового регулятора (функцию `pidtune`) и рекомендованные выше методы дискретизации его интегральной и дифференциальной составляющих. Период дискретизации уменьшим до 0,5.

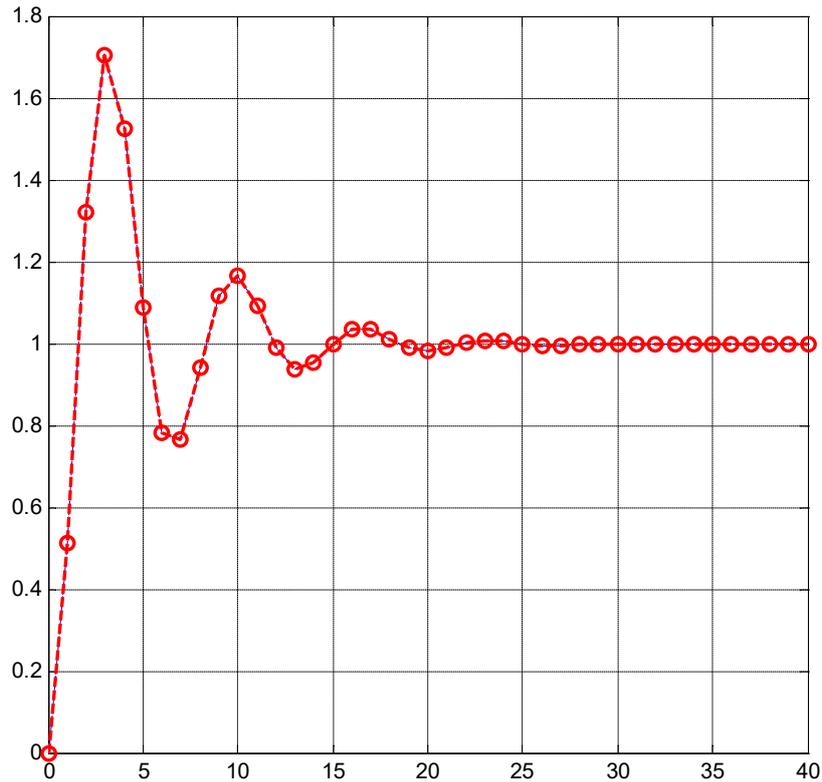


Рис.3.7. Переходная характеристика системы регулирования.

```
Gd = pidtune(Go, 'pid')
```

Continuous-time PID controller in parallel form:

$$K_p + K_i * \frac{1}{s} + K_d * s$$

With $K_p = 1.6$, $K_i = 0.0314$, $K_d = 0.498$

```
W = minreal(feedback(Gd*Go,1))
```

Transfer function:

$$\frac{0.498 s^2 + 1.605 s + 0.03137}{s^3 + 1.498 s^2 + 1.605 s + 0.03137}$$

```
[y1,t1] = step(W,10);
```

```
Gd = pid(Gd.Kp, Gd.Ki, Gd.Kd, 0, 0.25,...
'IFormula', 'Trapezoidal', 'DFormula', 'BackwardEuler')
```

Discrete-time PID controller in parallel form:

$$K_p + K_i * \frac{T_s*(z+1)}{2*(z-1)} + K_d * \frac{z-1}{T_s*z}$$

With $K_p = 1.6$, $K_i = 0.0314$, $K_d = 0.498$, $T_s = 0.25$ seconds

```
Goz=c2d(Go,0.25);
```

```
Wz = minreal(feedback(Gd*Goz,1))
```

```

Transfer function:
  0.1037 z^3 - 0.06544 z^2 - 0.09062 z + 0.05279
-----
z^4 - 2.675 z^3 + 2.492 z^2 - 0.8694 z + 0.05279

[y2,t2] = step(Wz,10);
plot(t1,y1,t2,y2,'o--'),grid

```

Полученные графики показаны на рис.3.8.

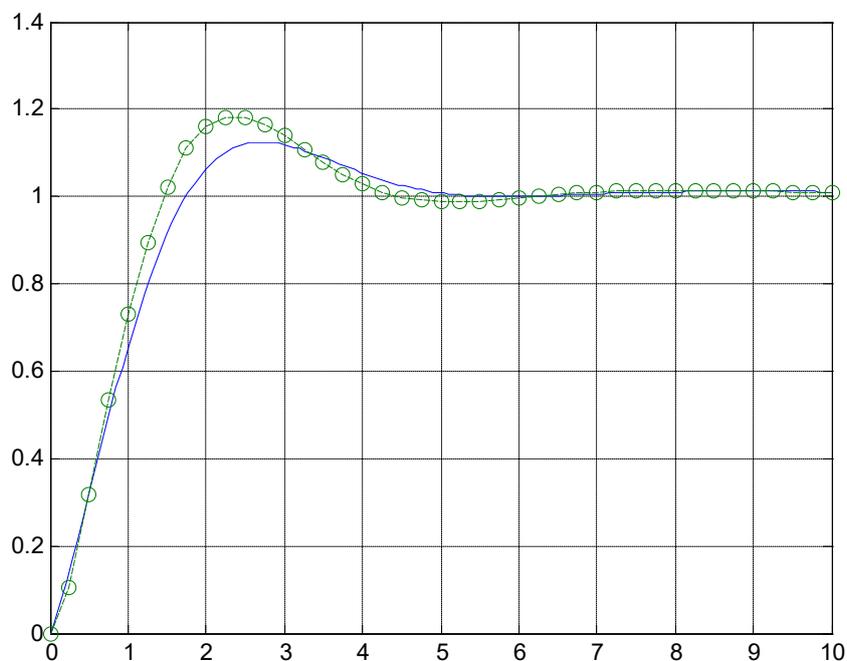


Рис. 3.8. Переходная характеристика системы регулирования после пересчета: непрерывная и дискретная реализации.

В программах регулирования для микроконтроллеров часто используется отличный от рассмотренных выше подход к дискретизации алгоритма ПИД-регулирования, в результате которого получают *рекуррентную* или (альтернативное название) *инкрементную формулу*.

Суть этого подхода состоит в том, что исходное уравнение ПИД-регулятора

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.8)$$

дифференцируется

$$\frac{du(t)}{dt} = K_p \frac{de(t)}{dt} + K_i e(t) + K_d \frac{d^2 e(t)}{dt^2}, \quad (3.9)$$

в результате чего вычисление выходного сигнала теперь производится интегрированием всех трех составляющих:

$$u(t) = \int_0^t \left[K_p \frac{de(\tau)}{d\tau} + K_i e(\tau) + K_d \frac{d^2 e(\tau)}{d\tau^2} \right] d\tau.$$

При дискретизации дифференциальное уравнение (3.9) переводится в разностное путем простой замены производных на разности, деленные на интервал дискретизации:

$$\begin{aligned} \frac{u(kT) - u((k-1)T)}{T} &= K_p \frac{e(kT) - e((k-1)T)}{T} + K_i e(kT) + \\ &+ K_d \frac{e(kT) - e((k-1)T)}{T} - \frac{e((k-1)T) - e((k-2)T)}{T}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} u(kT) - u((k-1)T) &= e(kT) \left[K_p + K_i T + \frac{K_d}{T} \right] + \\ &+ e((k-1)T) \left[-K_p - 2 \frac{K_d}{T} \right] + e((k-2)T) \frac{K_d}{T}, \\ G_d(p) &= \frac{u(kT)}{e(kT)} = \frac{\left(K_p + K_i T + \frac{K_d}{T} \right) + \left(-K_p - 2 \frac{K_d}{T} \right) z^{-1} + \frac{K_d}{T} z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \\ &= \frac{a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 - z}. \end{aligned}$$

Текущее значение управляющего воздействия легко вычисляется через предыдущее значение и три отчета ошибки регулирования:

$$u(kT) = u((k-1)T) + a_2 e(kT) + a_1 e((k-1)T) + a_0 e((k-2)T).$$

Вычисление управления в данном случае не требует явного накопления суммы, как в выражениях (3.6), (3.7) и, на первый взгляд, кажется более простым. Однако сумма, тем не менее, все-таки вычисляется – для управляющего сигнала, просто она не «накапливается» в некоторой промежуточной переменной. Кроме того, практическая реализация данного метода наталкивается на ряд проблем, общим «происхождением» которых является то обстоятельство, что начальное преобразование уравнения регулятора (дифференцирование) не является эквивалентным, в том смысле, что обратное преобразование *неоднозначно*: решение дифференциального уравнения невозможно без знания начальных условий. Если для решения (3.8) нам достаточно знать $e(0)$, то для решения (3.9) требуется, кроме этого знать $u(0)$ и $de/dt(0)$. Фактически это означает, что уравнение (3.9) описывает бесконечное множество поведений регулятора (3.8) из которых нам еще предстоит выбрать (при составлении программы) его действительно верное поведение. А это, как показывает практика, не так

просто, как кажется на первый взгляд. Продемонстрируем это на простом примере. Рассмотрим частный случай – П-регулятор. Продифференцируем его «исходное» уравнение:

$$u(t) = K_p e(t) \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dt} = K_p \frac{de}{dt}. \quad (3.10)$$

При известной функции $e(t)$ решение дифференциального уравнения

$$u = K_p \int_0^t \frac{de(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Пусть ошибка изменяется по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1-t & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

В момент времени $t = 0$ ошибка скачкообразно изменилась от 0 до 1. На практике это может быть связано, например, с поступлением нового задания. Реакция «правильного» П-регулятора на такой входной сигнал должна быть

$$u(t) = K_p - K_p t.$$

Решение интегрального уравнения (3.10):

$$u = K_p \int_0^t \frac{de(\tau)}{d\tau} d\tau = K_p \int_0^t -1 d\tau = -K_p t + u(0).$$

Сравнивая, приходим к выводу, что $u(0) = K_p$. Однако электронный, например, интегратор сделать такой вывод не в состоянии и, если в начальный момент времени на его выходе сигнал равен нулю, в дальнейшем будет выдавать сигнал $u = -K_p t$. Это подтверждают результаты моделирования в Simulink, рис. 3.9.

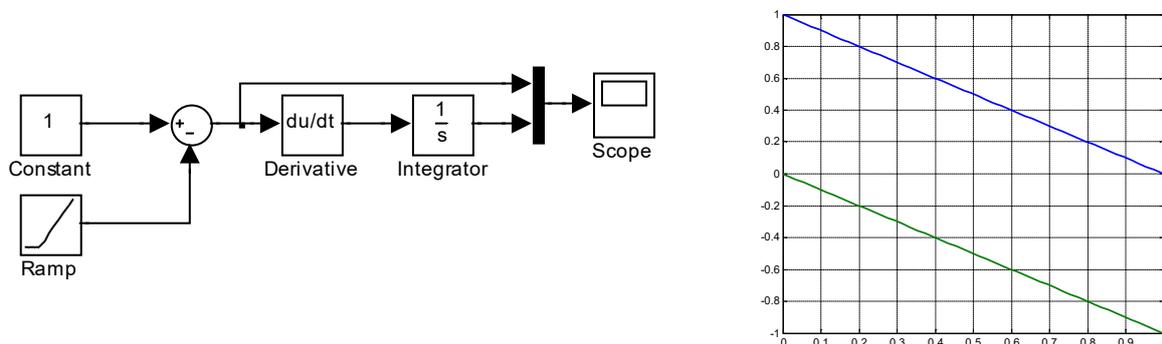


Рис. 3.9. Simulink-модель П-регулятора ($K_p = 1$) и результаты моделирования.

Предположим далее, что такой регулятор реализуется программно. Переходя в (3.10) от производных к разностям, получим

$$u(kT) - u((k-1)T) = K_p [e(kT) - e((k-1)T)]$$

или

$$u(kT) = u((k-1)T) + K_p [e(kT) - e((k-1)T)].$$

Пусть в момент времени, непосредственно предшествующий подаче сигнала $u(-T) = e(-T) = 0$. Тогда при $e(0) = 1$ получим $u(0) = K_p$, и это – правильный результат. Таким образом, в данном случае дискретная реализация оказалась лучше аналоговой. Однако в целом проблема осталась нерешенной. Действительно, приращение управления на интервале определяется приращениями задания и регулируемой величины

$$\begin{aligned} \Delta u(kT) &= K_p [(y_{зад}(kT) - y(kT)) - (y_{зад}((k-1)T) - y((k-1)T))] = \\ &= K_p [(y_{зад}(kT) - y_{зад}((k-1)T)) - (y(kT) - y((k-1)T))] = \\ &= K_p [\Delta y_{зад}(kT) - \Delta y(kT)]. \end{aligned}$$

При $y_{зад} = \text{const}$ (система стабилизации) формально имеем, что управляющий сигнал от задания не зависит вообще. Если к тому же $y = \text{const}$, управление изменяться не будет, какое бы значение не имела регулируемая величина. Т.е. регулятор не реагирует на отклонение. Если по какой-либо причине (например, при изменении режима управления «ручной» – «автоматический») такая ситуация возникла, привести регулятор «в чувство» можно, только обнулив отчеты $e((k-1)T)$ и $u((k-1)T)$ и тем самым сделав его «настоящим» П-регулятором на один такт времени. Этот процесс аналогичен введению начального значения в аналоговый интегратор, после чего регулятор начинает работать правильно.

Вторая, интегральная, составляющая рекуррентного ПИД-регулятора по всей видимости будет работать аналогично интегральной составляющей обычного регулятора, поскольку ее преобразование состоит лишь в переносе интегратора в «выходной каскад» вычислительной схемы.

Третья, дифференциальная составляющая рекуррентного ПИД-регулятора претерпела те же трансформации, что и пропорциональная, поэтому следует ожидать аналогичных проблем при ее функционировании. В аналоговой реализации определение второй производной ошибки возможно лишь в том случае, если реально измеряется некая физическая величина, равная или пропорциональная ускорению сигнала обратной связи. В дискретном виде составляющая, как показано выше, реализуется с привлечением трех отчетов ошибки по времени.

Несмотря на то, что в «теоретических» расчетах рекуррентная форма ПИД-регулятора дает хорошие результаты, в практическом плане она проигрывает обычной форме и поэтому применяется значительно реже и нами далее не рассматривается.

3.4. Задание

Передаточная функция объекта управления и период квантования по каждому варианту заданы в п. 1.6. При выполнении работы считать период квантования общим для всей системы (одинаковым для АЦП, ЦК и ЦАП, см. п. 3.1). Требуется:

1) в Matlab с помощью функции `pidtune` найти настройки аналогового регулятора, определить передаточную функцию замкнутой аналоговой системы регулирования, рассчитать и построить ее переходную характеристику;

2) дискретизировать описание ПИД-регулятора, используя метод Тастина ('trapezoidal') для интегральной составляющей и обратный метод Эйлера – для дифференциальной;

3) используя полученную в п. 1.6. дискретную передаточную функцию непрерывной части, найти дискретную передаточную функцию замкнутой цифровой системы регулирования и ее переходную характеристику;

4) сравнить переходные характеристики аналоговой и цифровой систем и сделать вывод о качестве цифровой реализации. В случае существенной разницы предложить уменьшение периода дискретизации и показать улучшение качества цифровой реализации при уменьшении периода.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

4.1. Линейные системы второго порядка на фазовой плоскости

Для достижение наглядности и лучшей обзорности возможных форм процесса регулирования применяют изображение его на так называемой фазовой плоскости. При этом приходится ограничиваться только случаями, когда система описывается дифференциальными уравнениями не выше второго порядка.

Фазовой плоскостью называется плоскость, на которой по оси абсцисс откладывается изменяющаяся величина $x(t)$ (или отклонение регулируемой величины), а по оси ординат – скорость ее изменения $y(t) = dx/dt$. Эти величины называются фазовыми координатами.

Начальные условия, т.е. значения фазовых координат в начальный момент времени ($t = 0$), определяют начальное положение точки на фазовой плоскости. С течением времени эта точка перемещается на фазовой плоскости, т.к. изменяется не только сама переменная, но и ее производная. Сама точка называется изображающей точкой, а линия, описываемая ею, называется *фазовой траекторией*. При различных начальных условиях получаются различные фазовые траектории. Совокупность траекторий называется *фазовым портретом*.

Укажем два общих для фазовых координат (x, y) правила, которые нужно учитывать при построении фазовых траекторий.

1) в верхней половине фазовой плоскости, где $y > 0$, т.е. x увеличивается, изображающая точка всегда движется слева направо; в нижней полуплоскости $y < 0$, координата x убывает, и изображающая точка движется справа налево. Это правило используется при расстановке стрелок вдоль фазовых траекторий;

2) на оси x , разделяющей верхнюю и нижнюю половины фазовой плоскости, координата $y = 0$, т.е. скорость изменения x равна нулю. Следовательно, фазовые траектории пересекают ось x под прямым углом.

Рассмотрим систему второго порядка без внешнего воздействия с ненулевыми начальными условиями. Система описывается дифференциального уравнения второго порядка:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = 0.$$

Это уравнение может быть представлено в пространстве состояний следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t), \end{cases}$$

$$y = x_1.$$

Матрицы описания:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

Характеристическое уравнение системы:

$$\det(pE - A) = \det \begin{bmatrix} p & -1 \\ a_0 & p + a_1 \end{bmatrix} = p^2 + a_1 p + a_0.$$

Характер переходного процесса зависит от вида корней характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}.$$

Здесь возможны шесть случаев. Рассмотрим каждый из них с построением соответствующей фазовой траектории. Для построения отклика модели на начальные условия (при отсутствии внешнего возмущения) в Matlab имеется функция `initial`:

```
initial(sys, x0)
initial(sys, x0, t)
```

Вызов функции в виде `initial(sys, x0)` строит отклик системы на начальное условие `x0`. Время переходного определяется автоматически.

Вызов функции в виде `initial(sys, x, t)` строит отклик системы на начальное условие `x0` с указанием времени моделирования. При этом параметр `t` может задавать либо конечное время переходного процесса `Tfinal`, либо вектор временных отчетов в форме `t=0:dt:Tfinal`.

1. Корни чисто мнимые при $a_1 = 0$ и $a_0 > 0$ (граница устойчивости линейной системы).

Построим временную диаграмму выходной величины и фазовую траекторию при $a_0 = 4$, $x_{10} = 0,2$, $x_{20} = 1,0$:

```
A=[0 1;-4 0];
C=[1 0];
x0=[0.2;1];
t=0:0.0001:2*pi;
sys = ss(A, [], C, []);
[y,t,x] = initial(sys, x0, t);
figure(1)
plot(t, x(:,1)), grid
figure(2)
plot(x(:,1), x(:,2), x(1,1), x(1,2), 'o'), grid
title('Фазовая траектория')
xlabel('x'), ylabel('dx/dt')
%Корни характеристического уравнения
P1=eig(A)
>>P1 =
    0 + 2.0000i
    0 - 2.0000i
```



Рис. 4.1. Временная диаграмма выходной величины: чисто мнимые корни.

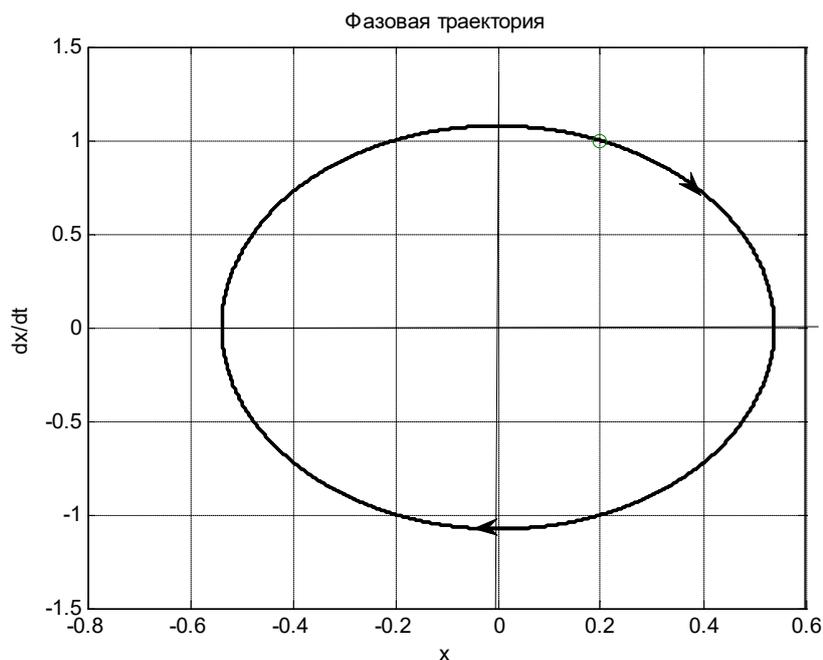


Рис.4.2. Фазовая траектория: чисто мнимые корни.

Любой периодический колебательный процесс с постоянными амплитудой и частотой всегда изображается на фазовой плоскости в виде некоторого замкнутого контура – замкнутой фазовой траектории. Каждому периоду колебаний соответствует прохождение изображающей точкой всего контура. Центр эллипса является особой точкой типа *центр*. Точки, соответствующие установившимся состояниям, называются особыми. В них касательные к фазовым траекториям имеют неопределенное направление.

2. Корни комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью при $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ и $a_1^2 < 4a_0$ (устойчивая линейная система).

Построим временную диаграмму выходной величины и фазовую траекторию при $a_0 = 6$, $a_1 = 1$, $x_{10} = -1,0$, $x_{20} = 2,0$:

```
A=[0 1;-6 -1];
P2=eig(A)
C=[1 0];
x0=[-1;2];
t=0:0.0001:3*pi;
sys = ss(A,[],C,[]);
[y,t,x] = initial(sys,x0,t);
figure(3)
plot(t,x(:,1)),grid
xlabel('t'),ylabel('x1(t)')
figure(4)
plot(x(:,1),x(:,2),x(1,1),x(1,2),'o'),grid
title('Фазовая траектория')
xlabel('x'),ylabel('dx/dt')
%Корни характеристического уравнения
P2=eig(A)
>>P2 =
    -0.5000 + 2.3979i
    -0.5000 - 2.3979i
```

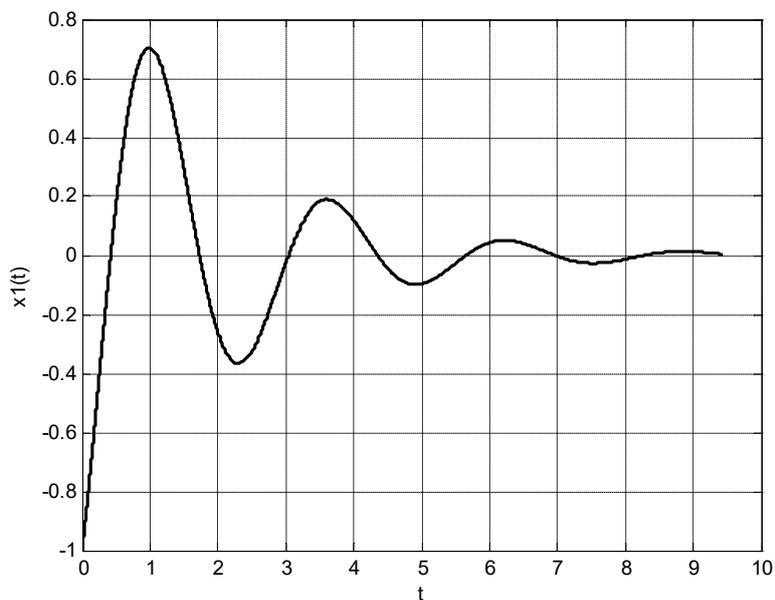


Рис. 4.3. График переходного процесса: корни комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью.

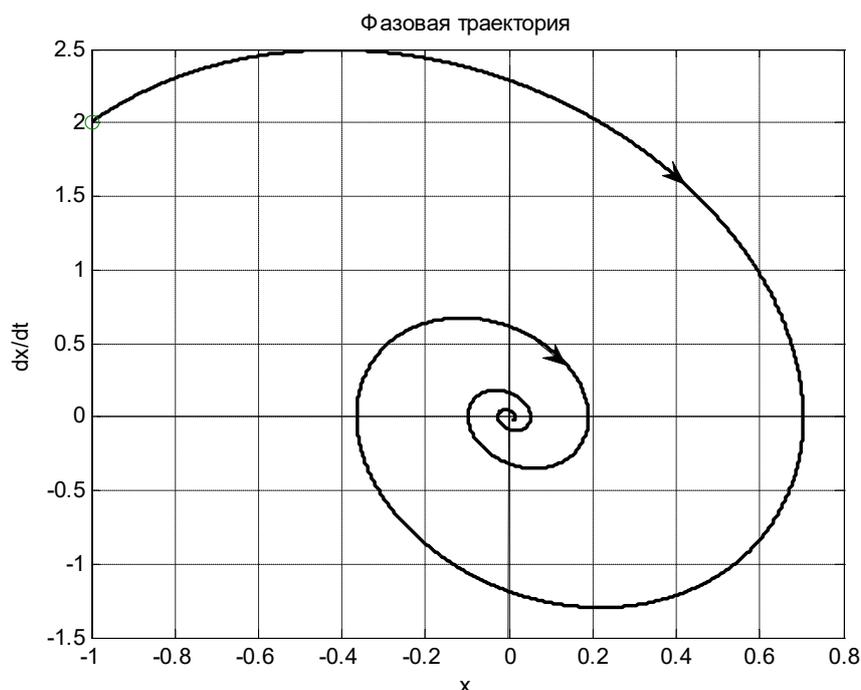


Рис.4.4. Фазовая траектория: корни комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью.

Затухающий колебательный процесс изображается на фазовой плоскости в виде сходящейся спиралевидной фазовой траектории. Особая точка (начало координат) называется *устойчивым фокусом*.

3. Корни комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью при $a_1 < 0$, $a_0 > 0$ и $a_1^2 < 4a_0$ (неустойчивая линейная система).

Построим временную диаграмму выходной величины и фазовую траекторию при $a_0 = 8$, $a_1 = -1$, $x_{10} = 0,5$, $x_{20} = 1,0$:

```
A=[0 1;-8 1];
C=[1 0];
x0=[0.5;1];
t=0:0.0001:1*pi;
sys = ss(A, [],C, []);
[y,t,x] = initial(sys,x0,t);
figure(5)
plot(t,x(:,1)),grid
xlabel('t'),ylabel('x1(t)')
figure(6)
plot(x(:,1),x(:,2),x(1,1),x(1,2),'o'),grid
title('Фазовая траектория')
xlabel('x'),ylabel('dx/dt')
%Корни характеристического уравнения
P3=eig(A)

>> P3 =
    0.5000 + 2.7839i
    0.5000 - 2.7839i
```

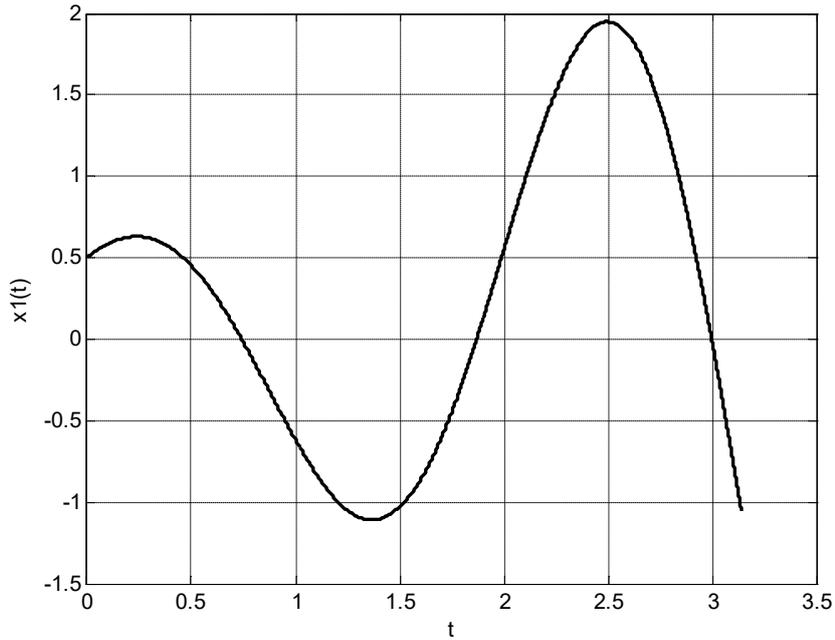


Рис. 4.5. График переходного процесса: корни комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью.

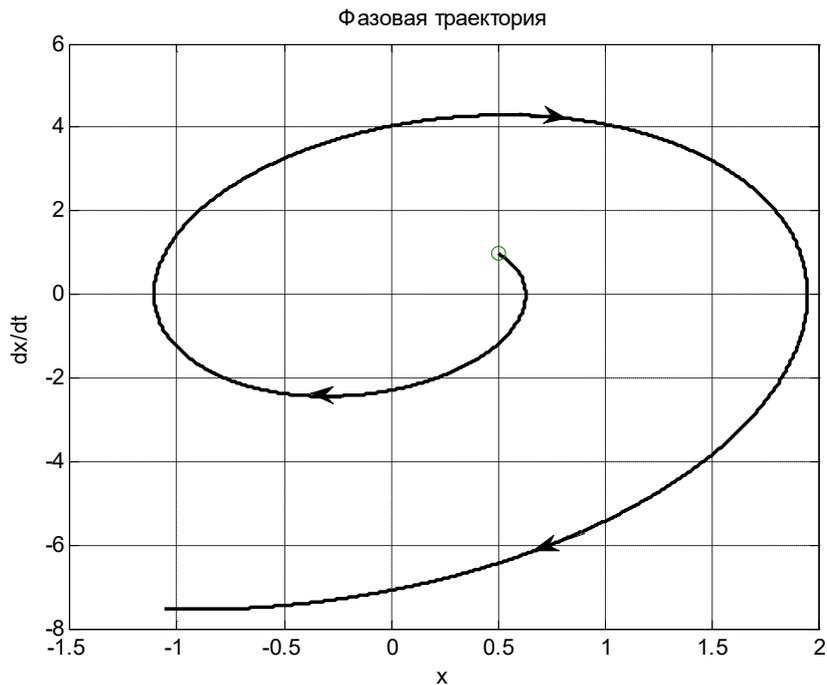


Рис. 4.6. Фазовая траектория: корни комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью.

Нарастающий колебательный процесс изображается на фазовой плоскости в виде расходящейся спиралевидной фазовой траектории. Особая точка (начало координат) называется *неустойчивым фокусом*.

4. Корни вещественные отрицательные при $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ и $a_1^2 > 4a_0$ (устойчивая линейная система).

Построим временную диаграмму выходной величины и фазовую траекторию при $a_0 = 8$, $a_1 = 6$, $x_{10} = -1,0$, $x_{20} = 2,0$:

```
A=[0 1;-8 -6];C=[1 0];
x0=[0.5;1];
t=0:0.0001:1*pi;
sys = ss(A, [],C, []);
[y,t,x] = initial(sys,x0,t);
figure(7)
plot(t,x(:,1)),grid
xlabel('t'),ylabel('x1(t)')
figure(8)
plot(x(:,1),x(:,2),x(1,1),x(1,2),'o'),grid
title('Фазовая траектория')
xlabel('x'),ylabel('dx/dt')
%Корни характеристического уравнения
P4=eig(A)
>> P4 =
    -2
    -4
```

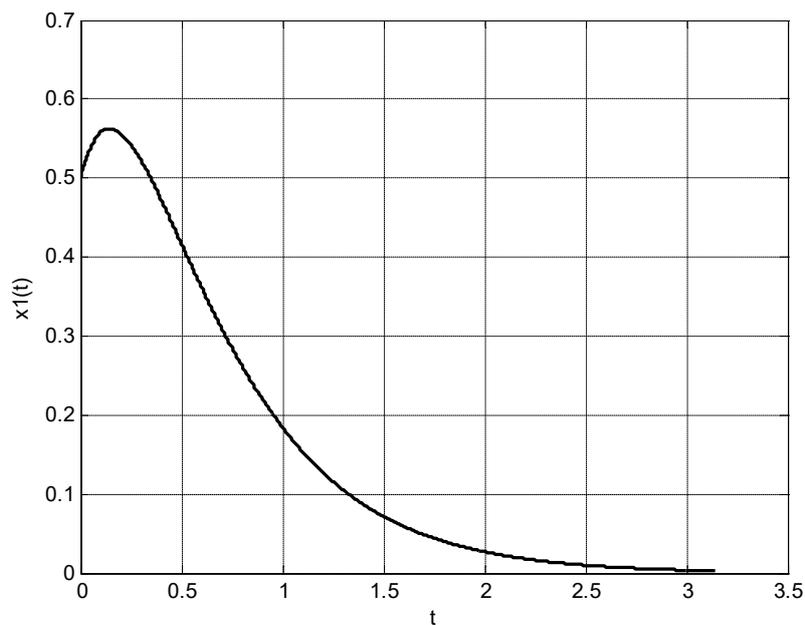


Рис. 4.7. График переходного процесса: корни вещественные отрицательные.

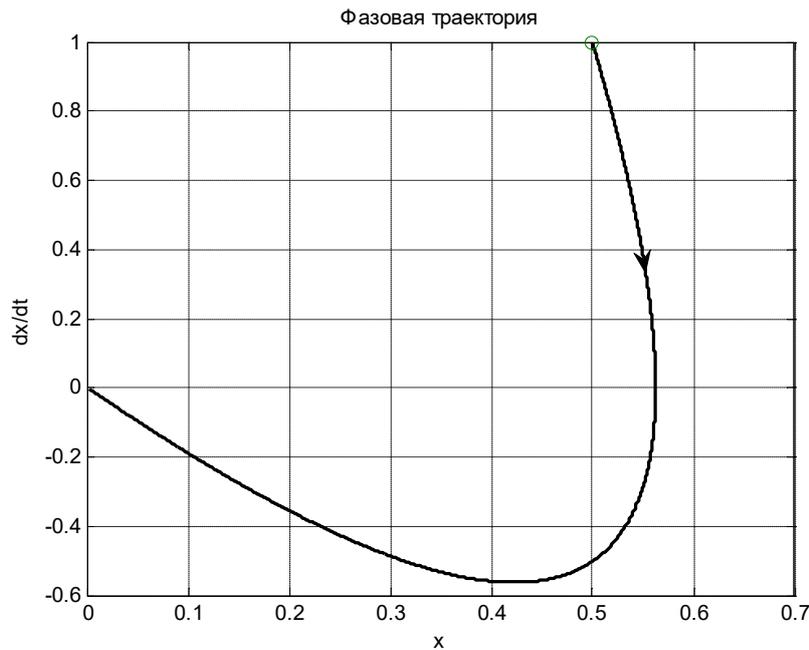


Рис.4.8. Фазовая траектория: корни вещественные отрицательные.

Затухающий аperiodический процесс изображается на фазовой плоскости в виде фазовой траектории, стремящейся к началу координат. Особая точка (начало координат) называется *устойчивым узлом*.

5. Корни вещественные положительные при $a_1 < 0$, $a_0 > 0$ и $a_1^2 > 4a_0$ (неустойчивая линейная система).

Построим временную диаграмму выходной величины и фазовую траекторию при $a_0 = 8$, $a_1 = -6$, $x_{10} = -1,0$, $x_{20} = 2,0$:

```
A=[0 1;-8 6];
C=[1 0];
x0=[-0.5;1];
t=0:0.0001:0.2*pi;
sys = ss(A, [], C, []);
[y,t,x] = initial(sys,x0,t);
figure(9)
plot(t,x(:,1)),grid
xlabel('t'),ylabel('x1(t)')
figure(10)
plot(x(:,1),x(:,2),x(1,1),x(1,2),'o'),grid
title('Фазовая траектория')
xlabel('x'),ylabel('dx/dt')
%Корни характеристического уравнения
P5=eig(A)
>> P5 =
     2
     4
```

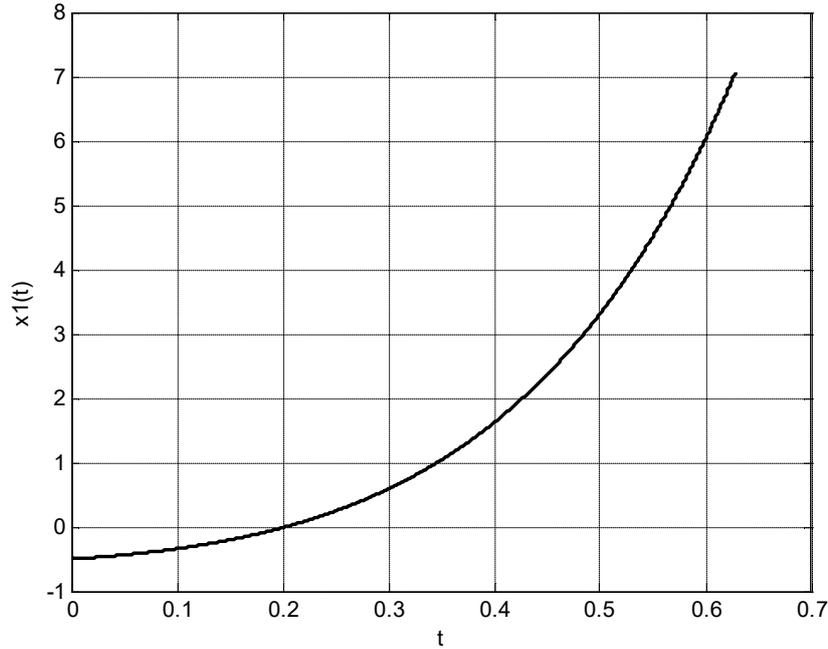


Рис. 4.9. График переходного процесса: корни вещественные положительные.

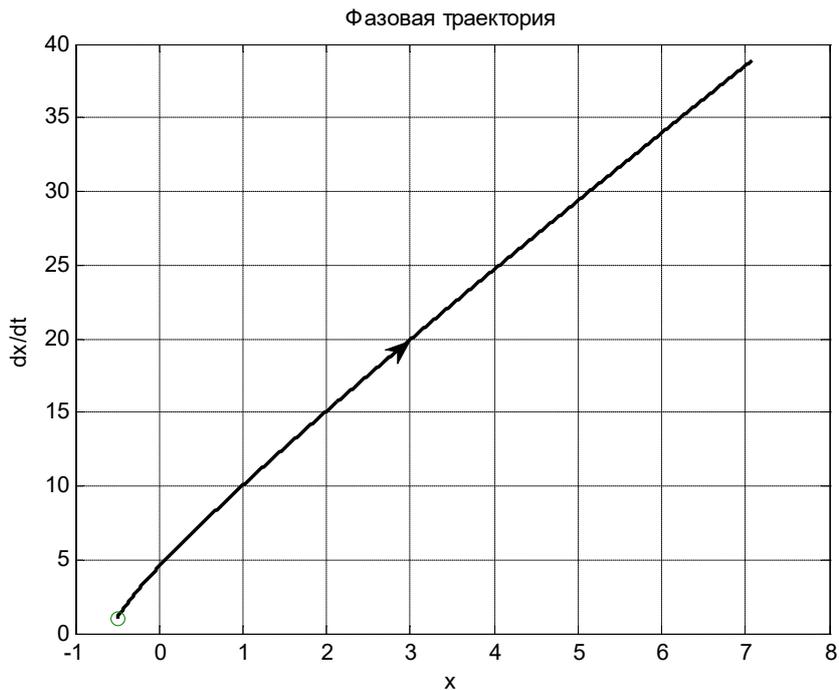


Рис. 4.10. Фазовая траектория: корни вещественные положительные.

Нарастающий аperiodический процесс изображается на фазовой плоскости в виде фазовой траектории, удаляющейся от начала координат и стремящейся от начальной точки в бесконечность. Особая точка (начало координат) называется *неустойчивым узлом*.

6. Корни вещественные и имеют разные знаки при $a_0 < 0$ и $a_1^2 > 4a_0$ (неустойчивая линейная система).

Построим временную диаграмму выходной величины и фазовую траекторию при $a_0 = -8$, $a_1 = 2$, $x_{10} = -0,2$, $x_{20} = 1,0$:

```

A=[0 1;8 -2];C=[1 0];
x0=[-0.2;0.7];
t=0:0.0001:0.5*pi;
sys = ss(A,[],C,[]);
[y,t,x] = initial(sys,x0,t);
figure(11)
plot(t,x(:,1)),grid
xlabel('t'),ylabel('x1(t)')
figure(12)
plot(x(:,1),x(:,2),x(1,1),x(1,2),'o'),grid
axis([-0.25 0.25 -0.8 0.8])
title('Фазовая траектория')
xlabel('x'),ylabel('dx/dt')
%Корни характеристического уравнения
P6=eig(A)
>> P6 =
     2
    -4

```

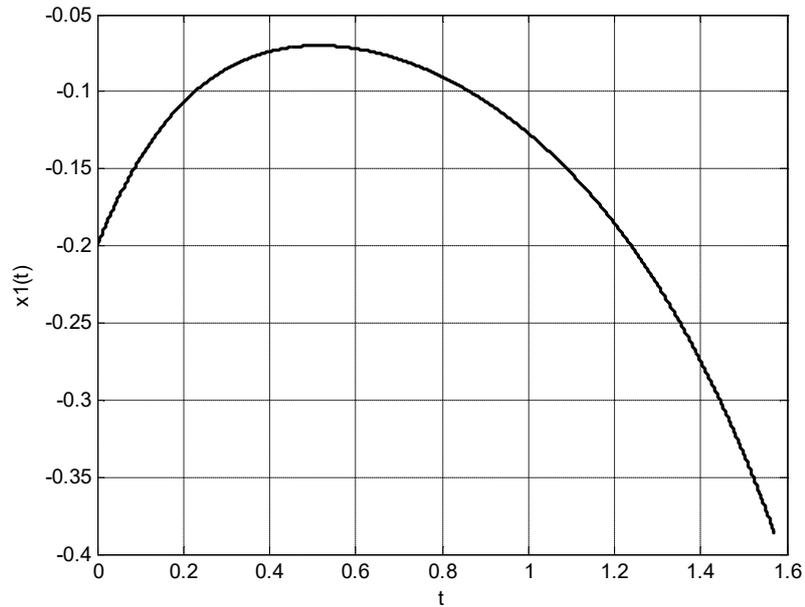


Рис. 4.11. График переходного процесса: корни вещественные разных знаков.

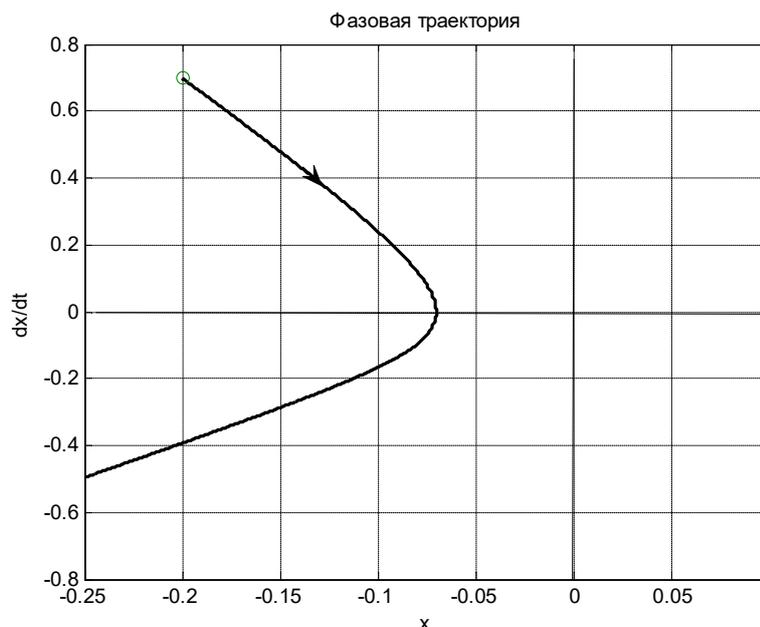


Рис. 4.12. Фазовая траектория: корни вещественные разных знаков.

В этом случае имеет место также расходящийся аperiodический процесс, но фазовая траектория имеет совсем другой вид. Изображающая точка удаляется от начала координат, а особая точка называется *седлом* (седло всегда неустойчиво).

4.2. Нелинейные системы на фазовой плоскости. Предельные циклы

Отличительной особенностью поведения нелинейных систем на фазовой плоскости является возможное существование т.н. *предельных циклов*, описывающих периодическое движение с постоянным периодом, независимое (в отличие от автоколебательных линейных систем) от начальных условий.

Предельным циклом называется фазовая траектория, имеющая вид замкнутой гладкой кривой, в некоторой окрестности которой нет других замкнутых траекторий. Все траектории, которые начинаются достаточно близко от предельного цикла, спиралевидно приближаются к нему либо отдаляются от него.

Существует три типа предельных циклов:

1) устойчивый предельный цикл («*аттрактор*») – когда траектории притягиваются к предельному циклу с обеих сторон при $t \rightarrow \infty$. Такой предельный цикл имеет место, например, в системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1); \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1). \end{cases}$$

Создадим файл-функцию с описанием такой системы:

```
function dx = attractor(t,x)
dx = [x(2) - x(1) * (x(1) * x(1) + x(2) * x(2) - 1); ...
      -x(1) - x(2) * (x(1) * x(1) + x(2) * x(2) - 1)];
```

С помощью функции-решателя систем дифференциальных уравнений ode45 рассчитаем семейства фазовых траекторий и построим соответствующие графики (рис. 4.13):

```

close all
figure(1)
hold on
[t,X] = ode45(@attractor,[0 10],[1 1]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@attractor,[0 10],[-1 1]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@attractor,[0 10],[1 -1]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@attractor,[0 10],[-1 -1]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),

[t,X] = ode45(@attractor,[0 10],[.1 .1]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@attractor,[0 10],[-.1 .1]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@attractor,[0 10],[.1 -.1]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@attractor,[0 10],[-.1 -.1]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
hold off
grid on

```

На рис. 4.13 окружностями показаны начальные положения фазовых траекторий. Как видно из рисунка фазовые все траектории в конечном итоге попадают на окружность единичного радиуса.

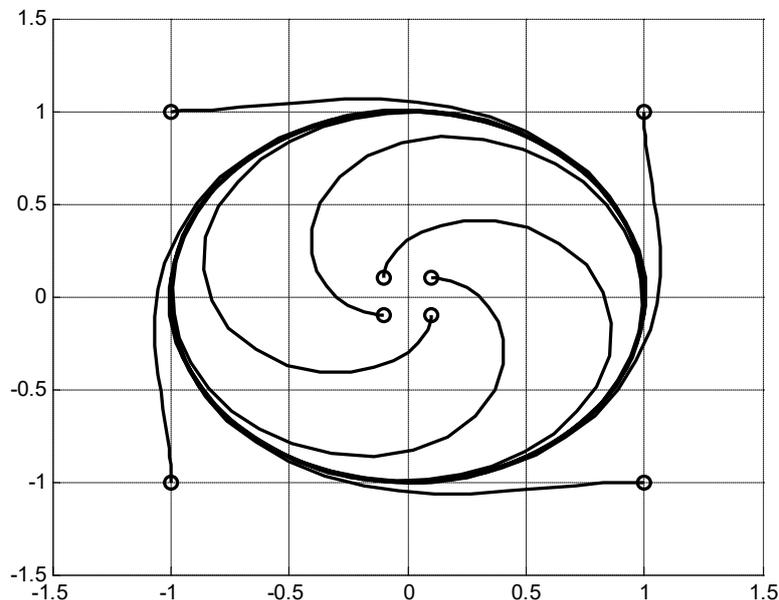


Рис. 4.13. Устойчивый предельный цикл.

2) неустойчивый предельный цикл («репеллер») – когда траектории удаляются от предельного цикла с обеих сторон при $t \rightarrow \infty$. Такой предельный цикл имеет место, например, в системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1); \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1). \end{cases}$$

Эту систему опишем файлом-функцией repeller:

```
function dx = repeller(t,x)
dx = [x(2)+x(1)*(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)-1);...
      -x(1)+x(2)*(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)-1)];
```

Рассчитаем и построим предельный цикл:

```
figure(2)
hold on
[t,X] = ode45(@repeller,[0 10],[.7071 .7071]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@repeller,[0 10],[-.7071 .7071]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@repeller,[0 10],[.7071 -.7071]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@repeller,[0 10],[-.7071 -.7071]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),

[t,X] = ode45(@repeller,[0 1.6],[0 1.01]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@repeller,[0 1.6],[-1.01 0]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@repeller,[0 1.6],[0 -1.01]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@repeller,[0 1.6],[1.01 0]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
hold off
grid on
```

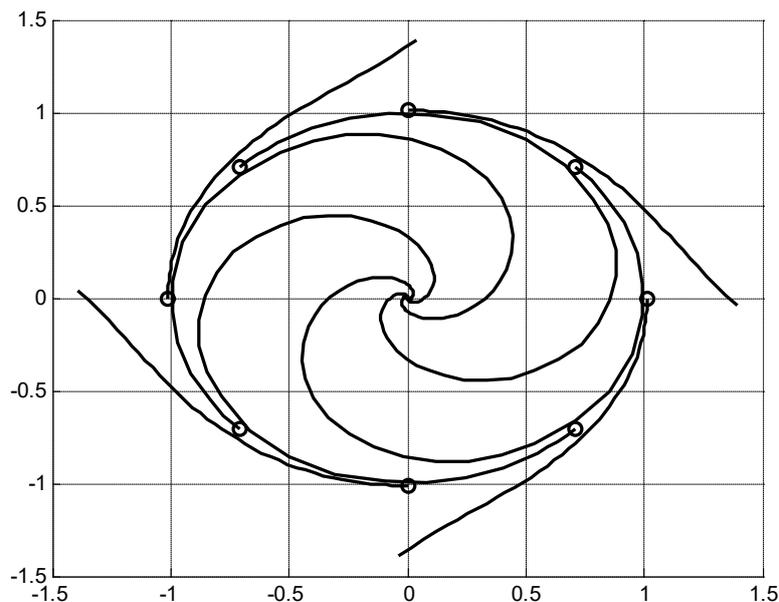


Рис. 4.14. Неустойчивый предельный цикл.

Как видно из рис. 4.14, все фазовые траектории удаляются от окружности единичного радиуса. При этом, траектории, начинающиеся на окружности или внутри ее, устремляются в начало координат, а траектории, начинающиеся вне окружности, – в бесконечность;

3) полуустойчивый предельный цикл («шунт») – когда траектории притягиваются к предельному циклу с одной стороны и удаляются от него с другой. Такой предельный цикл, например, имеет место в системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2. \end{cases}$$

Файл–функция описания системы:

```
function dx = shunt(t,x)
dx = [x(2)-x(1)*(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)-1)^2;...
      -x(1)-x(2)*(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)-1)^2];
```

Расчет и построение фазовой траекторий:

```
figure(3)
hold on
[t,X] = ode45(@shunt,[0 10],[0 1.5]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@shunt,[0 10],[-1.5 0]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@shunt,[0 10],[0 -1.5]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@shunt,[0 10],[1.5 0]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),

[t,X] = ode45(@shunt,[0 10],[0 .9]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@shunt,[0 10],[-0.9 0]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@shunt,[0 10],[0 -0.9]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@shunt,[0 10],[0.8 0]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
hold off
grid on
```

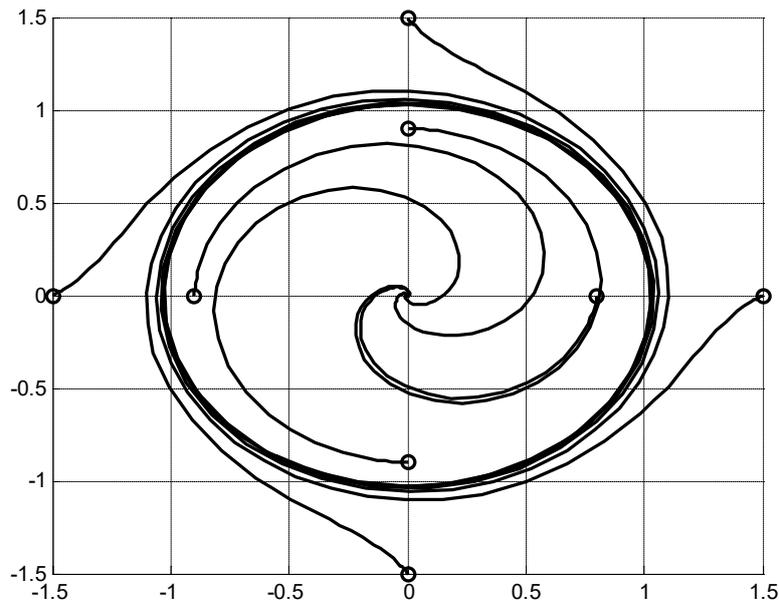


Рис. 4.15. Полуустойчивый предельный цикл.

Траектории, начинающиеся внутри окружности, устремляются к началу координат, траектории, начинающиеся вне окружности, – к ней самой.

4.3. Пример исследования нелинейной САР на фазовой плоскости

Структура системы автоматического регулирования показана на рис. 4.16.

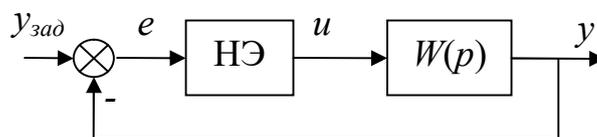


Рис. 4.16. Структурная схема САР.

На рис. 4.16 обозначены:

$W(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$ – передаточная функция линейной части системы (объекта);

екта);

НЭ – нелинейный элемент, выполняющий роль регулятора. Задан своей статической характеристикой, рис. 4.17.

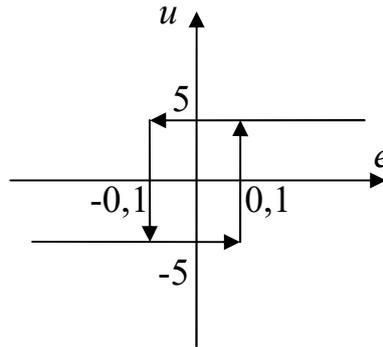


Рис. 4.17. Статическая характеристика нелинейного элемента.

Требуется определить характер движения системы в окрестности рабочей точки $y_{зад} = 0$ и исследовать переходные процессы при других заданиях.

Описание линейной части в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u - x_1 - x_2, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Управление формируется по закону:

$$u = \begin{cases} 5 & \text{при } e \geq 0,1; \\ -5 & \text{при } e \leq -0,1; \\ \text{неизменно} & \text{при } -0,1 < e < 0,1. \end{cases}$$

Файл-функция, описывающий систему:

```
function dx = nonlinsys(t,x)
global u yzad
if yzad-x(1)>=.1
    u = 5;
elseif yzad-x(1)<=-.1
    u = -5;
end
dx = [x(2);...
      -x(1)-x(2)+u];
```

Переменные, хранящие управляющее воздействие и задание объявлены глобальными.

Программа расчета фазовых траекторий в качестве решателя дифференциальных уравнений вместо ode45 задействует функцию ode23s, предназначенную для решения «жестких» систем (систем, в которых незначительные изменения переменных приводит к значительным изменениям в поведении; в нашем случае – к переключению реле):

```
close all
global u yzad
u = 5; b = .1;
yzad = 0;
% Повышение относительной точности решения с 1e-3 до 1e-9
opt = odeset('RelTol',1e-9);
```

```

figure(1)
hold on
[t,X] = ode23s(@nonlinsys,[0 20],[0 0],opt);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode23s(@nonlinsys,[0 20],[.5 1],opt);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
ca = gca;
ylims = get(ca,'YLim');
% Добавление линий переключения
hold on
plot([yzad-b yzad-b], [ylims(1) ylims(2)],'k',[yzad+b
yzad+b], [ylims(1) ylims(2)],'k'),
grid on

```

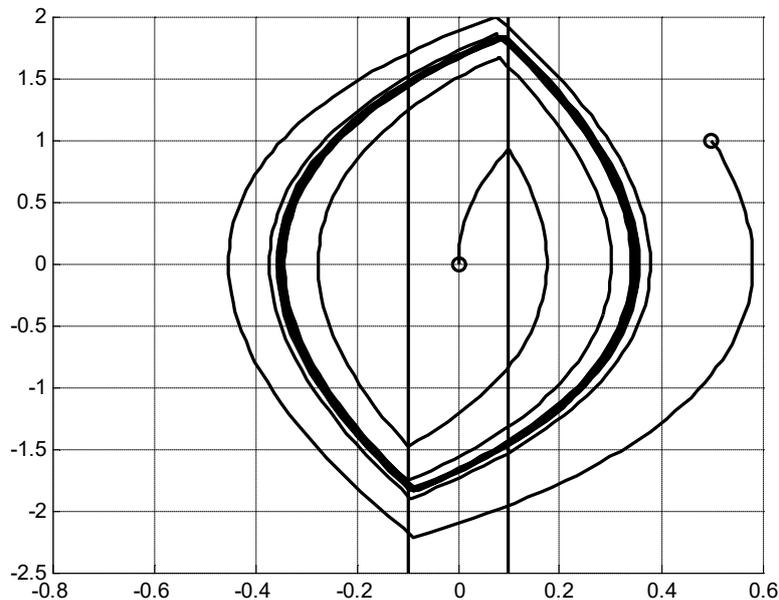


Рис. 4.18. Фазовые траектории системы.

Из рис. 4.18 видно, что системе имеет место устойчивый предельный цикл.

Следующая программа демонстрирует переходный процесс «в динамике». При каждом переключении управления программа прерывает вычисления и ждет от пользователя нажатия любой клавиши на клавиатуре. Программа самостоятельно (без вызова внешних функций) решает дифференциальные уравнения системы, заменяя интегрирование суммированием по прямому методу Эйлера.

```

close all
clear
t = 0; % начальное время
dt = .001; % шаг по времени
tk = 10; % конечное время
x1 = 0; x2 = 0; % начальная точка
yzad = 0; % задание
% Массивы для "накопления" решения
T = zeros(size(1, tk/dt+1));

```

```

X1 = zeros(size(T));
X2 = zeros(size(T));
U = zeros(size(T));
X1(1) = x1;
X2(1) = x2;
i = 2; % номер первого шага
%Первоначальное управление
if (yzad-x1)> .1
    u_old = 5;
elseif (yzad-x1)<- .1
    u_old = -5;
else
    u_old = 5;
end
u =u_old;
%Вычислительный цикл
while t <=tk
    %Определение управления
    if (yzad-x1)>= .1
        u = 5;
    elseif (yzad-x1)<= - .1
        u = -5;
    end
    % Вычисление новых значений x
    x1n = x1 + x2*dt;
    x2n = x2 + (-x1 - x2 + u)*dt;
    x1 = x1n; x2 =x2n;
    X1(i) = x1; X2(i) = x2; U(i) = u;
    t=t+dt;
    T(i)=t;
    % Вывод промежуточных итогов при изменении управления
    if u~=u_old
        % Создание окна
        figure(1)
        set(1,'Position' , [296 42 560 720])
        % Формирование фазовой траектории
        ca = subplot('Position',[.1 .04 .8 .5]);
        plot(X1(1:i),X2(1:i),X1(1,1),X2(1,2),'or'), grid
        ylims = get(ca,'YLim');
        hold on
        plot([yzad-.1 yzad-.1], [ylims(1) ylims(2)],'k', ...
            [yzad+.1 yzad+.1], [ylims(1) ylims(2)],'k'),
        hold off
        title('x2(x1)')
        % Формирование графика управления
        ca = subplot('Position',[.1 .6 .8 .15]);
        plot(T(1:i),U(1:i)), grid
        set(ca,'YLim', [-6 6]);
        title('u(t)')
        % Формирование графика x1(t)
        ca = subplot('Position',[.1 .81 .8 .15]);
        plot(T(1:i),X1(1:i)), grid
        xlims = get(ca,'XLim');

```

```

hold on
plot([xlims(1) xlims(2)], [yzad-.1 yzad-.1], 'k',...
     [xlims(1) xlims(2)], [yzad+.1 yzad+.1], 'k'),
hold off
title('x1(t)')
pause % ПАУЗА!
u_old = u;
end
i = i+1; % переход к следующему шагу
end

```

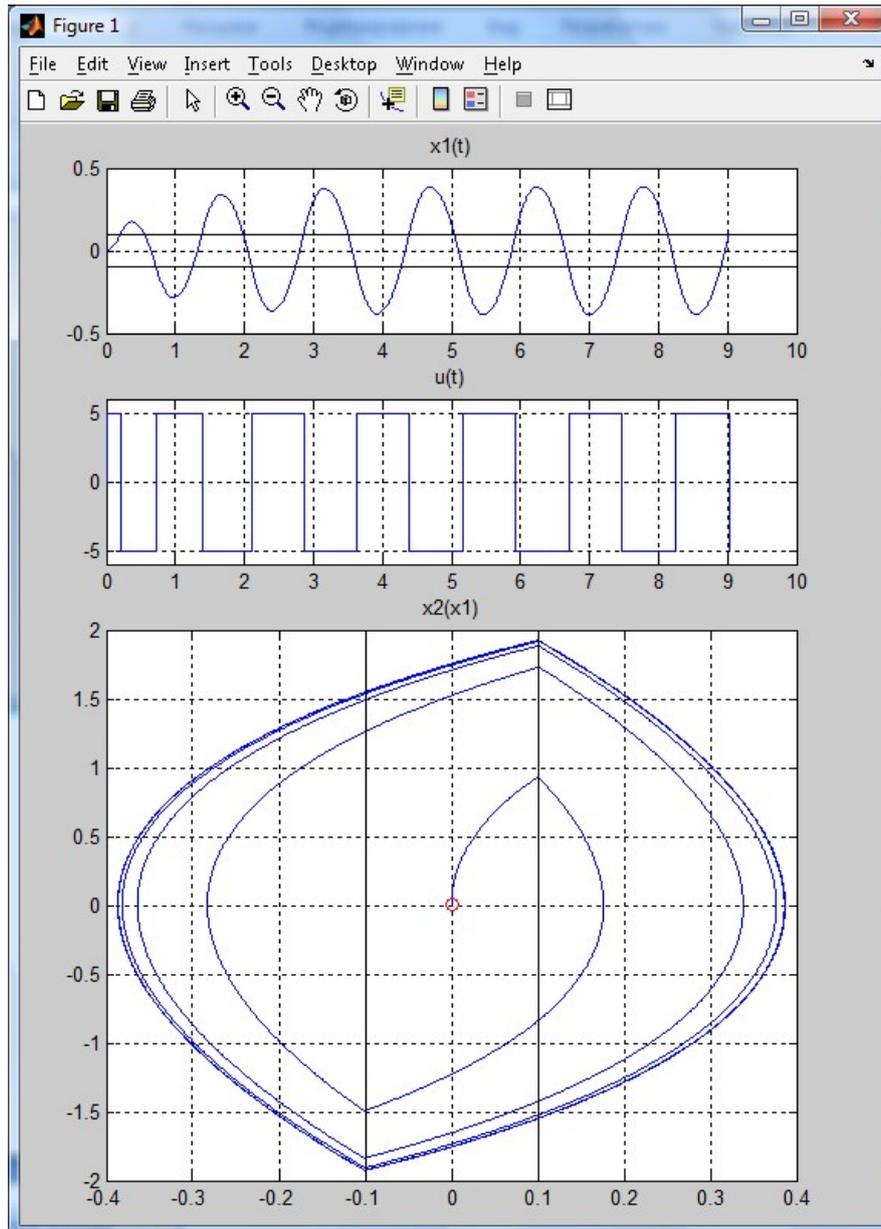


Рис. 4.19. Переходный процесс и фазовая траектория при $u_{зад}=0$.

Изменив значение переменной $yzad = 3$, получим временные и фазовую характеристики, показанные на рис. 4.20. Предельный остался устойчивым, но потерял свою «симметричность»: длительность участков положительного управления стала значительно больше, чем длительность участков отрицательного.

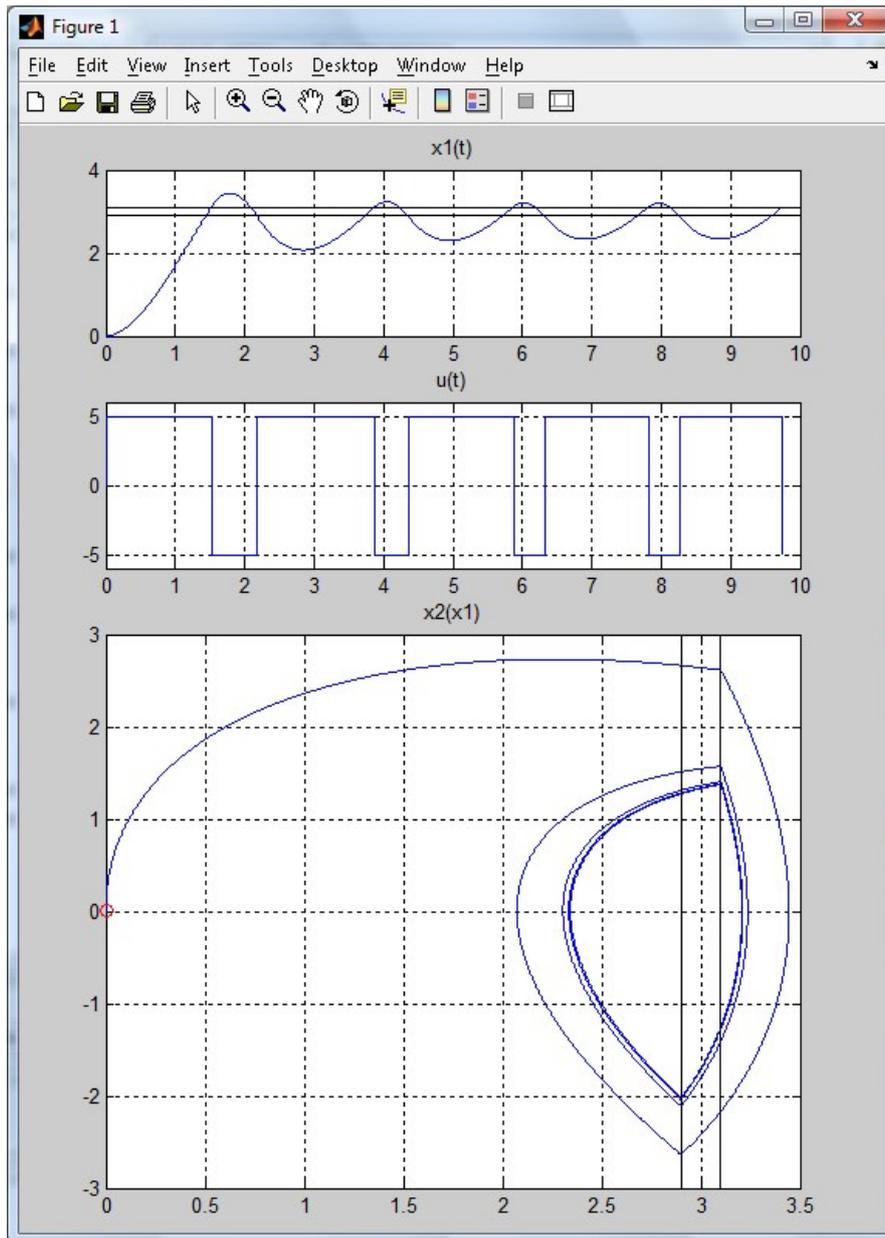


Рис. 4.20. Переходный процесс и фазовая траектория при $u_{зад}=3$.

4.4. Задание

Задана передаточная функция линейной системы

$$W(p) = \frac{b_0}{p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Значения коэффициентов передаточной функции приведены в табл. 4.1.

Нелинейный элемент представлен своей статической характеристикой.

Виды и параметры характеристики приведены в табл. 4.2.

Исходные данные к индивидуальному заданию задаются преподавателем двумя вариантами (из табл. 4.1 и из табл. 4.2) независимо друг от друга.

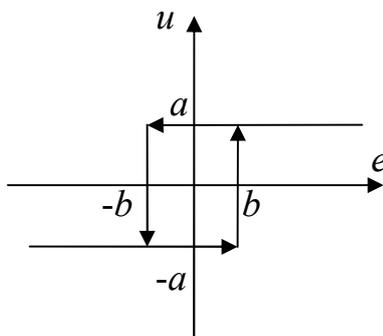
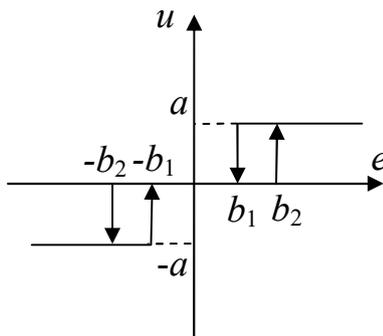
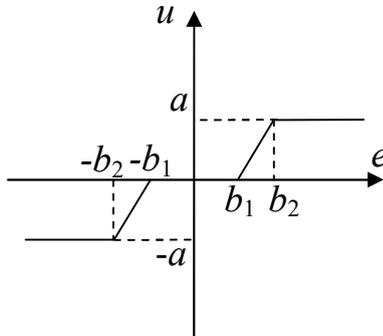
Таблица 4.1

Таблица коэффициентов полиномов

№ варианта	b_0	a_1	a_0
1	4	20	36
2		22	57
3		24	80
4		26	105
5		28	132
6		30	161
7		32	192
8		34	225
9		36	260
10		38	297
11	16	40	175
12		42	216
13		44	259
14		46	304
15		48	400
16		50	451
17		52	504
18		54	559
19		56	587
20		58	613
21	10	60	500
22		62	561
23		64	624
24		66	756
25		68	798
26		70	825
27		72	896
28		74	969
29		76	1044
30		78	1121

Таблица 4.2

Вид и параметры статической характеристики нелинейного элемента

№ варианта	Статическая характеристика	a	b_1	b_2
1	<p>Двухпозиционное реле</p> 	5	0	0
2			0,2	0,2
3			0,1	0,1
4		7	0,3	0,3
5			0,1	0,1
6			0,2	0,2
7		10	0,1	0,1
8			0,05	0,05
9			0,2	0,2
10			0,04	0,04
11	<p>Трехпозиционное реле</p> 	5	0,1	0,1
12			0,05	0,1
13			0,1	0,15
14		7	0,1	0,1
15			0,05	0,1
16			0,1	0,15
17		10	0,1	0,1
18			0,05	0,1
19			0,1	0,15
20			0,15	0,2
21	<p>Насыщение с зоной нечувствительности</p> 	5	0,1	0,2
22			0,05	0,1
23			0,1	0,3
24		7	0,1	0,2
25			0,05	0,1
26			0,1	0,3
27		10	0,1	0,2
28			0,05	0,1
29			0,1	0,3
30			0,15	0,25

Исследование фазовых траекторий линейной системы

1. Составить матрицы A и C модели линейной части системы в канонической форме управляемости и построить фазовый портрет (из двух фазовых траекторий) отклика системы на начальные условия. Начальные условия выбираются студентом самостоятельно с учётом наглядности фазового портрета.

2. Изменяя значения коэффициентов характеристического уравнения, построить фазовые портреты с особыми точками типа: устойчивый и неустойчивый фокус, устойчивый и неустойчивый узел и седло (седло всегда неустойчиво).

Исследование фазовых траекторий нелинейной системы

3. В последовательности примера (п. 4.3) провести исследования нелинейной системы на фазовой плоскости, определить наличие, устойчивость и параметры предельных циклов и исследовать переходные процессы при задании, отличном от нуля.

При выполнении данного пункта следует использовать коды программ, приведенные в п. 4.3, предварительно скорректировав некоторые их фрагменты. Основную сложность представляют алгоритмы работы нелинейного элемента. Приведем здесь программную реализацию второй и третьей статических характеристик из табл. 2 (первая приведена в примере).

Функция для трехпозиционного реле:

```
function u = ThreePosRelay(e)
global u a b1 b2
if e > b2
    u = a;
elseif e < -b2
    u = -a;
elseif (e > -b1) & (e < b1)
    u = 0;
end
```



Функция для насыщения с зоной нечувствительности:

```
function u = SatAndDeadZone(e)
global u a b1 b2
if e <= -b2
    u = -a;
elseif e >= b2
    u = a;
elseif (e >= -b1) & (e <= b1)
    u = 0;
elseif (e > -b2) & (e < -b1)
    u = -a + a/(b2-b1)*(e+b2);
elseif (e > b1) & (e < b2)
    u = a/(b2-b1)*(e-b1);
end
```

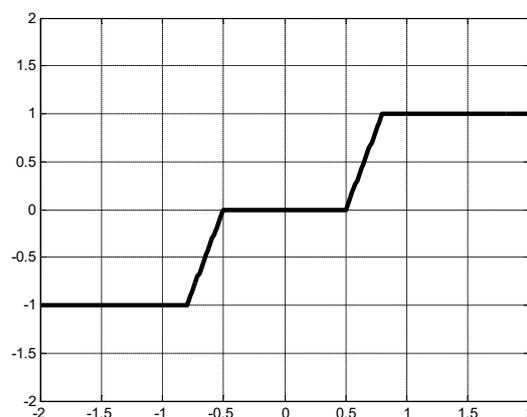


Рис. 4.21. Результаты апробации функций.

Скрипт-код для проверки:

```
global u a b1 b2
```

```

u = 0;
a = 1; b1 = .5; b2 = .8;
% Трёх позиционное реле
% "Прямой ход"
E1 = [-2:.01:2];
U1 = zeros(size(E1));
for i=1:length(E1)
    U1(i) = ThreePosRelay(E1(i));
end
% "Обратный ход"
E2 = [2:-.01:-2];
U2 = zeros(size(E2));
for i=1:length(E2)
    U2(i) = ThreePosRelay(E2(i));
end
figure(1)
plot(E1,U1,'-k',E2,U2,'--k'), grid
ca = gca;
set(ca,'YLim',[-2 2])
% Ограничение и зона нечувствительности
E = [-2:.01:2];
U = zeros(size(E));
for i=1:length(E)
    U(i) = SatAndDeadZone(E(i));
end
figure
plot(E,U,'k'), grid
ca = gca;
set(ca,'YLim',[-2 2])

```

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ЛЯПУНОВА И КРИТЕРИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОПОВА

5.1. Методы Ляпунова для определения устойчивости нелинейных систем

Если параметры системы не изменяются во времени (стационарная система) и правые части уравнений состояния явно от времени не зависят, то система называется *автономной*. Ее уравнения состояния имеют вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5.1)$$

В описание автономной системы не входят никакие внешние воздействия, а сами координаты x_1, x_2, \dots, x_n чаще всего представляют не значения переменных, описывающих систему, а отклонения этих переменных от некоторых предписанных им значений.

Рассмотрим определение устойчивости по А.М. Ляпунову.

Пусть, например, система совершала некоторое эталонное, *невозмущенное*, движение, т.е. все отклонения координат от предписанных им значений были равны нулю: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

Предположим, что в момент $t = 0$ по каким-либо причинам система получила начальное возмущение $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dots, x_n(0) = x_{n0}$, в результате чего началось новое, *возмущенное*, движение.

Представляет интерес вопрос: каким будет это возмущенное движение? Возможны следующие варианты:

1) возмущенное движение будет с течением времени стремиться к невозмущенному (к эталону). Тогда в результате переходного процесса в системе (5.1) все отклонения со временем будут стремиться к нулю: $x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0, \dots, x_n(t) \rightarrow 0$. По Ляпунову это означает, не невозмущенное движение *асимптотически устойчиво*. Аналогом такой ситуации в линейной САР является полное устранение статической ошибки в астатической системе;

2) возмущенное движение хотя и не вернется к невозмущенному, но останется в его «окрестности», т.е. «неподалеку». По Ляпунову это означает, не невозмущенное движение *устойчиво, но не асимптотически*. Аналогом такой ситуации в линейной САР является неполное устранение статической ошибки в статической системе;

3) возмущенное движение бесконечно далеко отклоняется от невозмущенного. Все или часть отклонений координат x_i со временем стремятся к бесконечности. Это означает, что невозмущенное движение *неустойчиво*.

Очевидно, что устойчивость невозмущенного движения в общем случае зависит не только от свойств системы, но и от начальных отклонений (*возмущений*) $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$. Разумно предположить, что движение, устойчивое при малых отклонениях, может оказаться неустойчивым при больших. А.М. Ляпунов разработал два общих метода определения устойчивости невозмущенного движения: первый – для случая малых отклонений (если формулировать мате-

матически точно – бесконечно малых) и второй («прямой») метод – для случая любых отклонений, позволяющий определить также и область устойчивости.

Согласно *первому методу* Ляпунова невозмущенное движение будет устойчиво при малых отклонениях (*устойчива в малом*), если линейная система, полученная в результате линеаризации уравнений (1) устойчива. Если линейная система неустойчива, невозмущенное движение также неустойчиво.

Для применения первого метода на практике требуется линеаризовать нелинейное описание системы в отклонениях в окрестности начала координат путем разложения нелинейных дифференциальных уравнений в ряд Тейлора с отбрасыванием слагаемых выше первого порядка малости и проверить устойчивость полученной линейной системы.

Пусть имеется нелинейная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + x_1^3. \end{cases}$$

Линеаризовав уравнения в окрестности рабочей точки, т.е. начала координат, получим

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 = \chi_2; \\ \dot{\chi}_2 = -\chi_1 - 2\chi_2 - 3x_{10}^2\chi_1 = -\chi_1 - 2\chi_2. \end{cases}$$

Линейная система имеет характеристический полином $p^2 + 2p + 1$, оба корня которого отрицательны и равны -1. Это означает, что линеаризованная система устойчива, а, следовательно, устойчива в малом и исходная система.

Второй (прямой) метод Ляпунова является общим методом исследования устойчивости нелинейных систем. Он дает достаточные условия устойчивости, т.е. определяет *область устойчивости*.

Метод основан на применении *знакоопределенных функций*, т.е. таких функций, которые при всех значениях переменных имеют один знак, а в начале координат обращаются в нуль. Знакоопределенные функции $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ координат системы, конечные, однозначные, непрерывные и явно от времени не зависящие называют *функциями Ляпунова*.

Наибольшее распространение для анализа устойчивости систем находят функции Ляпунова в виде положительно определенных квадратичных форм. Квадратичная форма может быть представлена в матричном виде следующим образом:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

– симметрическая матрица ($p_{jk} = p_{kj}$).

Для квадратичных форм необходимый и достаточный признак *положительной определенности* дает теорема Сильвестра: для того, чтобы квадратичная форма была *положительно определенной*, необходимо и достаточно, чтобы каждый из угловых миноров

$$\Lambda_k = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

матрицы \mathbf{P} был положителен.

Согласно второму методу Ляпунова, формулировка достаточного условия устойчивости следующая:

Если можно указать такую знакоопределенную функцию $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ координат системы (функцию Ляпунова), производная которой по времени dV/dt , согласно дифференциальным уравнениям системы, тоже является знакоопределенной функцией, но противоположного знака, то возмущенное движение асимптотически устойчиво.

Если производная dV/dt обращается в нуль и вне начала координат (но не меняет знака!), то возмущенное движение устойчиво, но не асимптотически.

Таким образом, устойчивость зависит от свойств производной функции V как функции времени.

Найдем полную производную функции V по времени системы второго порядка:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{dV}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt}.$$

Учитывая уравнения состояния, имеем:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1} \cdot f_1(x_1, x_2) + \frac{dV}{dx_2} \cdot f_2(x_1, x_2).$$

Распространяя это соотношение на системы n -го порядка, получим:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dV}{dx_i} \cdot f_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Основным недостатком второго метода Ляпунова является то, что не существует универсального способа для выбора функции $V(\mathbf{x})$ для всех возможных систем. Имеется лишь ряд методов для частных случаев, т.е. для определенных классов систем: методы А.И. Лурье, Г. Сеге, Д. Шульца и др. В общем случае от выбора функции Ляпунова зависит и получаемый результат: разные функции дают разные области устойчивости.

Пример 5.1. Пусть имеется система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3. \end{cases}$$

Найдем область устойчивости системы.

Составим функцию Ляпунова в виде

$$V(x_1, x_2) = \alpha x_1^4 + \frac{1}{2}(\beta x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + x_2^2). \quad (5.2)$$

При $\alpha > 0$ первое слагаемое в (5.2), очевидно, положительно определено. Второе слагаемое представляет квадратичную форму координат системы. Оно может быть представлено в матричном виде следующим образом

$$(x_1 \quad x_2) \times \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма будет положительно определенной, если все диагональные миноры ее матрицы положительны.

В нашем случае имеем

$$\Delta_1 = \beta, \quad \Delta_2 = \beta - \beta^2. \quad (5.4)$$

Из (5.4) следует, что квадратичная форма (5.3), а, следовательно, и функция (5.2) будут положительно определены при условии

$$0 < \beta < 1. \quad (5.5)$$

Найдем производную функции Ляпунова по времени в силу дифференциальных уравнений системы:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4\alpha x_1^3 \dot{x}_1 + \beta x_1 \dot{x}_1 + \beta x_2 \dot{x}_1 + \beta x_1 \dot{x}_2 + x_2 \dot{x}_2 = \\ &= 4\alpha x_1^3 x_2 + \beta x_1 x_2 + \beta x_2^2 - \beta x_1 x_2 - \beta x_1^4 - x_2^2 - x_1^3 x_2 = \\ &= -\beta x_1^4 - (1 - \beta)x_2^2 + (4\alpha - 1)x_1^3 x_2. \end{aligned}$$

Выбирая $\alpha = 1/4$, получим

$$\frac{dV}{dt} = -\beta x_1^4 - (1 - \beta)x_2^2. \quad (5.6)$$

С учетом неравенства (5.5), очевидно, что производная функции Ляпунова отрицательно определена при любых значениях x_1 и x_2 , что означает устойчивость системы в целом.

Для общности рассуждений, заметим, что выражение (5.6) представляет собой квадратичную форму относительно x_1^2 и x_2 :

$$(x_1^2 \quad x_2) \times \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -(1 - \beta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Диагональные миноры матрицы квадратичной формы

$$\Delta_1 = -\beta < 0, \quad \Delta_2 = \beta - \beta^2 > 0,$$

удовлетворяют достаточному условию Сильвестра для отрицательно определенной квадратичной формы. Далее, поскольку форма (5.6) отрицательно определена относительно x_1^2 и x_2 , она также отрицательно определена относительно и для x_1 и x_2 .

Пример 5.2. Пусть имеется система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = (-1 + 0,2x_2)x_1 + (-2 + 0,5x_1)x_2. \end{cases}$$

Определим устойчивость системы в диапазоне отклонений $-1 < x_1 < 1$, $-1 < x_2 < 1$.

Для этого используем функцию Ляпунова вида (см. предыдущий пример):

$$V(x_1, x_2) = \alpha x_1^4 + \frac{1}{2}(\beta x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + x_2^2).$$

Ее производная по времени:

$$\frac{dV}{dt} = 4\alpha x_1^3 \dot{x}_1 + \beta x_1 \dot{x}_1 + \beta x_2 \dot{x}_1 + \beta x_1 \dot{x}_2 + x_2 \dot{x}_2.$$

Не прибегая к подстановке, найдем значения производной функции Ляпунова численно, с помощью Matlab, при $\alpha=0,25$, $\beta=0,9$ в заданном диапазоне изменения отклонений. Построим графики зависимости $dV/dt(x_1, x_2)$:

```
clear
close all
x1 = -1:.05:1;
x2 = -1:.05:1;
% Формирование прямоугольных матриц для расчета
[X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
% Вычисление правых частей диф. уравнений
a2 = -2 + 0.5*X1;
a1 = -1 + 0.2*X2;
dX1 = X2;
dX2 = a1.*X1 + a2.*X2;
a = .25; b = 0.9;
%Вычисление dV/dt
dV = 4*a*X1.^3.*dX1+b*X1.*dX1+b*X2.*dX1+b*X1.*dX2+X2.*dX2;
% Трехмерный график зависимости
figure(1)
mesh(X1,X2,dV), grid on
xlabel('x1'); ylabel('x2'); zlabel('dV/dt');
% Линии уровня
figure(2)
[cm,cg]=contour(X1,X2,dV,[-4,-2,-1.5,-1,-0.7,-.3,-.1,-.02]);
grid on
set(cg,'ShowText','on')
xlabel('x1'); ylabel('x2');
```

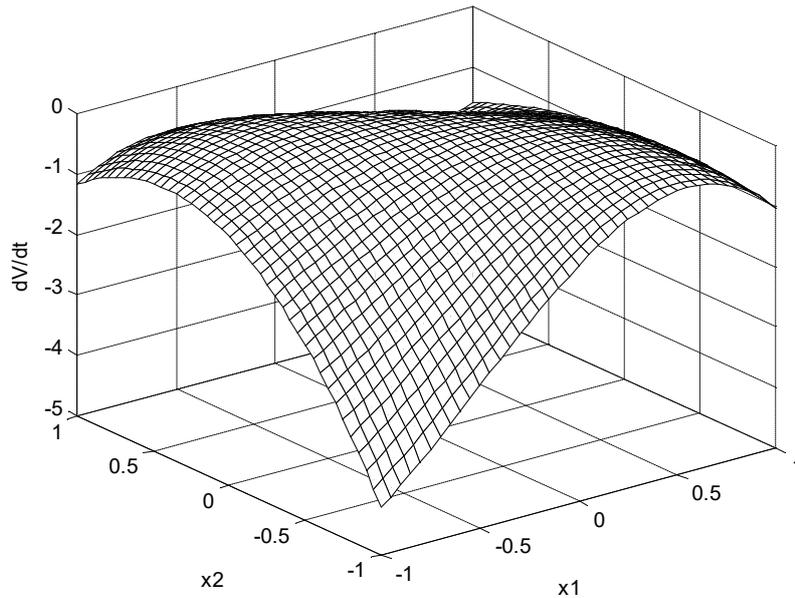


Рис. 5.1. График зависимости $dV/dt(x_1, x_2)$.

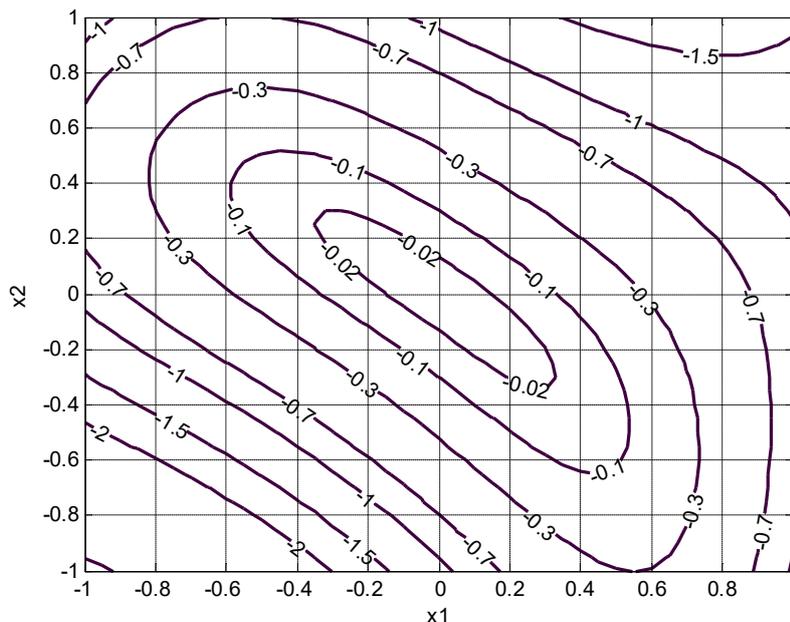


Рис. 5.2. Линии уровня $dV/dt(x_1, x_2)$.

Графики показывают устойчивость вынужденного движения в заданном диапазоне отклонений. Проверим справедливость данного вывода, рассчитав движение системы из начальной точки $x_{10} = 0,6$, $x_{20} = 0,8$. Для этого задействуем файл-функцию

```
function dx = lyapsyst(t, x)
a2 = -2 + 0.5*x(1);
a1 = -1 + 0.2*x(2);
dx = [x(2); ...
      a1*x(1) + a2*x(2)];
```

и следующий код:

```
figure(3)
```

```
[t,X] = ode45(@lyapsyst,[0 10],[.6 .8]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
grid on
```

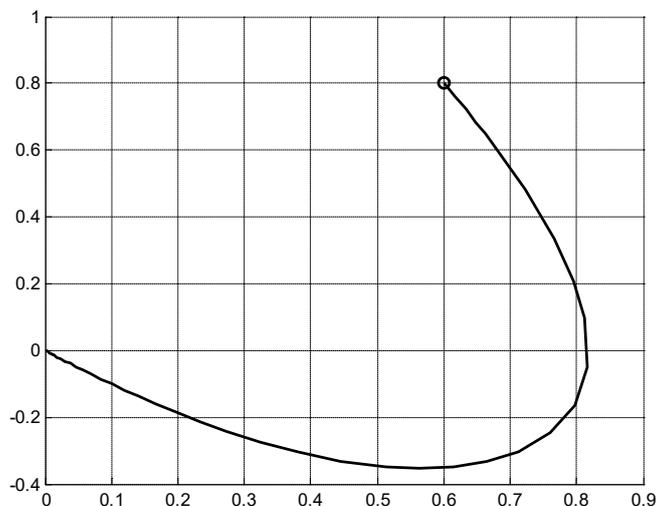


Рис. 5.3. Фазовая траектория системы из начального состояния $x_{10}=0,6$, $x_{20}=0,8$.

Из рис. 5.3 видно, что возмущенное движение действительно устойчиво.

Незначительно модифицировав приведенную выше программу, рассчитаем теперь производную функции Ляпунова в более широком диапазоне отклонений $-1,8 < x_1 < 1,8$, $-1,8 < x_2 < 1,8$. Результат показан на рис. 5.4.

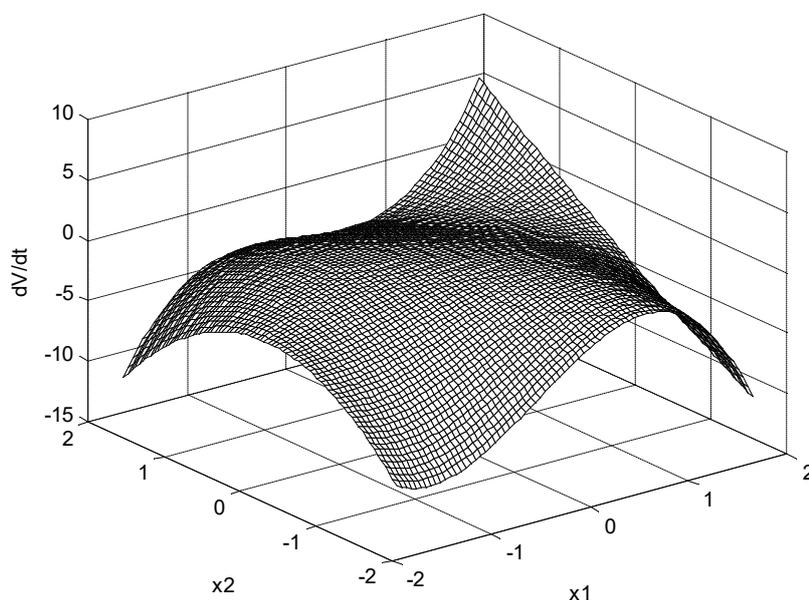


Рис. 5.4. График зависимости $dV/dt(x_1, x_2)$ при $-1,8 < x_1 < 1,8$, $-1,8 < x_2 < 1,8$.

На рис. 5.5 приведены линии уровня в диапазоне изменения переменных $1 < x_1 < 1,8$, $1 < x_2 < 1,8$.

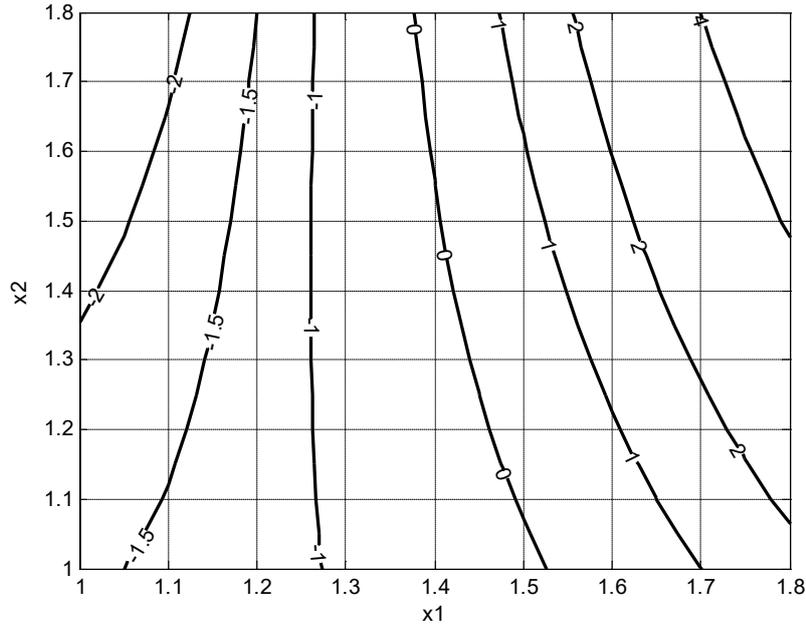


Рис. 5.5. Линии уровня $dV/dt(x_1, x_2)$ при $1 < x_1 < 1,8$, $1 < x_2 < 1,8$.

При одновременном увеличении отклонений производная функции Ляпунова становится положительной, что не позволяет нам сделать вывода об устойчивости системы. Поскольку прямой метод Ляпунова дает лишь достаточные, но не необходимые условия устойчивости, судить об устойчивости нельзя.

С другой стороны, сама структура дифференциальных уравнений говорит о возможной потере устойчивости, поэтому построим фазовые характеристики системы для нескольких достаточно больших положительных отклонений:

```
figure(3)
hold on
[t,X] = ode45(@lyapsyst,[0 10],[2 4]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@lyapsyst,[0 10],[4 3]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@lyapsyst,[0 1.5],[3 4]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
[t,X] = ode45(@lyapsyst,[0 1.5],[2 5]);
plot(X(:,1),X(:,2),X(1,1),X(1,2),'or'),
grid on
hold off
```

Результаты расчета приведены на рис 5.6. Система действительно теряет устойчивость, хотя и при несколько больших отклонениях, чем по результатам ранее проведенных исследований.

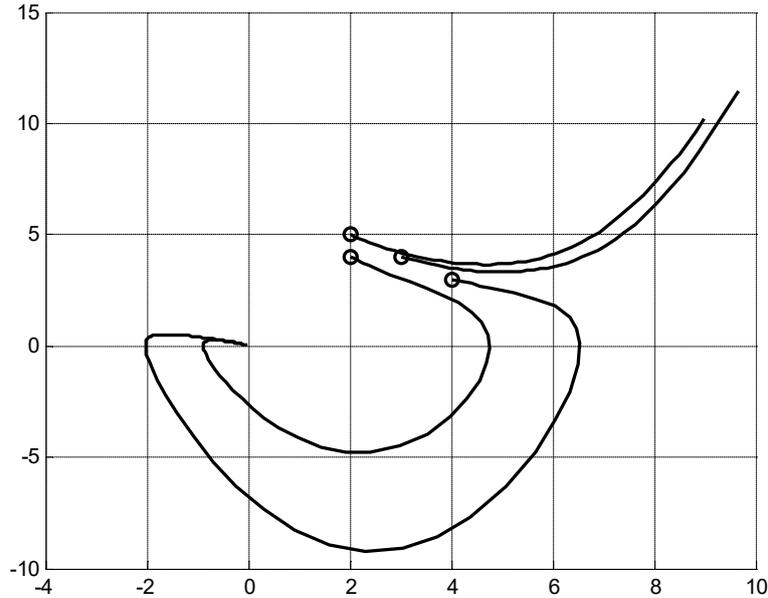


Рис.5.6. Фазовые траектории системы при больших начальных отклонениях.

5.2. Критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова

Абсолютной устойчивостью называют асимптотическую устойчивость свободного движения динамической системы при произвольных начальных условиях относительно положения равновесия вне зависимости от конкретной формы нелинейности.

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями вида

$$\begin{cases} y(t) = W(p)u(t); \\ u(t) = -\phi(y(t)), \end{cases} \quad (5.7)$$

где $W(p)$ – передаточная функция линейной части системы, $\phi(y)$ – непрерывная однозначная функция, удовлетворяющая при $y \neq 0$ условию

$$0 < \frac{\phi(y)}{y} < k \leq +\infty. \quad (5.8)$$

Условие (5.8) означает, что график функции $\phi(y)$ должен находиться в секторе, ограниченном осью y и прямой с коэффициентом наклона, равном k (рис.5.7).

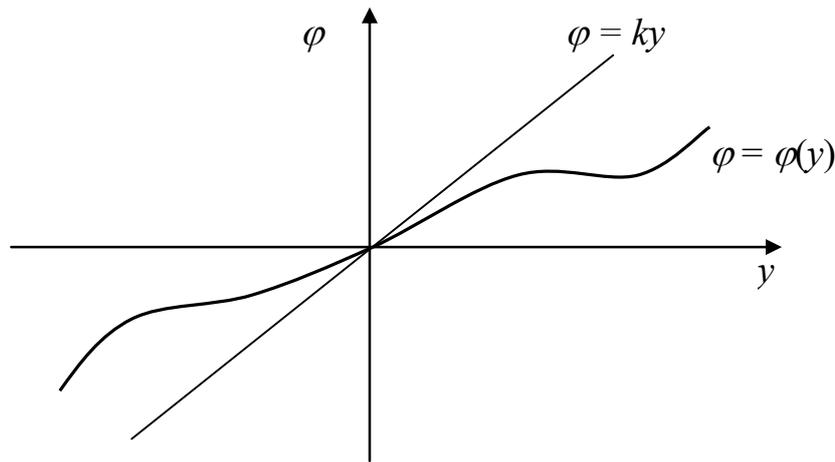


Рис.5.7. Статическая характеристика нелинейности.

Таким образом, уравнения (5.7) описывают систему, состоящую из линейной части, охваченной отрицательной нелинейной обратной связью.

Сформулируем критерий абсолютной устойчивости Попова для случая, когда $W(p)$ имеет только левые полюса (линейная часть устойчива):

Если существует, такое вещественное число q , что при всех $\omega \geq 0$ выполнено условие

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] \geq 0, \quad (5.9)$$

то система абсолютно устойчива.

Критерий допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Так как $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, то условие (5.9) равносильно неравенству

$$\frac{1}{k} + P(\omega) - q\omega Q(\omega) \geq 0. \quad (5.10)$$

Построим модифицированную частотную характеристику, изображающая точка которой определяется координатами $P(\omega)$, $\omega Q(\omega)$ (рис. 5.8). Условие (5.10) означает, что на плоскости P , Q должна существовать прямая $\frac{1}{k} + P - q\omega Q \geq 0$ (прямая Попова), проходящая через точку $(-1/k, 0)$ и лежащая левее модифицированной частотной характеристики. Угол наклона этой прямой определяется параметром q (рис. 5.8).

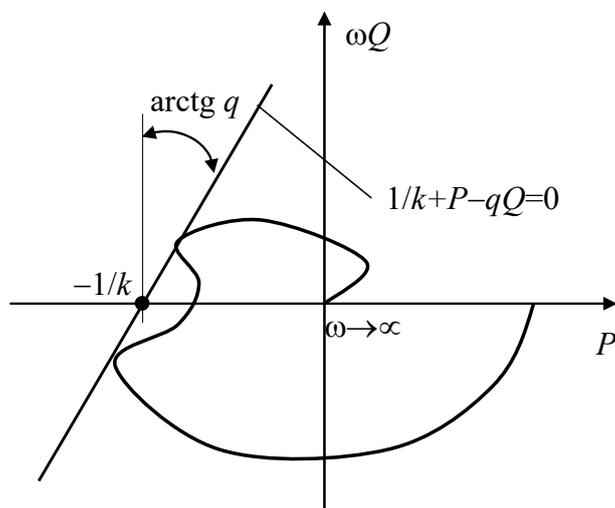


Рис. 5.8. Графическая интерпретация критерия абсолютной устойчивости.

Пример 5.3. Определить границы сектора, в котором должна лежать статическая характеристика нелинейного элемента, чтобы система, имеющая линейную часть с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}$$

была абсолютно устойчивой.

Передаточная функция линейной части имеет только левые полюса: $p_1 = p_2 = p_3 = -1$, поэтому мы вправе применить для решения данной задачи критерий Попова.

Частотная характеристика линейной части системы

$$W(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{1 - 3\omega^2 - j\omega(3 - \omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2}$$

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] = \frac{1 - 3\omega^2 + q\omega^2(3 - \omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2}$$

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] = \frac{\omega^6 + (-kq + 3)\omega^4 + (-3k + 3kq + 3)\omega^2 + k + 1}{k[(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2]}$$

Для того чтобы при всех $\omega \geq 0$ выполнялось условие $\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] \geq 0$, необходимо, чтобы при всех $\omega \geq 0$ соблюдалось неравенство

$$\omega^6 + (-kq + 3)\omega^4 + (-3k + 3kq + 3)\omega^2 + k + 1 \geq 0.$$

Простейший путь обеспечить соблюдение неравенства – потребовать выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} -kq + 3 \leq 0; \\ -3k + 3kq + 3 \geq 0, \end{cases}$$

откуда приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} q \leq \frac{3}{k}; \\ q \geq 1 - \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Решение системы существует при $k \leq 4$.

Таким образом, здесь доказано, что система абсолютно устойчива, если $0 < \frac{\varphi(y)}{y} < 4$. Однако, это не является решением задачи, поскольку неравенство $\omega^6 + (-kq + 3)\omega^4 + (-3k + 3kq + 3)\omega^2 + k + 1 \geq 0$ может выполняться и в случае отрицательных коэффициентов при степенях ω . Поэтому вполне вероятно, что существует более общее решение, и предельное значение k может быть больше четырех.

Предельное значение k соответствует случаю, когда при некотором значении ω неравенство обращается в равенство, а его левая часть достигает минимума. Поэтому решение может быть найдено из системы уравнений:

$$\begin{cases} \omega^6 + (-kq + 3)\omega^4 + (-3k + 3kq + 3)\omega^2 + k + 1 = 0; \\ 6\omega^5 + 4(-kq + 3)\omega^3 + 2(-3k + 3kq + 3)\omega = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы затруднительно, поэтому перейдем к графическому решению задачи.

Запишем уравнение модифицированной частотной характеристики линейной части:

$$W^*(j\omega) = P(\omega) + j\omega Q(\omega) = \frac{1 - 3\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2} + j \frac{-\omega^2(3 - \omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + \omega^2(3 - \omega^2)^2}.$$

Построим модифицированный годограф и прямую Попова (рис.5.9). Прямая касается годографа в точке $(-0,125, 0)$ и имеет угол наклона 45° . Следовательно, предельное значение $k = 1/0,125 = 8$, при этом $q = 1$.

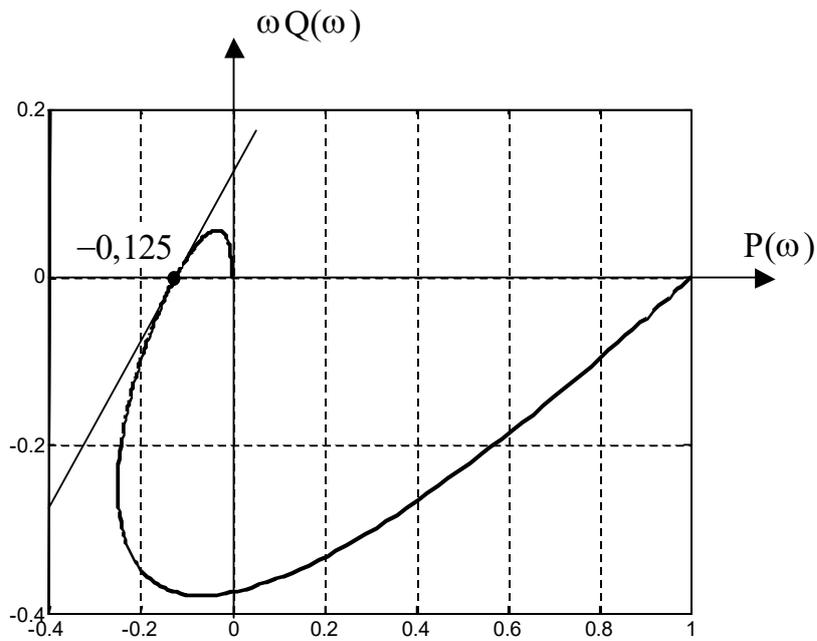


Рис. 5.9. Построение прямой Попова.

Проверим полученные результаты, в построив график функции $\frac{1}{k} + \text{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)]$ при найденных значениях k и q (рис. 5.10).

Как видно из графика, наше предположение о характере изменения данной функции подтвердилось.

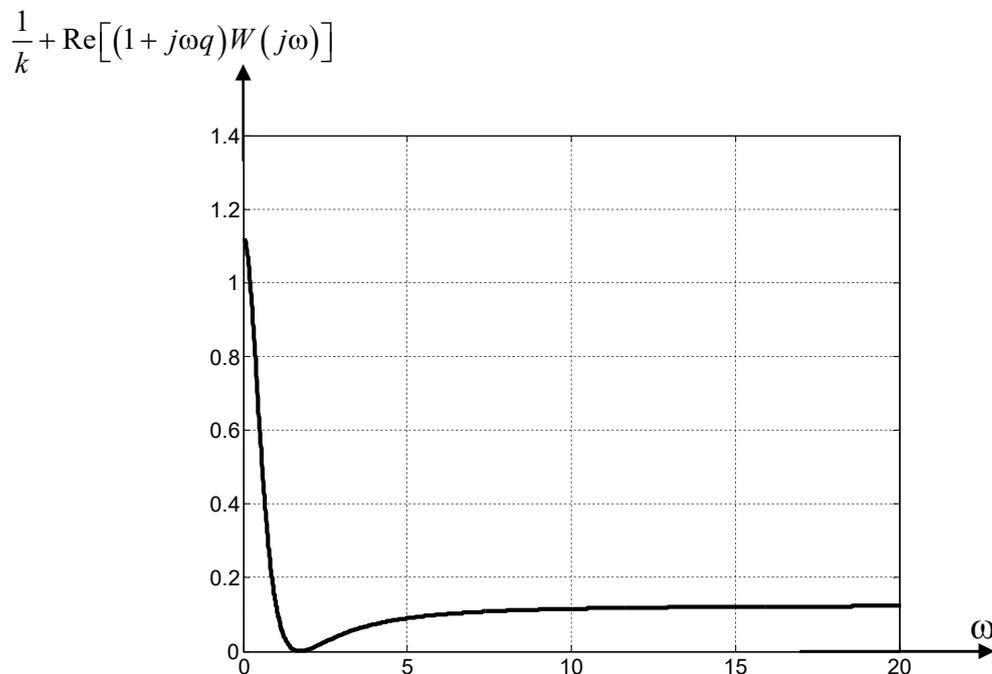


Рис. 5.10. График функции $\frac{1}{k} + \text{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)]$.

Продemonстрируем полученные результаты с помощью имитационной модели в Simulink (рис. 5.11).

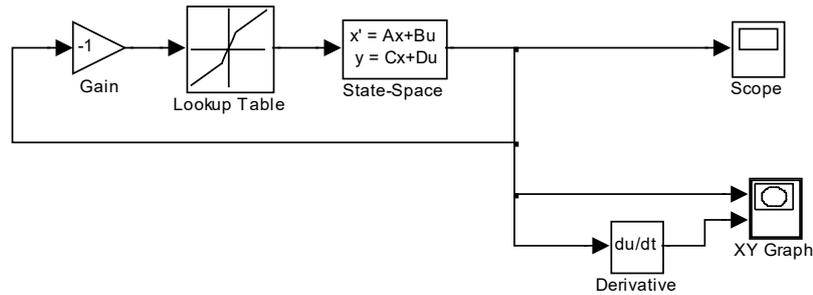


Рис. 5.11. Simulink-модель для примера 2.

Окно настройки блока State-Space показано на рис. 5.12. Матрицы SS-модели соответствуют канонической форме управляемости. Начальное условие задано в виде:

$$x_1(0) = 8, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0.$$

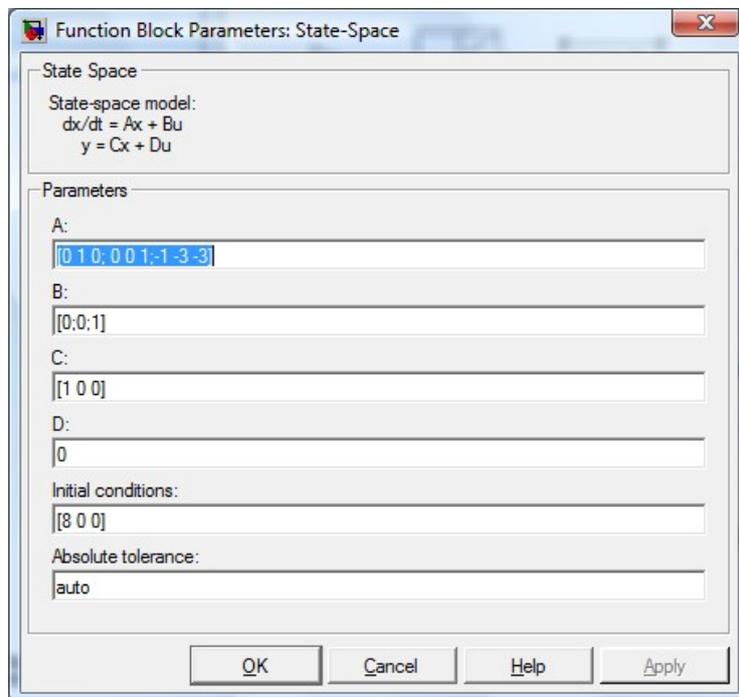


Рис. 5.12. Настройка блока State-Space.

Нелинейный элемент задается своей статической характеристикой таблично в блоке Lookup Table, рис. 5.13.

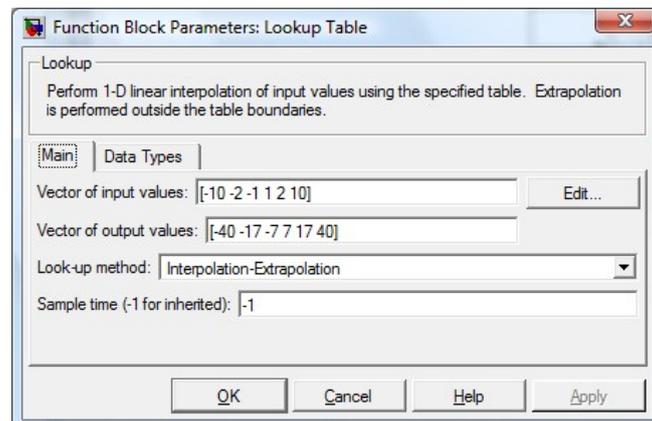


Рис. 5.13. Настройка блока Lookup Table.

Исследуется поведение системы при двух различных вариантах статической характеристики нелинейного элемента, рис. 5.14.

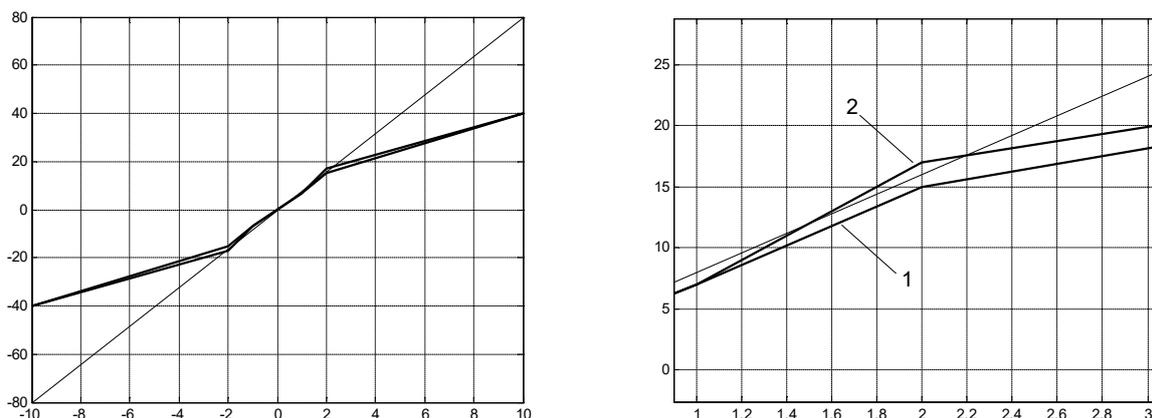


Рис. 5.14. Статические характеристики нелинейности.

Характеристика 1 удовлетворяет критерию Попова, так как лежит в секторе, ограниченном осью абсцисс и прямой с коэффициентом наклона $k = 8$, определенным нами ранее. Характеристика 2 критерию не удовлетворяет, поскольку за границе сектора выходит, пусть незначительно и в небольшой области.

Результаты моделирования для характеристик 1 и 2 показаны на рис. 5.15 и 5.16 соответственно.

В первом случае выходной сигнал линейной части системы представляет собой затухающие со временем колебания, а изображающая точка на фазовой плоскости стремится к началу координат. Таким образом, система устойчива.

Во втором случае колебания являются незатухающими, а на фазовой плоскости мы видим предельный цикл. Система не является устойчивой.

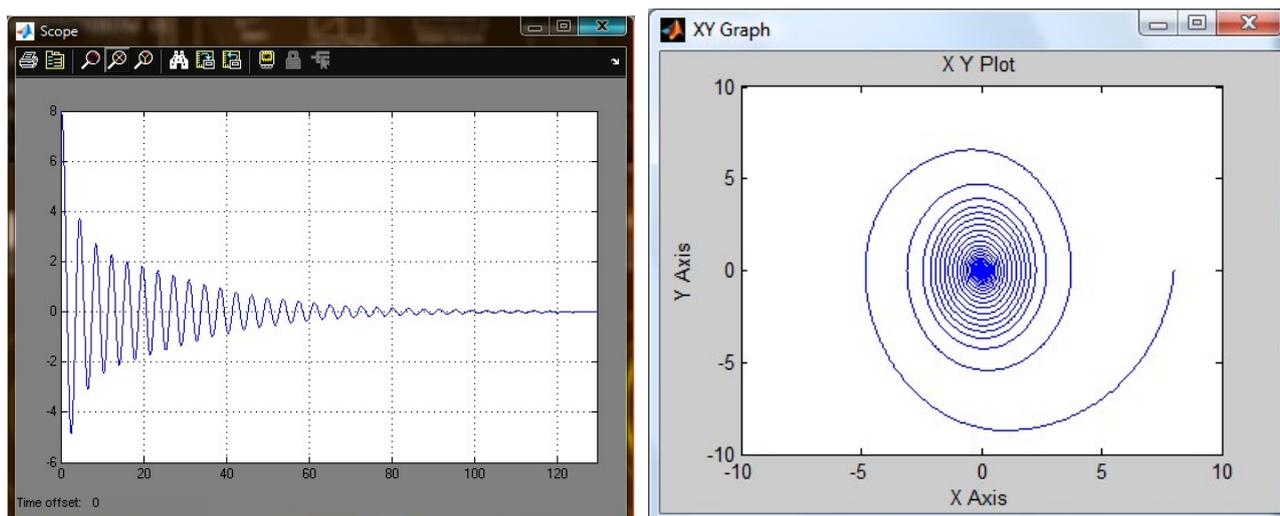


Рис. 5.15. Результаты моделирования для характеристики 1.

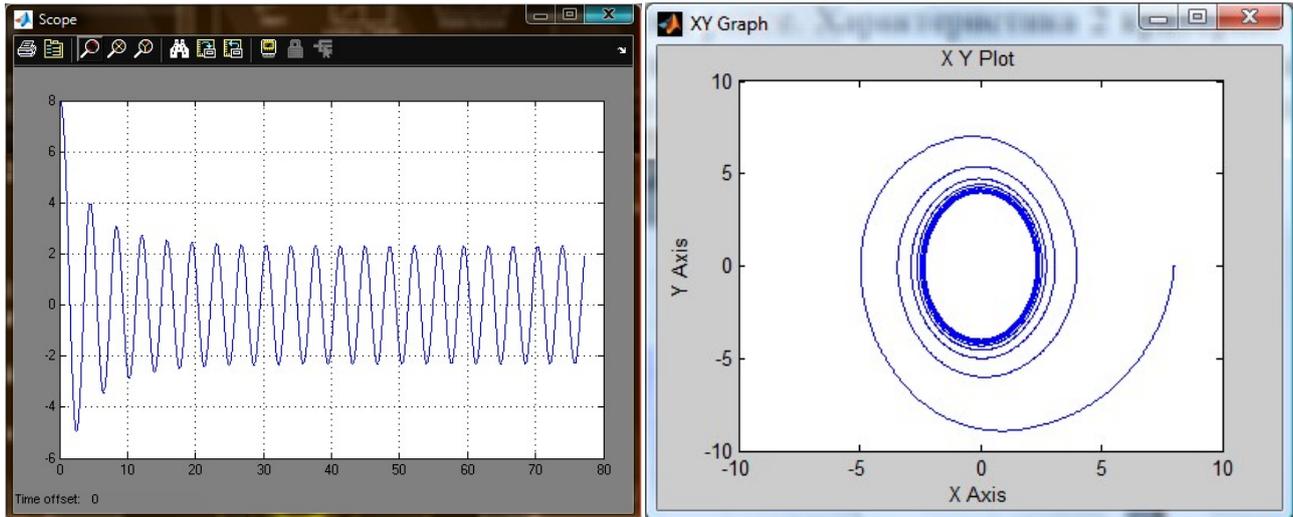


Рис. 5.16. Результаты моделирования для характеристики 2.

5.2. Задание

1) Имеется нелинейная система, невозмущенное движение которой описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = a_1(x_1, x_2)x_1 + a_2(x_1, x_2)x_2. \end{cases}$$

Функции $a_1(x_1, x_2)$, $a_2(x_1, x_2)$ по вариантам приведены в таблице 5.1.

Требуется:

- определить устойчивость невозмущенного движения при малых отклонениях (устойчивость в малом) первым методом Ляпунова;
- определить область устойчивости с помощью второго (прямого) метода Ляпунова. Изменяя коэффициенты функции Ляпунова максимально «расширить» область устойчивости. Рассчитать свободное движение системы при значительных начальных отклонениях (возмущениях) в областях устойчивости и неустойчивости, построить фазовые характеристики.

2) Определить графическим способом границы сектора, в котором должна лежать статическая характеристика нелинейного элемента, чтобы система, имеющая линейную часть с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{a_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

была абсолютно устойчивой. Коэффициенты передаточной функции заданы в таблице 5.1. Построить модель системы и исследовать ее поведение расположив статическую характеристику нелинейного элемента как внутри сектора, так с пересечениями его границы (см. пример 5.2).

Таблица 5.1

Исходные данные к заданию 1

Номер варианта	$a_1(x_1, x_2)$	$a_2(x_1, x_2)$
1	$-1 + 0,2x_1x_2$	$-1 + 0,3x_2$
2	$-2 + 0,15x_1^2$	$-3 + 0,1x_2^2$
3	$-1 + 0,3x_2$	$-3 + 0,1x_1^2x_2$
4	$-4 + 0,8x_1$	$-2 + 0,2x_1x_2^2$
5	$-3 + 0,1x_2^2$	$-1 + 0,3x_2$
6	$-3 + 0,1x_1^2x_2$	$-4 + 0,8x_1$
7	$-2 + 0,2x_1x_2^2$	$-1 + 0,2x_1x_2$
8	$-1 + 0,2x_1x_2$	$-3 + 0,1x_2^2$
9	$-2 + 0,15x_1^2$	$-3 + 0,1x_1^2x_2$
10	$-1 + 0,3x_2$	$-1 + 0,2x_1x_2$
11	$-4 + 0,8x_1$	$-3 + 0,1x_1^2x_2$
12	$-3 + 0,1x_2^2$	$-4 + 0,8x_1$
13	$-3 + 0,1x_1^2x_2$	$-2 + 0,2x_1x_2^2$

Таблица 5.2

Исходные данные к заданию 2

Номер варианта	a_2	a_1	a_0
1	4	8	20
2	6	10	35
3	8	15	55
4	10	25	100
5	5	25	80
6	7	40	120
7	8	50	175
8	5	60	180
9	10	40	185
10	15	40	235
11	20	40	350
12	30	50	550
13	20	60	500

6. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

6.1. Метод гармонического баланса: общие сведения

В данной работе рассматривается метод гармонической линеаризации для приближенного определения периодических решений (автоколебаний) и устойчивости нелинейных систем любого порядка, который идейно близок к методу гармонического баланса Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова. Так что в дальнейшем метод гармонической линеаризации будем называть *методом гармонического баланса*. В англоязычной литературе этот метод называют *методом описывающей функции*.

Метод гармонического баланса применим к системам, содержащим только одну нелинейность. Система такой структуры изображена на рис. 6.1.

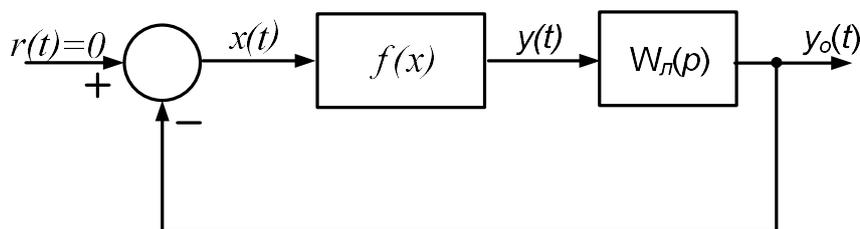


Рис.6.1. Структурная схема нелинейной системы.

Заметим, что входной сигнал отсутствует: $r(t) = 0$. Такую систему называют *свободной*. Если же она является стационарной, т.е. ее параметры не изменяются со временем, то систему называют *автономной*. Колебания в автономной системы называют *автоколебаниями*. В общем случае линейная часть системы с передаточной функцией $W_n(p)$ может включать в себя не только объект управления, но и исполнительный механизм и измерительный преобразователь.

6.2. Гармоническая линеаризация нелинейных звеньев

Предположим, что сигнал на входе нелинейного звена является синусоидальным:

$$x(\omega t) = A \sin \omega t = A \sin \psi, \quad \psi = \omega t.$$

Комплексная амплитуда такого сигнала имеет вид:

$$\dot{A} = A e^{j0^\circ} = A.$$

Сигнал на выходе нелинейного звена $y(t)$ будет несинусоидальным, но периодическим и может быть представлен в виде ряда Фурье. Предположим, что линейная часть системы обладает свойствами фильтра низких частот, т.е. подавляет все высшие гармоники. Такое допущение называют *гипотезой фильтра*. В результате сигнал на выходе системы можно представить только в виде первой гармоники, амплитуда которой, однако, зависит от амплитуды входного воздействия:

$$y(\psi) = Y \sin(\psi + \Theta) = B_1 \sin \psi + C_1 \cos \psi .$$

Амплитуды синусной и косинусной составляющих первой гармоники определяются выражениями:

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\psi) \sin(\psi) d\psi ; \quad C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\psi) \cos(\psi) d\psi .$$

Комплексная амплитуда выходного сигнала:

$$\dot{Y} = B_1 + jC_1 = Ye^{j\Theta} .$$

Таким образом, нелинейность можно представить в виде комплексного коэффициента передачи (ККП) или описывающей функции:

$$W_n(A) = \frac{\dot{Y}}{A} = \frac{Ye^{j\Theta}}{A} = \frac{B_1 + jC_1}{A} = k_1 + jk_2 ,$$

где

$$k_1 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} y(\omega t) \sin(\omega t) d\omega t ; \quad k_2 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} y(\omega t) \cos(\omega t) d\omega t .$$

Как видно из полученных выражений, ККП зависит от амплитуды.

Напомним два допущения, с которыми были получены ККП:

- 1) входной сигнал нелинейной системы является синусоидальным;
- 2) линейная система, следующая за нелинейной, обладает свойством фильтра нижних частот и подавляет все высшие гармоники настолько, что ими можно пренебречь.

Найдем ККП для некоторых нелинейностей.

Идеальное двухпозиционное реле

Рассмотрим звено с идеальной релейной характеристикой, подадим на его вход гармонический сигнал и найдем периодический сигнал на его выходе (рис.6.2).

Так как кривая выходного сигнала является симметричной относительно начала координат, то косинусная составляющая отсутствует. Кроме того, имеется симметрия относительно оси абсцисс. Это позволяет проводить разложение на половине периода, удваивая результат.

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a \cdot \sin \psi \cdot d\psi = -\frac{2a}{\pi} \cos \psi \Big|_0^{\pi} = \frac{4a}{\pi} ; \quad C_1 = 0 .$$

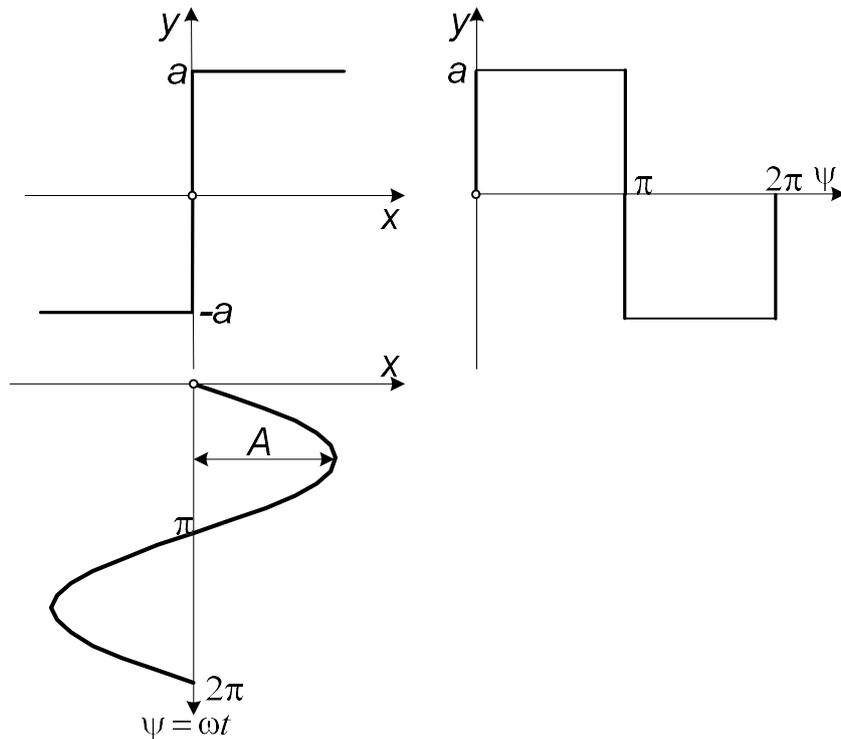


Рис.6.2. Идеальная релейная характеристика.

Мгновенное значение первой гармоники выходного сигнала НЭ:

$$y(\omega t) = \frac{4a}{\pi} \sin \omega t .$$

Комплексный коэффициент передачи становится вещественным числом:

$$W_i(A) = \frac{\dot{Y}}{\dot{A}} = \frac{Ye^{j\theta}}{A} = \frac{B_1 + jC_1}{A} = \frac{B_1}{A} = \frac{4a}{\pi A} = k_1;$$

$$k_1 = \frac{4a}{\pi A} .$$

Мгновенное значение первой гармоники выходного сигнала:

$$y(\omega t) = \frac{4a}{\pi} \sin \omega t .$$

Элемент с ограничением

Рассмотрим звено с характеристикой типа *насыщение* или *ограничение*. Примерами такого звена могут служить электронные усилители с насыщением, механические ограничители в системах с поступательным и вращательным движением, таких как рулевые устройства самолетов и кораблей. При малых сигналах эти устройства работают как линейные. Но при больших входных сигналах наступает насыщение и выходной сигнал имеет вид обрезанной синусоиды (рис. 6.3).

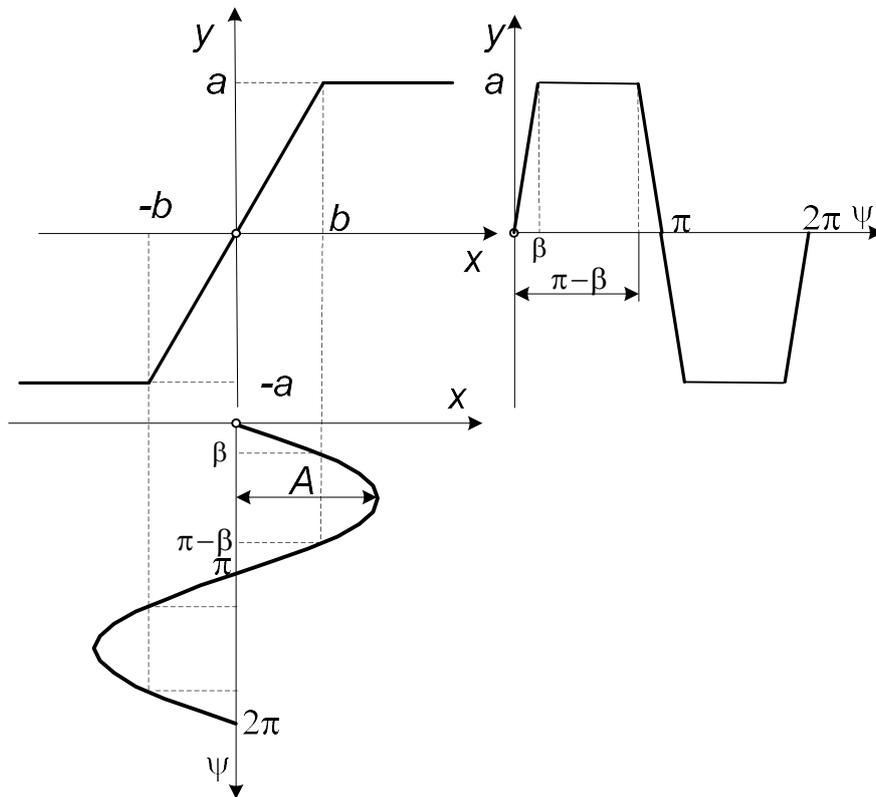


Рис. 6.3. Насыщение (ограничение).

Статическая характеристика релейного элемента в первом квадранте состоит из двух участков. На первом участке характеристика имеет вид прямой линии с угловым коэффициентом k , т.е. $y = kx$, где $k = \text{arctg}(a/b)$. Поэтому выходной сигнал на данном участке

$$y = kA \sin \psi.$$

На втором участке $y = a$. Кривая выходного сигнала симметрична относительно начала координат, поэтому косинусные составляющие отсутствуют. Кроме того, на половине периода кривая симметрична относительно оси ординат, поэтому ее можно раскладывать на четвертой части периода и результат учетверять. Проведем эти операции:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\beta} y_1 \cdot \sin \psi \cdot d\psi + \int_{\beta}^{\pi/2} y_2 \cdot \sin \psi \cdot d\psi \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\beta} kA \sin \psi \cdot \sin \psi \cdot d\psi + \int_{\beta}^{\pi/2} a \cdot \sin \psi \cdot d\psi \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(kA \left[\frac{\psi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\psi \right]_0^{\beta} - a \cdot \cos \psi \Big|_{\beta}^{\pi/2} \right) = \frac{4}{\pi} \left[kA \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\beta \right) + a \cdot \cos \beta \right]. \end{aligned}$$

Учтем следующие соотношения:

$$b = A \sin \beta; \quad \sin \beta = \frac{b}{A}; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}; \quad a = kb;$$

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = 2 \frac{b}{A} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}.$$

В результате получим:

$$B_1 = \frac{4}{\pi} \left[\frac{kA\beta}{2} - \frac{1}{2} kb \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} + kb \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right] = \frac{2k}{\pi} \left[A\beta + b \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right].$$

Запишем выражения для коэффициентов гармонической линеаризации:

$$k_1 = \frac{B_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[\beta + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right] = \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{b}{A} \right) + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right]; \quad k_2 = 0;$$

$$W_n(A) = k_1 + jk_2 = \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{b}{A} \right) + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right].$$

Идеальное трехпозиционное реле с зоной нечувствительности

Рассмотрим звено с характеристикой, показанной на рис. 6.4.

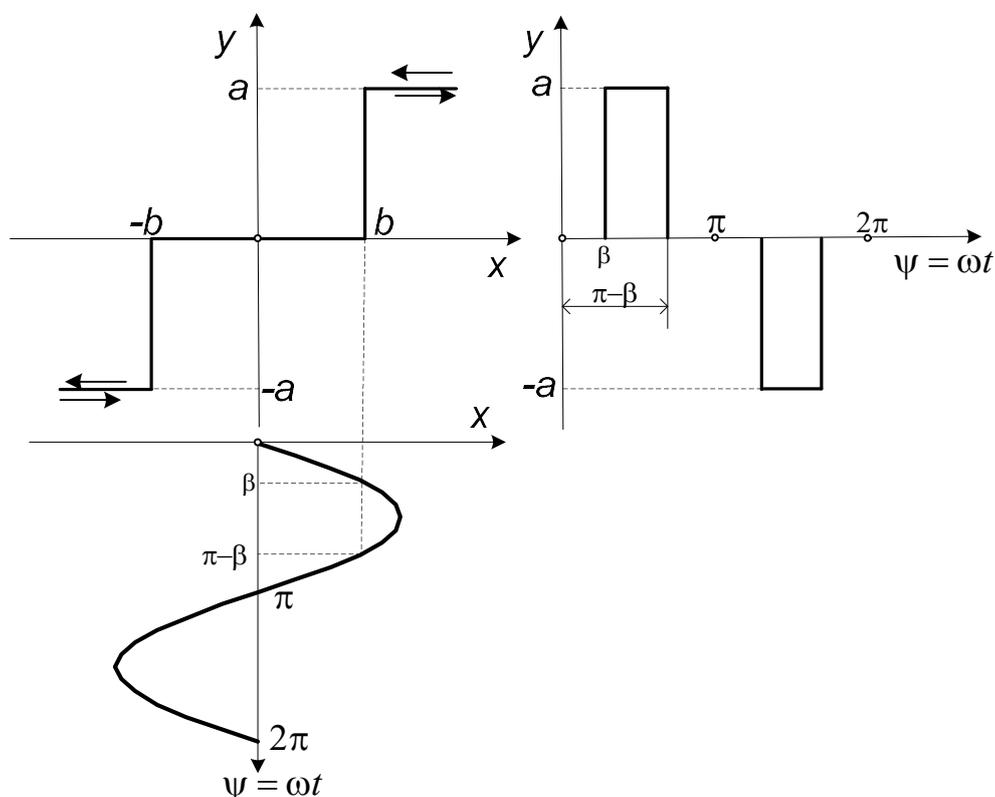


Рис.6.4. Идеальное трехпозиционное реле с зоной нечувствительности.

Здесь также можно проводить разложение на интервале в четверть периода:

$$B_1 = \frac{4}{\pi} \int_{\beta}^{\pi/2} a \cdot \sin \psi \cdot d\psi = -\frac{4a}{\pi} \cos \psi \Big|_{\beta}^{\pi/2} = \frac{4a}{\pi} \cos \beta = \frac{4a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}.$$

Коэффициенты гармонической линеаризации:

$$k_1 = \frac{B_1}{A} = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}; \quad k_2 = 0; \quad W_n(A) = k_1 + jk_2 = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}.$$

Трехпозиционное реле с зоной нечувствительности и гистерезисом

Рассмотрим звено с характеристикой, показанной на рис. 6.5.

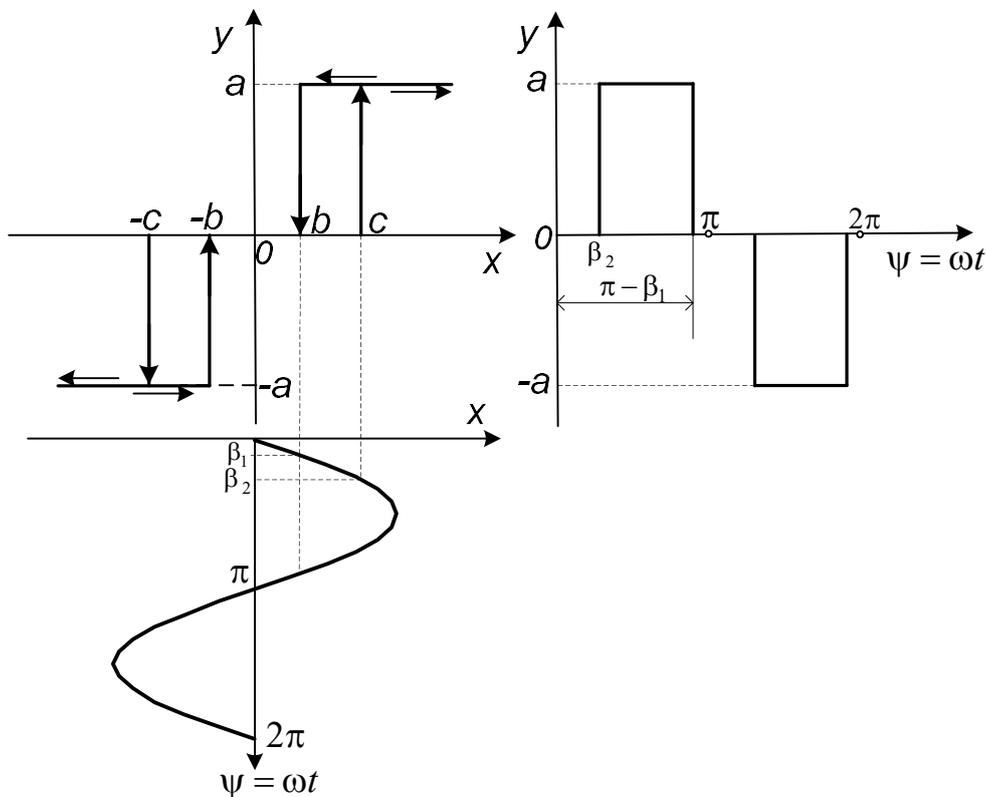


Рис. 6.5. Реле с зоной нечувствительности и гистерезисом.

Кривая выходного сигнала симметрична относительно оси ординат, но несимметрична относительно начала координат, поэтому присутствуют как синусные, так и косинусные составляющие, а разложение можно проводить на половине периода.

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_{\beta_2}^{\pi - \beta_1} a \cdot \sin \psi \cdot d\psi = -\frac{2a}{\pi} \cos \psi \Big|_{\beta_2}^{\pi - \beta_1} = \frac{2a}{\pi} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2);$$

$$B_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\beta_2}^{\pi - \beta_1} a \cdot \cos \psi \cdot d\psi = \frac{2a}{\pi} \sin \psi \Big|_{\beta_2}^{\pi - \beta_1} = \frac{2a}{\pi} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2).$$

Учтем, что

$$b = A \sin \beta_1; \quad \sin \beta_1 = \frac{b}{A}; \quad \cos \beta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2};$$

$$c = A \sin \beta_2; \quad \sin \beta_2 = \frac{c}{A}; \quad \cos \beta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{A}\right)^2}.$$

В результате получим:

$$B_1 = \frac{2a}{\pi} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{c}{A}\right)^2} \right);$$

$$B_2 = \frac{2a}{\pi} \left(\frac{b}{A} - \frac{c}{A} \right) = -\frac{2a}{\pi A} (c - b).$$

Коэффициенты гармонической линеаризации:

$$k_1 = \frac{B_1}{A} = \frac{2a}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{c}{A}\right)^2} \right) \quad \text{при } A > b;$$

$$k_2 = \frac{B_2}{A} = -\frac{2a}{\pi A^2} (c - b) \quad \text{при } A > c;$$

$$\begin{aligned} W_n(A) &= k_1 + jk_2 = \frac{2a}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{c}{A}\right)^2} - j \frac{c - b}{A} \right) = \\ &= \frac{2a}{\pi A^2} \left[\sqrt{A^2 - b^2} + \sqrt{A^2 - c^2} - j(c - b) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, гармоническая линеаризация заключается в замене нелинейного элемента эквивалентным линейным элементом, коэффициент передачи которого зависит в общем случае от амплитуды и частоты колебаний.

6.3. Определение параметров автоколебаний

Характерной особенностью нелинейных систем является возможность возникновения в них автоколебаний. Исследование условий возникновения автоколебаний, их устойчивости и параметров (амплитуды и частоты) является одной из задач анализа нелинейных систем. В инженерной практике для этого используется частотный метод, который базируется на приближенном выражении для передаточной функции нелинейного элемента:

$$W_n(A) = k_1(A) + jk_2(A).$$

На рис.6. показана схема прохождения сигнала в системе при условии подавления линейной частью всех высших гармоник.

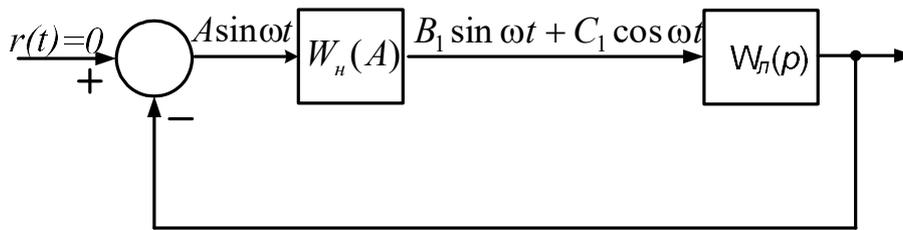


Рис. 6.6. Анализ нелинейной системы МГБ.

Частотная характеристика разомкнутой системы

$$W_{раз}(j\omega, A) = W_l(j\omega)W_n(A).$$

Из этого выражения видно, что частотная характеристика разомкнутой системы зависит не только от частоты входного сигнала, как это имеет место в линейных системах, но и от его амплитуды. Незатухающие колебания в системе по критерию Найквиста возникают в том случае, если частотная характеристика разомкнутой системы проходит через точку с координатами $(-1, j0)$, т.е.

$$W_{раз}(j\omega, A) = -1,$$

или

$$W_l(j\omega)W_n(A) = -1.$$

Обычно это условие записывают в виде

$$W_l(j\omega) = -\frac{1}{W_n(A)}; \quad W_l(j\omega) = -\frac{1}{k_1(A) + jk_2(A)}; \quad W_l(j\omega) = W_{ин}(A).$$

Решение этого уравнения относительно частоты и амплитуды автоколебаний можно получить графически как точку пересечения годографа частотной характеристики линейной части системы и годографа обратной характеристики нелинейной части, взятой с знаком минус, которую называют *инверсной характеристикой нелинейной части* $W_{ин}(A)$. В точке пересечения по кривой $W_l(j\omega)$ определяется значение частоты колебаний ω_k , а по кривой $W_{ин}(A)$ — амплитуды A_k .

Устойчивость автоколебаний можно определить следующим образом (*критерий Попова*): режим автоколебаний устойчив, если при увеличении амплитуды годограф инверсной характеристики нелинейной части $W_{ин}(A)$ *выходит* из зоны охвата АФЧХ линейной части $W_l(j\omega)$. В противном случае автоколебательный режим неустойчив.

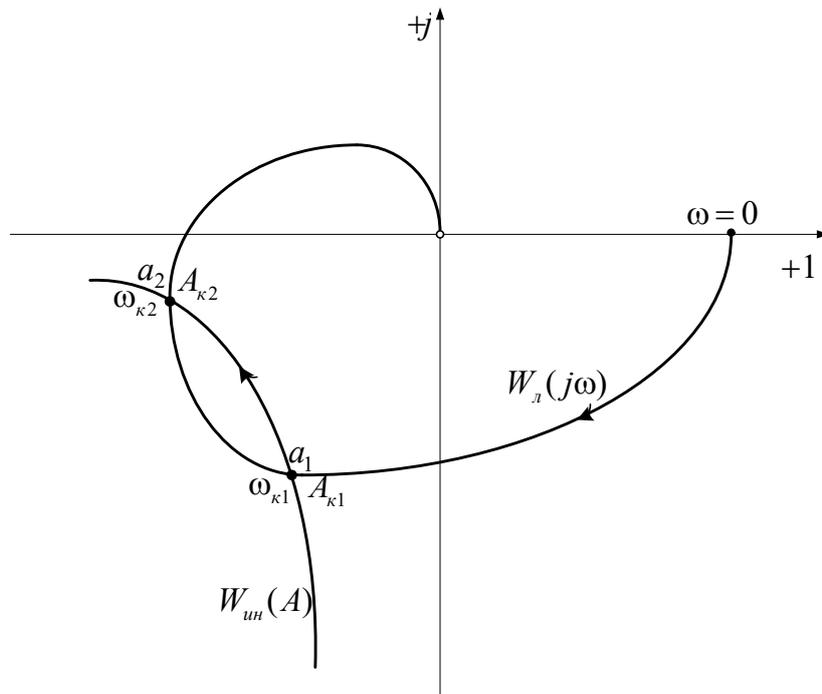


Рис.6.7. К определению устойчивости автоколебаний в нелинейной системе.

На рис. 6.7 годографы пересекаются в точках a_1 и a_2 . Точка a_1 определяет неустойчивый режим автоколебаний, так как при увеличении амплитуды годограф инверсной характеристики нелинейного элемента входит в зону охвата годографа частотной характеристики линейной части. Точке a_2 соответствует устойчивый режим автоколебаний, амплитуда которого определяется по годографу $W_{ин}(A)$ и равна $A_{\kappa 2}$, а частота находится по годографу $W_l(j\omega)$ и равна $\omega_{\kappa 2}$.

Если годографы линейной и нелинейной частей не пересекаются, то режим автоколебаний в данной системе отсутствует, рис. 6.8.

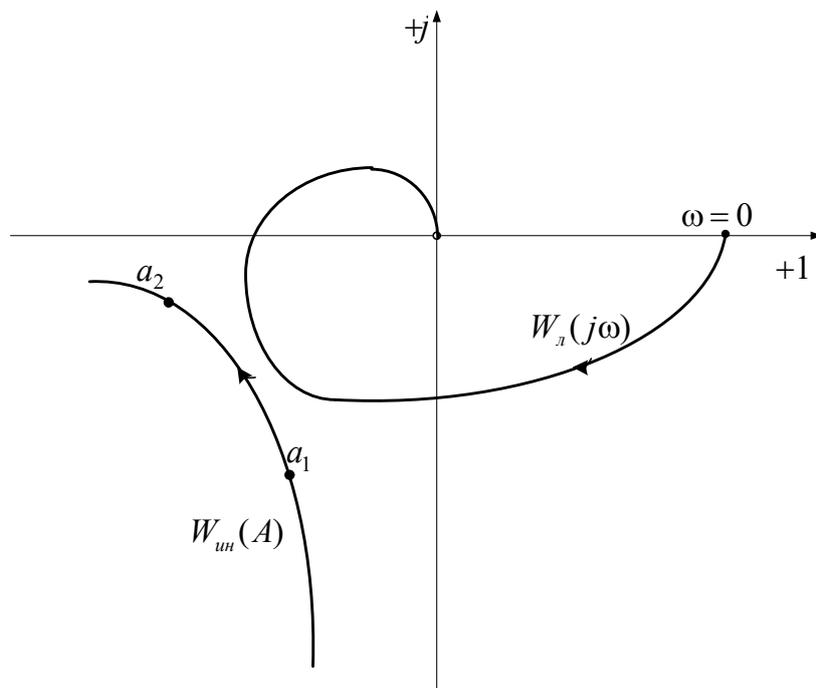


Рис.6.8. Отсутствие автоколебаний в нелинейной системе.

Пример 6.1. Рассмотрим систему, схема которой показана на рис.6.9, в которой нелинейный элемент имеет вид идеального двухпозиционного реле.

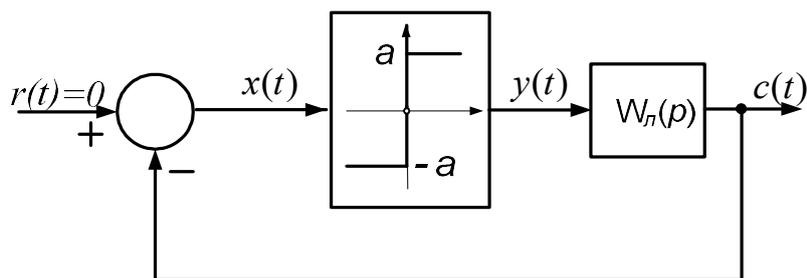


Рис.6.9. Структурная схема нелинейной системы.

Исходные данные:

$$W_l(p) = \frac{4}{p(p+1)^2} = \frac{4}{p^3 + 2p^2 + p}; \quad a = 1.$$

Как было найдено выше, комплексный коэффициент передачи нелинейного элемента равен

$$W_n(A) = \frac{4a}{\pi A}.$$

Инверсная характеристика нелинейной части $W_{ин}(A)$:

$$W_{ин}(A) = -\frac{\pi A}{4a}.$$

При изменении амплитуды от 0 до ∞ изображающая точка годографа нелинейного элемента перемещается по отрицательной вещественной полуоси от начала координат к минус бесконечности.

Построим годограф Найквиста линейной части и определим частоту автоколебаний и значение $W_l(\omega_k)$ в точке пересечения этого годографа с вещественной осью:

```
Wlin= tf(4,[1 2 1 0]); %TF модель линейной части
Gss=ss(Wlin) %SS модель линейной части
w=0.7:0.001:10;
figure(1)
nyquist(Wlin,w);
title('Найквист Wlin=4/(p*(p+1)^2)')
```

Результаты расчета приведены на рис. 6.10.

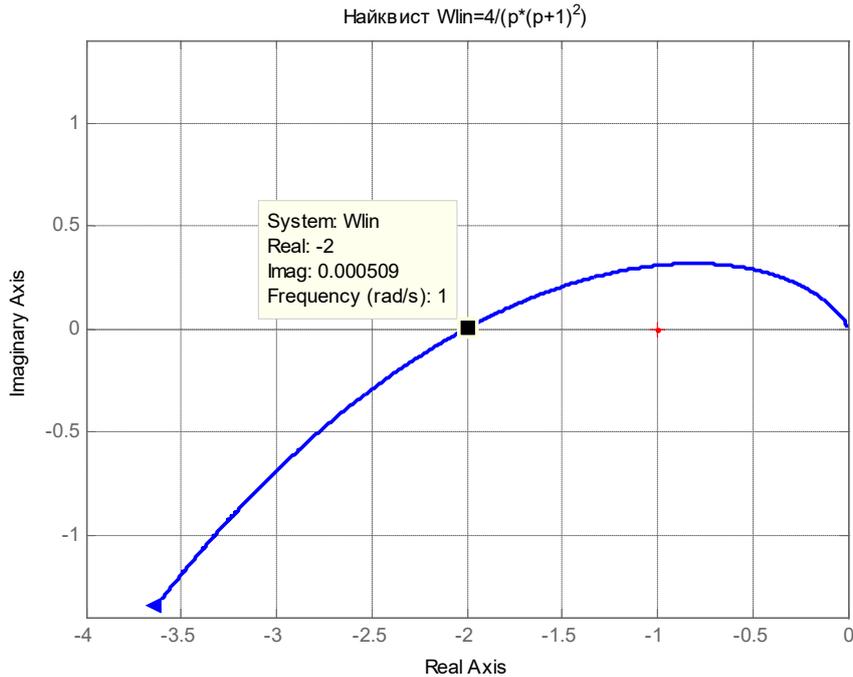


Рис.6.10. Годограф линейной системы.

Частота автоколебаний $\omega_k = 1 \text{ с}^{-1}$, $W_L(j\omega_k) = -2$.

Используя формулу

$$W_L(j\omega) = -\frac{1}{W_H(A)},$$

получим значение амплитуды автоколебаний:

$$W_L(j\omega_k) = -\frac{\pi A_k}{4a};$$

$$A_k = -\frac{4W_L(j\omega_k)a}{\pi} = -\frac{4(-2)1}{\pi} = 2,55.$$

Таким образом, входной сигнал нелинейного элемента описывается выражением:

$$x(t) = A_k \sin \omega_k t = 2,55 \sin t.$$

Сигнал на выходе объекта:

$$c(t) = -x(t) = -A_k \sin \omega_k t = -2,55 \sin t.$$

Проверим полученные результаты путем моделирования системы в Simulink. Схема моделирования приведена на рис. 6.11. В ней использован блок LTI System, который может представлять модель линейной системы в любой форме: TF, ZPK или SS. Мы будем использовать SS-модель, поскольку она позволяет вводить начальные условия.

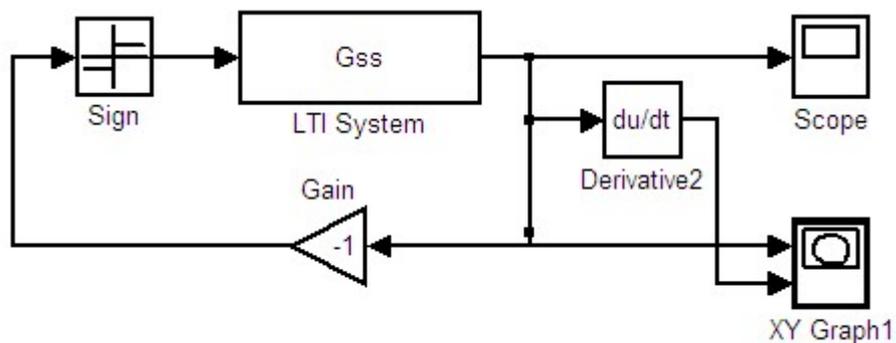


Рис.6.11. Схема моделирования Simulink к примеру 1.

На рис.6.12, 6.13 показаны выбор функции-решателя (в данном случае выбираем решатель с постоянным шагом) и настройка блока LTI System. На рис. 6.14 представлены результаты моделирования.

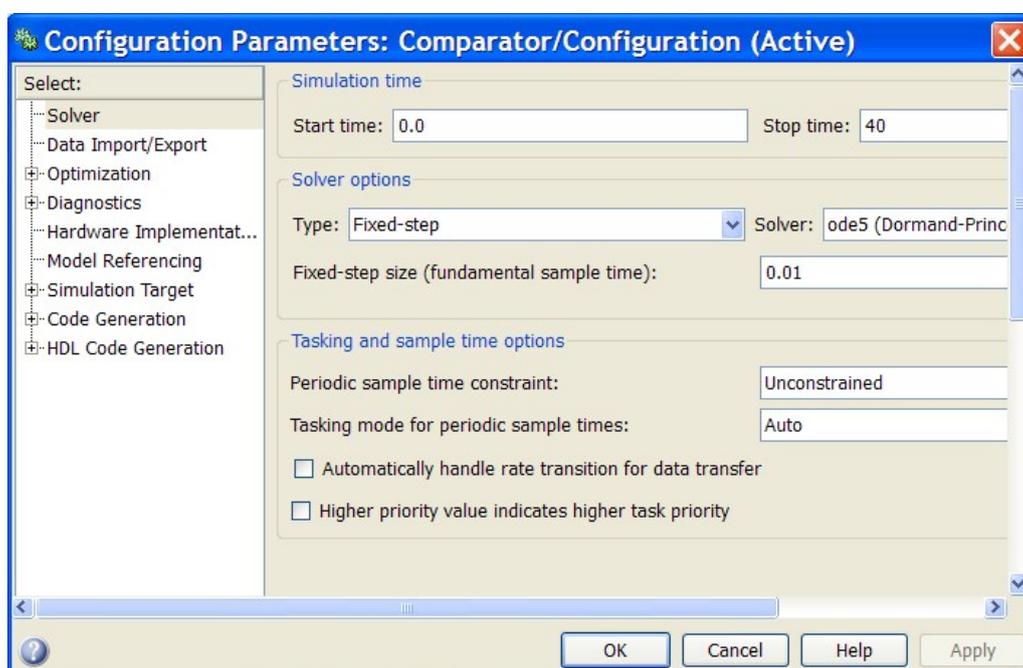


Рис.6.12. Выбор функции-решателя и установка шага по времени.

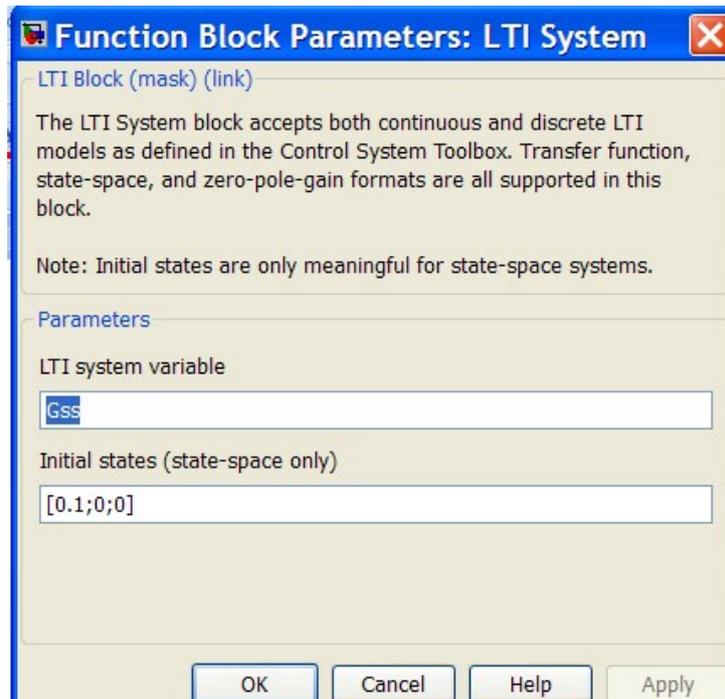


Рис.6.13. Введение начальных условий в блок LTI System.

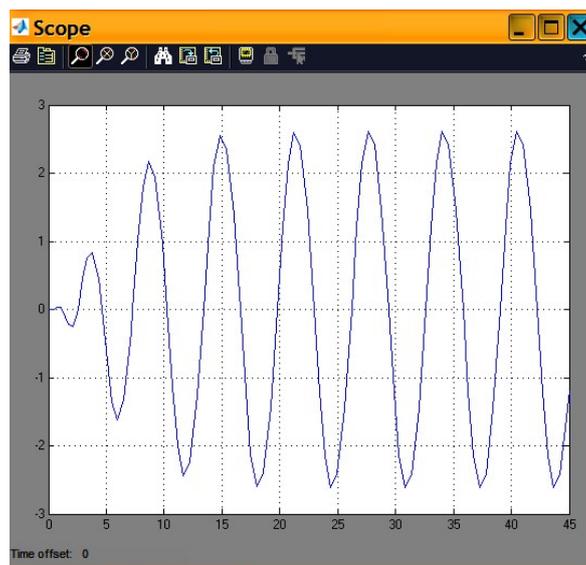


Рис.6.14. Установление автоколебаний в системе.

Временная диаграмма установившихся колебаний позволяет определить амплитуду и угловую частоту автоколебаний. Амплитуда приблизительно равна 2,55. Период колебаний $T = 6,3$ с. Угловая частота $\omega_{\kappa} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6,3} \approx 1,0 \text{ с}^{-1}$.

Подавая на блок XY Graph выходную величину и ее производную, можно получить фазовую траекторию колебаний. Так как в системе устанавливаются автоколебания, то изображающая точка раскручивается по спирали и попадает на предельный цикл. Поэтому утверждение о том, что «в системе имеет место предельный цикл» означает, что в системе существуют автоколебания.

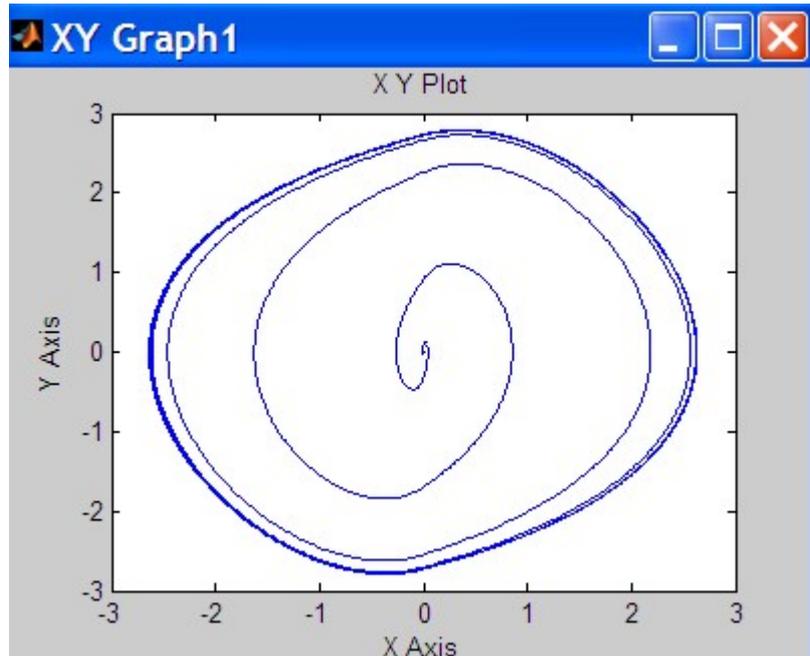


Рис.6.15. Фазовая траектория автоколебаний.

Пример 6.2. Рассмотрим систему, схема которой изображена на рис.6.16. Нелинейный элемент имеет вид реле с зоной нечувствительности. ПФ линейной части та же, что и в примере 1.

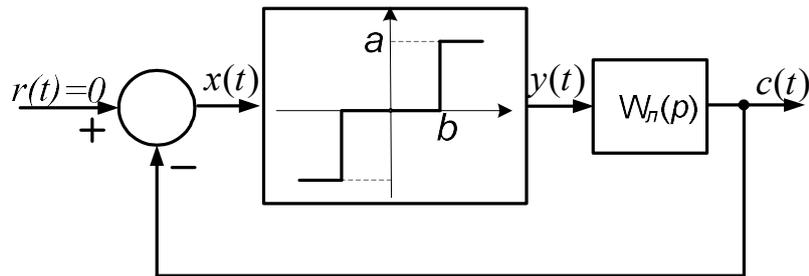


Рис.6.16. Структурная схема нелинейной системы к примеру 2.

Частота автоколебаний остается без изменений, так как характеристика реле однозначна, и комплексный коэффициент передачи является вещественной функцией амплитуды.

$$k_1 = \frac{B_1}{A} = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}.$$

Найдем амплитуду автоколебаний. Ранее было получено:

$$W_n(j\omega_k) = -2; \quad \frac{1}{W_n(j\omega_k)} = -0.5.$$

Уравнение гармонического баланса можно записать в виде

$$W_n(A) = -\frac{1}{W_n(j\omega)} \quad \text{или} \quad \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} + \frac{1}{W_n(j\omega_k)} = 0.$$

Найдем решение данного уравнения численно в Matlab для следующих параметров реле: $a = 1$, $b = 0,7$. Для этого воспользуемся функцией `fzero`, которая находит корни выражения, заданного первым параметром (строкой) с точностью, заданной вторым параметром:

```
Aak=fzero('4*1/pi/x*(sqrt(1-0.7^2/x^2))-0.5',4)
Aak = 2.4394
```

Решим эту задачу другим способом.

Построим годограф линейного звена и годограф инверсной характеристики:

```
W=tf(4,[1 2 1 0]);
w=0.8:0.01:1.2;[re,im]=nyquist(W,w);
re=re(:);im=im(:);b=0.7;Ak=b:0.01:3;
k1=4/pi./Ak.*(sqrt(1-b^2./(Ak.^2)));
Wi=-1./k1;
Figure(1)
plot(real(Wi1),imag(Wi1),'k',re,im,'k','LineWidth',2)
grid
```

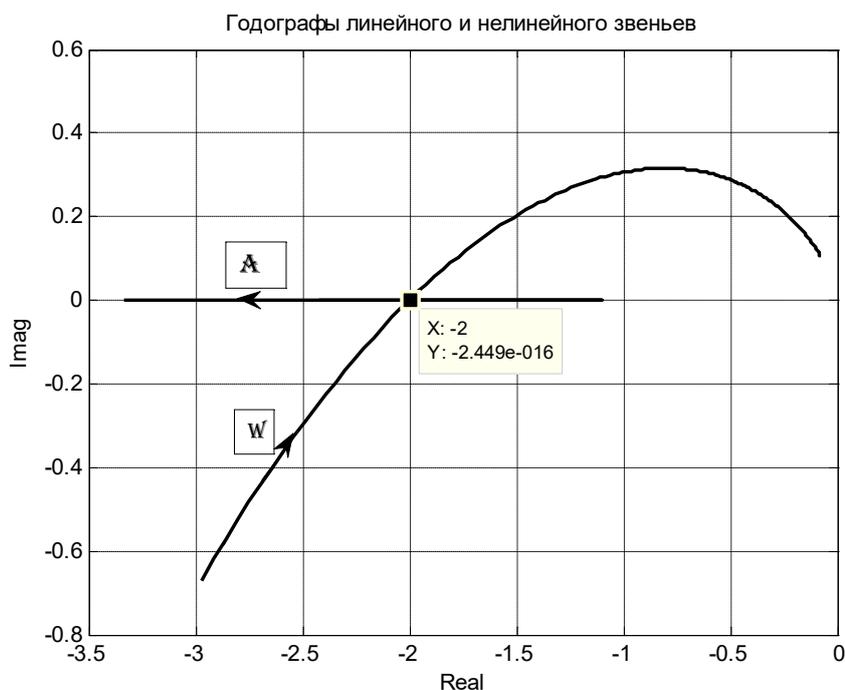


Рис.6.17. Структурная схема нелинейной системы к примеру 2.

Годографы пересекаются на оси вещественных в точке $-2j0$. Для определения частоты автоколебаний построим зависимость мнимой части КЧХ от частоты и находим частоту автоколебаний в точке, где мнимая часть равна нулю:

```
plot(w,im),grid
```

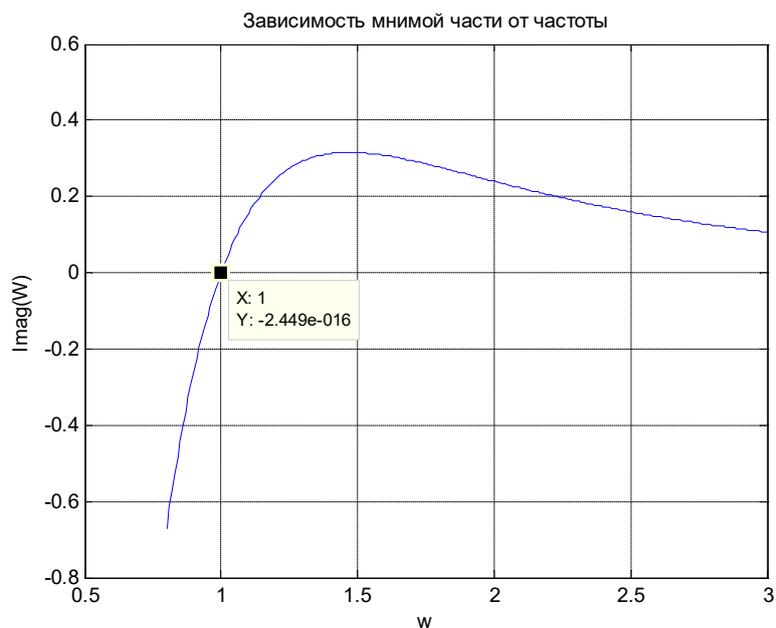


Рис.6.18. Определение частоты автоколебаний.

Частота автоколебаний $\omega_k = 1 \text{ с}^{-1}$, $W_{л}(j\omega_k) = -2$.

Для нахождения амплитуды автоколебаний построим зависимость инверсной функции от амплитуды при $A_k \geq b = 0,7$ и найдем амплитуду при $W_{ин}(A_k) = -2$.

`plot(A, Wi), grid`

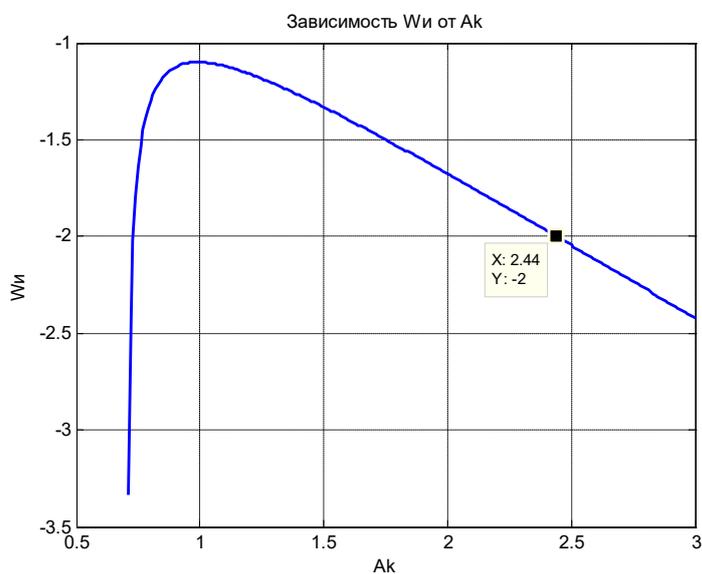


Рис.6.19. Определение амплитуды автоколебаний.

Таким образом, выходной сигнал изменяется по закону

$$y(t) = -x(t) = -A_k \sin \omega_k t = -2,44 \sin t.$$

Проверим результат с помощью имитационного моделирования.
По ПФ линейной части

$$W_x(p) = \frac{4}{p^3 + 2p^2 + p}$$

зададим матрицы SS модели в канонической форме управляемости:

$$A_m = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; 0 \ -1 \ -2]; \quad B_m = [0; 0; 1]; \quad C_m = [4 \ 0 \ 0]; \quad D_m = 0;$$

Эти матрицы используем для настройки блока State-Space в Simulink-диаграмме (рис.6.20, 6.21).

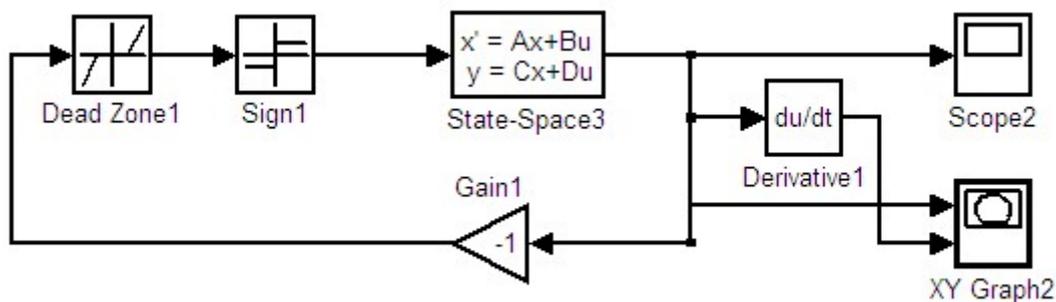


Рис.6.20. Схема моделирования Simulink к примеру 2.

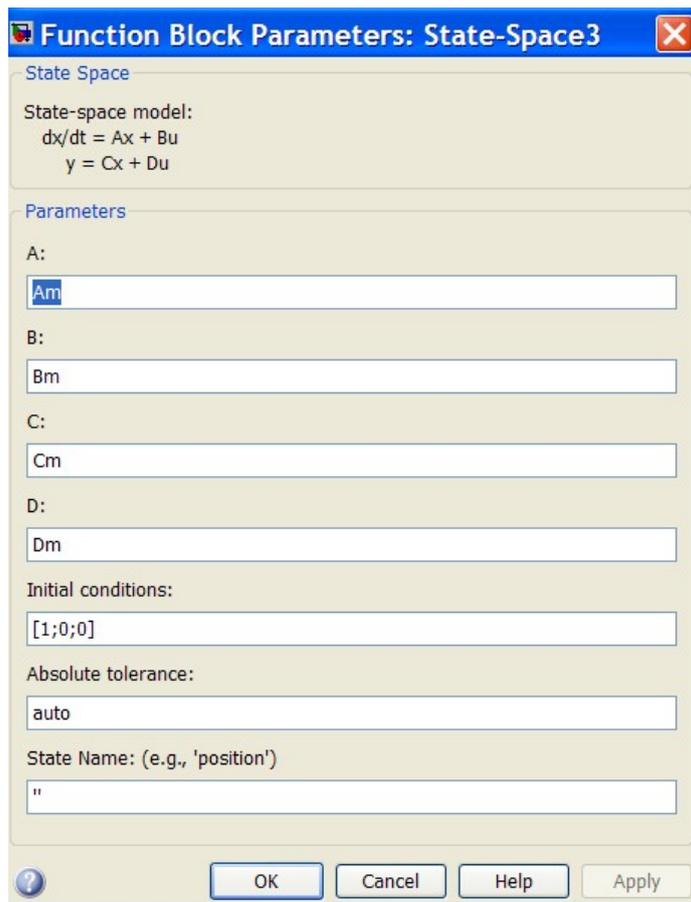


Рис.6.21. Настройка блока State-Space.

Трехпозиционное реле получим последовательным соединением блоков Dead Zone и Sign. На рис. 6.22 показана настройка блока Dead Zone.

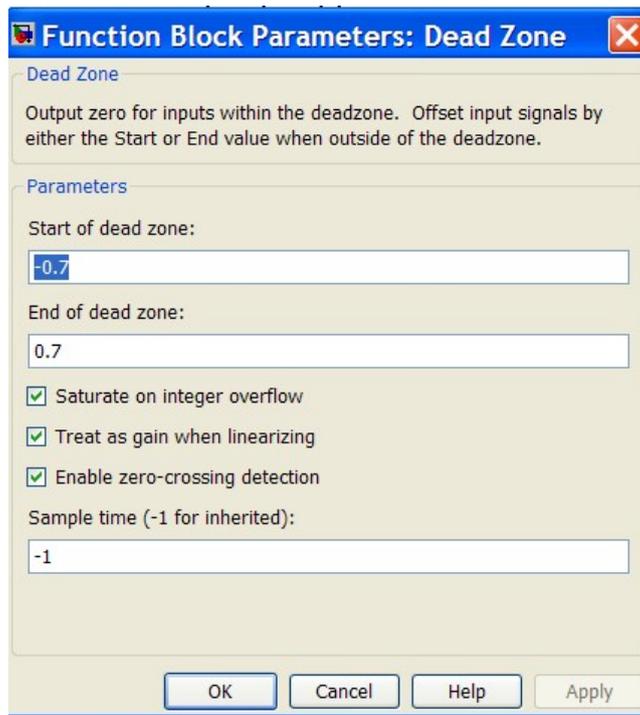


Рис.6.22. Настройка блока Dead Zone.

Результаты моделирования приведены на рис. 6.23 и 6.24.

По временной диаграмме определяем частоту и амплитуду колебаний. Для повышения точности измерений периода определяем время нескольких колебаний, которое затем делим на их число. Например, четыре колебания ($n = 4$) делятся $t_n = 37,5 - 12,5 = 25$ с. Поэтому период и угловая частота соответственно равны:

$$T = \frac{t_n}{n} = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ с};$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6,25} \approx 1 \text{ с}^{-1}.$$

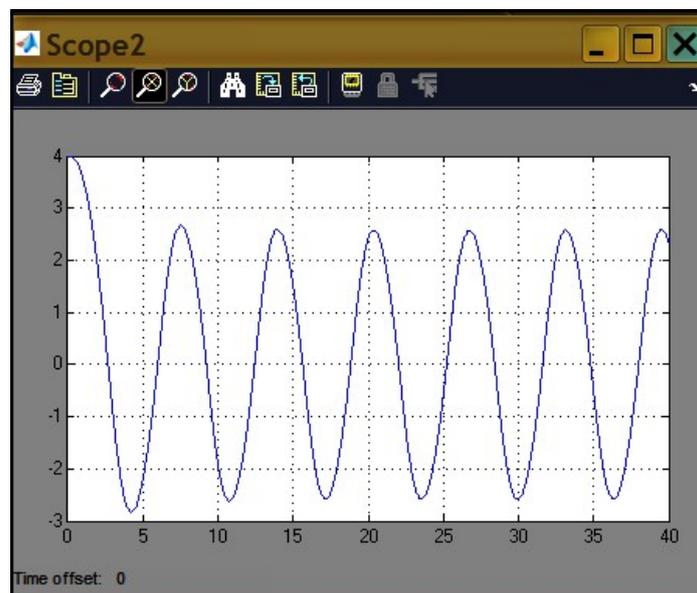


Рис.6.23. Временная диаграмма автоколебаний.

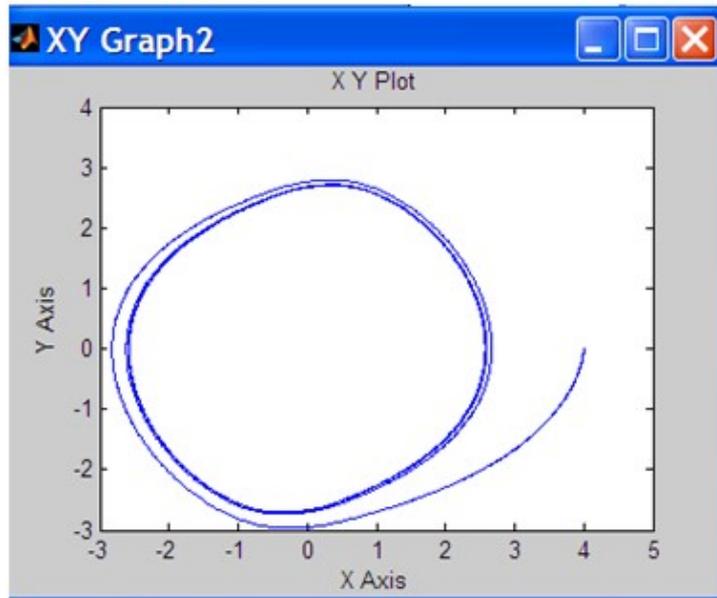


Рис.6.24. Фазовая траектория автоколебаний.

Фазовая траектория представляет собой предельный цикл. Изображающая точка, закручиваясь, попадает на замкнутую траекторию.

Пример 6.3. Рассмотрим систему, схема которой изображена на рис.6.25, Нелинейный элемент имеет вид реле с зоной нечувствительности и гистерезисом.

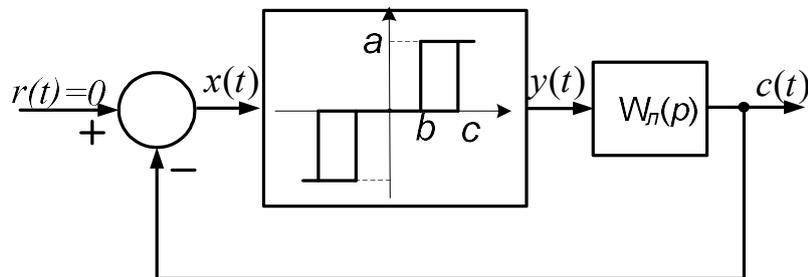


Рис.6.25. Структурная схема нелинейной системы к примеру 3.

ПФ линейной части и параметры реле:

$$W_r(p) = \frac{4}{p^3 + 3p^2 + 2p}; \quad a = 1,2; \quad b = 0,2; \quad c = 1,0.$$

Комплексный коэффициент передачи:

$$\dot{K}(A) = k_1 + jk_2.$$

где

$$k_1 = \frac{B_1}{A} = \frac{2a}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{c}{A}\right)^2} \right) =$$

$$= \frac{2a}{\pi A^2} \left[\sqrt{A^2 - b^2} + \sqrt{A^2 - c^2} \right] \quad \text{при } A > b;$$

$$k_2 = \frac{B_2}{A} = -\frac{2a}{\pi A^2}(c-b) \quad \text{при } A > c;$$

Построим два годографа: линейной части и инверсной характеристики (рис.6.26).

```
%Реле с зоной нечувствительности и гистерезисом
clc
W=tf([0 4],[1 3 2 0]);%ПФ линейной части
w=2.5:0.01:2.8;
%Вывод вещественной и мнимой частей W(jw)
[re,im]=nyquist(W,w);re=re(:);im=im(:);
%Параметры реле
a=1.2;b=0.2;c=1.0;j=sqrt(-1);
A1=c:0.001:0.95;
%Коэффициенты гармонической линеаризации
k1=2*a/pi./A1.*(sqrt(1-(b.^2)./(A1.^2))+...
sqrt(1-(c.^2)./(A1.^2)));
k2=-2*a*c/pi./A1./A1*(1-b/c);
%Инверсная обратная КЧХ нелинейной части
Win=-1./(k1+j*k2);
figure(1)
plot(real(Win),imag(Win),re,im,'LineWidth',2);
grid
xlabel('real'),ylabel('imag')
title('Годографы линейной и инверсной характеристик')
```

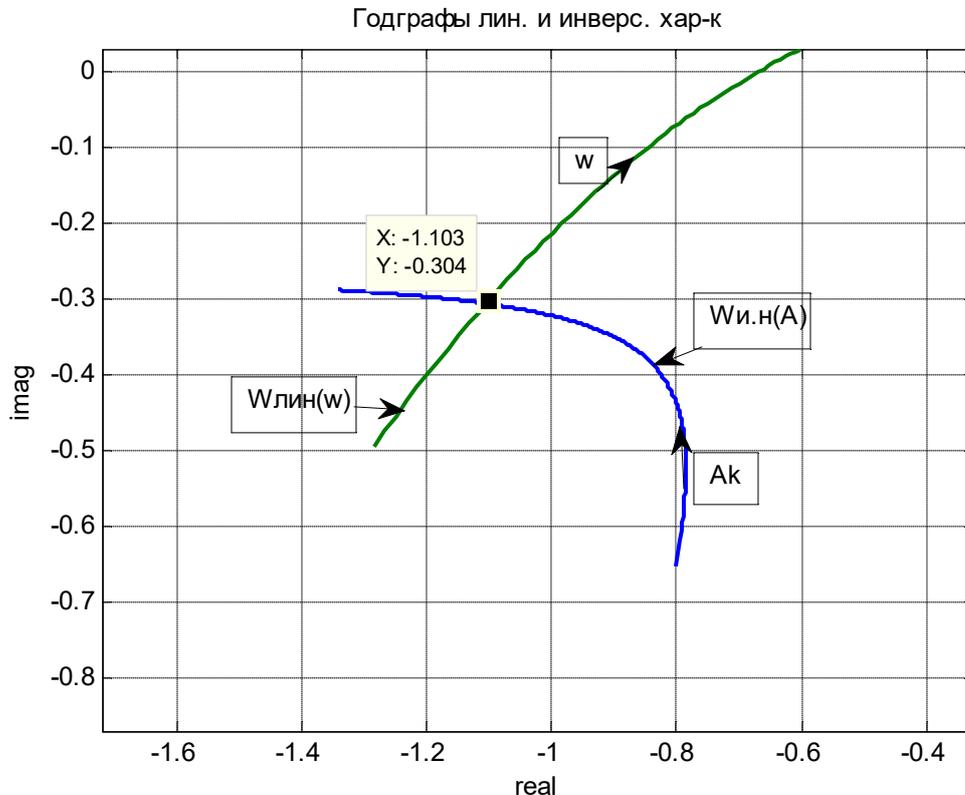


Рис.6.26. Годографы к примеру 3.

Годографы пересекаются в одной точке. Фиксируем ее координаты:

$$W_n(j\omega_k) = U_n(\omega_k) + jV_n(\omega_k) = -1,103 - j0,304.$$

Для нахождения амплитуды воспользуемся формулой

$$W_n(A) = -\frac{1}{W_n(j\omega_k)}$$

или

$$k_1(A) + jk_2(A) = -\frac{1}{U_n(\omega_k) + jV_n(\omega_k)} = d_1 + jd_2.$$

$$k_1(A) + jk_2(A) = -\frac{1}{U_n(\omega_k) + jV_n(\omega_k)} = d_1 + jd_2.$$

В данном случае

$$-\frac{1}{W_n(j\omega_k)} = -\frac{1}{-1,103 - j0,304} = 0,8426 - j0,2322; \quad d_2 = -0,2322.$$

Используя формулу для второго коэффициента, составим уравнение баланса

$$-\frac{2a}{\pi A^2}(c-b) = d_2,$$

откуда получим значение амплитуды:

$$A_k = \sqrt{\frac{-2a}{d_2\pi}(c-b)} = \sqrt{\frac{-2 \cdot 1,2}{(-0,2322)\pi}(1,0 - 0,2)} = 1,622.$$

Вычисления проведены с помощью программы:

```
%Инверсная характеристика линейной части
wilin=-1/(-1.103-0.304i)
%Mнимая часть инверсной характеристики
d2=imag(wilin)
Ak=sqrt(-2*a*(c-b)/(pi*d2))%Амплитуда автоколебаний

>> wilin = 0.8426 - 0.2322i
      d2 = -0.2322
      Ak = 1.6222
```

Для нахождения частоты автоколебаний построим годограф Найквиста линейной части, поместим на нем точку пересечения годографов и запишем частоту:

$$\omega_k = 1,06.$$

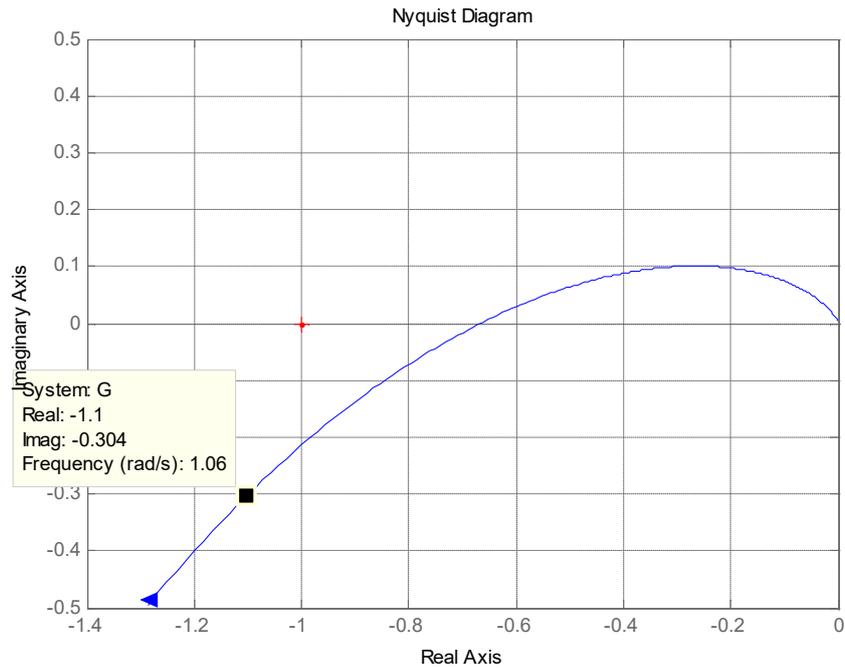


Рис.6.27. Определение частоты автоколебаний.

Таким образом, на вход реле поступает сигнал

$$x(t) = A_{\kappa} \sin \omega_{\kappa} t = 1,62 \sin 1,06t.$$

Для проверки результатов воспользуемся имитационным моделированием. На рис. 6.28 приведена Simulink-диаграмма модели системы.

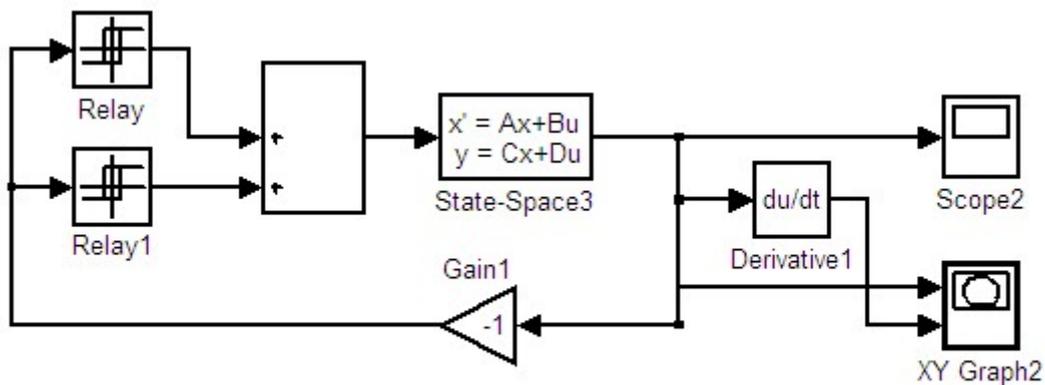


Рис.6.28. Схема моделирования Simulink к примеру 3.

На рис. 6.29, 6.30 показана настройка блоков State-Space, Relay, Relay1.

Результаты моделирования в виде графика колебаний выходной величины и фазовой траектории приведены на рис 6.31.

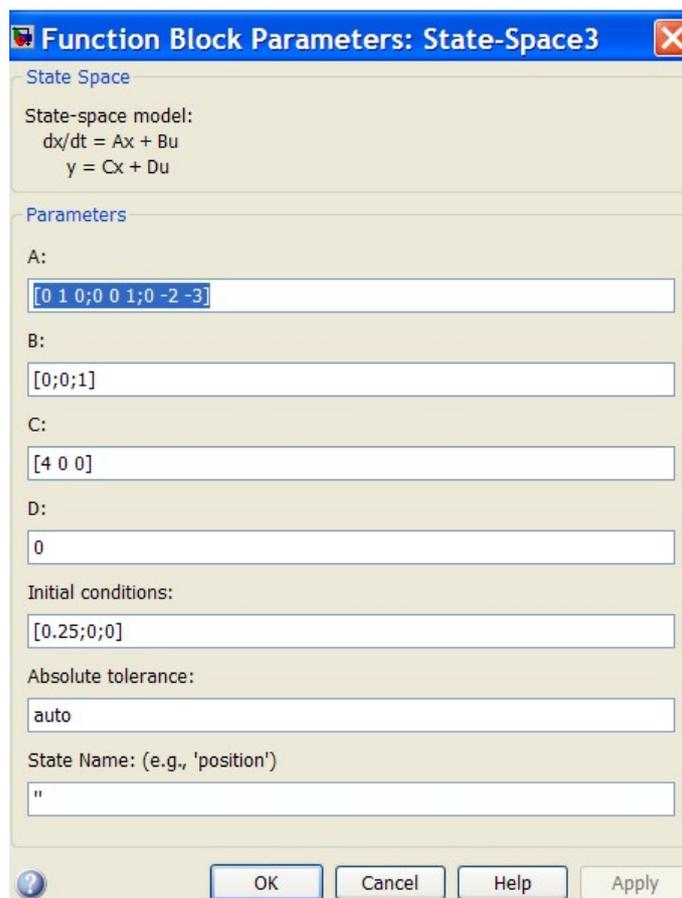


Рис.6.29. Настройка блока State-Space.

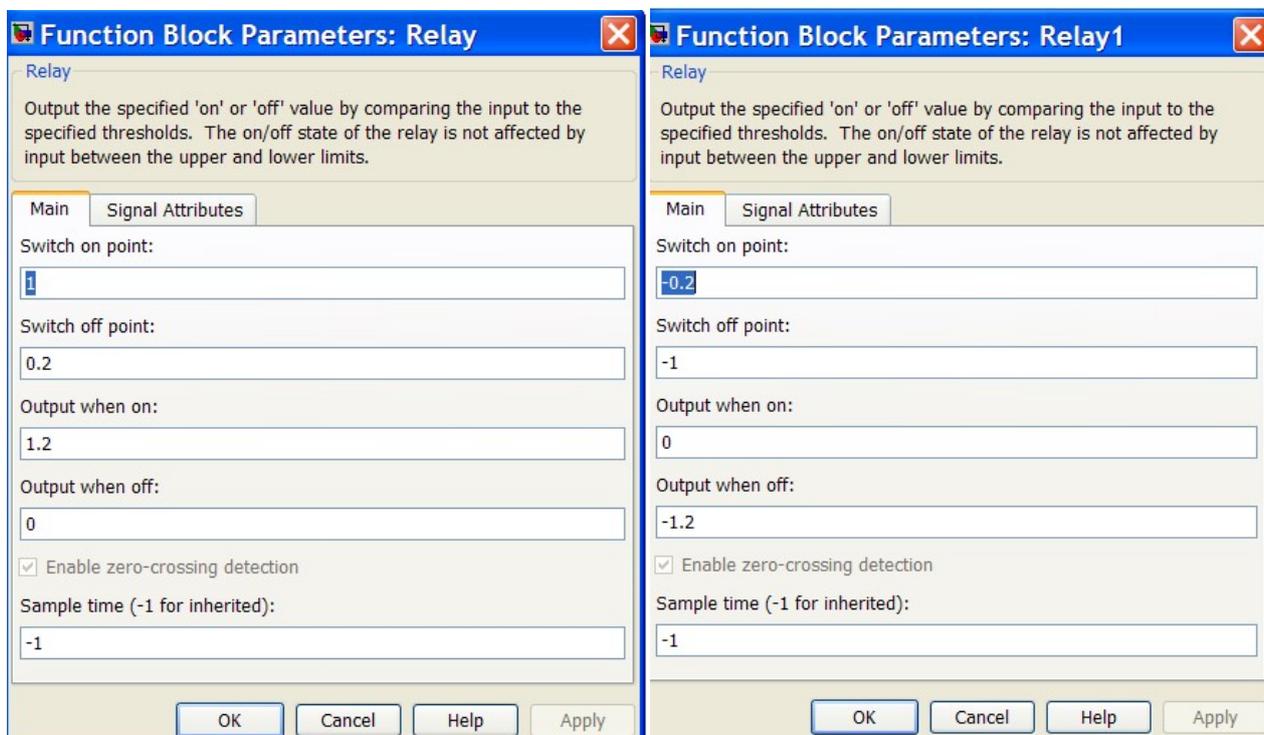


Рис.6.30. Настройка блоков Relay.

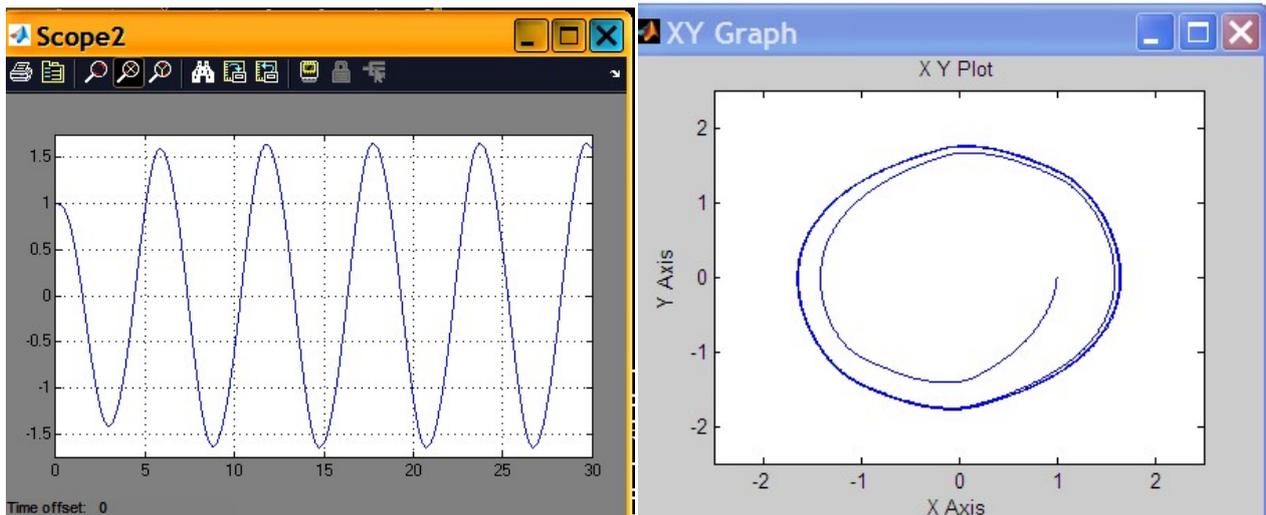


Рис.6.31. Результаты моделирования: временная характеристика и фазовая траектория автоколебаний.

6.4. Задание

Имеется система, рис.6.16, в которой нелинейный элемент – реле с зоной нечувствительности. ПФ линейной части:

$$W_{\lambda}(p) = \frac{a_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} .$$

Параметры ПФ даны в задании к предыдущей работе. Параметры реле заданы в таблице 1. Требуется найти амплитуду и частоту автоколебаний и провести имитационное моделирование. Последовательность решения задания приведена в примере 2.

Таблица 6.1

Параметры релейного элемента

Номер варианта	a	b
1	1	0,1
2	2	0,05
3	3	0,2
4	4	0,15
5	1	0,05
6	2	0,2
7	3	0,15
8	4	0,1
9	1	0,2
10	2	0,15
11	3	0,1
12	4	0,05
13	1	0,15

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыбалев А.Н. Теория автоматического управления: курсовое проектирование. Учебное пособие. – Благовещенск: : Амурский гос. ун-т, 2014. – 144 с.
2. Рыбалев А.Н., Усенко В.И., Русинов В.Л. Теория автоматического управления. Часть 1. Математические основы управления. Методическое пособие к выполнению практических и самостоятельных работ. Учебное пособие. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2011. – 201 с.
3. Рыбалев А.Н., Усенко В.И., Русинов В.Л. Теория автоматического управления. Часть 2. Анализ непрерывных линейных САУ. Учебное пособие. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2014. – 156 с.
4. Усенко В.И., Русинов В.Л. Теория автоматического управления. Часть 3. Синтез непрерывных линейных САУ. Учебное пособие. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2016. – 100 с.

Андрей Николаевич Рыбалев,
доцент кафедры АПП и Э АмГУ, канд. техн. наук, введение и разделы 1, 2;
Валентин Иванович Усенко,
доцент кафедры АПП и Э АмГУ, канд. техн. наук, разделы 5, 6;
Владислав Леонидович Русинов
старший преподаватель кафедры АПП и Э АмГУ, разделы 3, 4.

Теория автоматического управления. Часть 4. Импульсные, цифровые и нелинейные САУ. Учебное пособие

Изд-во АмГУ. Подписано к печати **???.??.**2015. Формат 60x84/16. Усл. печ. 8,25
Тираж **???**. Заказ **???**.